





Q
2
9172 et des beaux-arts de Belgique, Brussels.
v. 6 classe des sciences.
no. 1-12
SI

ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

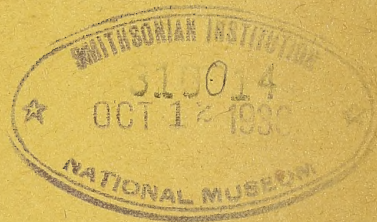
BULLETINS/

DE LA

CLASSE DES SCIENCES

5^{ME} SÉRIE. — TOME VI

1920



BRUXELLES

MAURICE LAMERTIN

LIBRAIRE-ÉDITEUR

Rue Coudenberg, 58-62

M. HAYEZ

IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE

Rue de Louvain, 112

1920

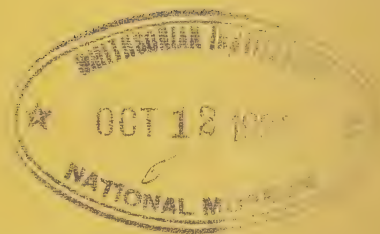
ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

BULLETIN

DE LA

CLASSE DES SCIENCES

1920 — N^{os} 1-3



BRUXELLES

MAURICE LAMERTIN

LIBRAIRE-ÉDITEUR

Rue Coudenberg, 58-62

M. HAYEZ

IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE

Rue de Louvain, 112

1920

BULLETINS

DE LA

CLASSE DES SCIENCES

AVIS

La *Classe des sciences* ayant décidé de reprendre la tradition interrompue d'indiquer la tomaison des *Bulletins*, il est rappelé que les tomes précédents de la *Cinquième série* correspondent aux années :

Tome I.		1911
— II		1912
— III.		1913
— IV.		1914
— V.		1915

ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

BULLETINS

DE LA

CLASSE DES SCIENCES

5^{ME} SÉRIE. — TOME VI

1920



BRUXELLES

MAURICE LAMERTIN

LIBRAIRE-ÉDITEUR

Rue Coudenberg, 53-62

M. HAYEZ

IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE

Rue de Louvain, 112

1920

Séance du samedi 10 janvier 1920.

M. GRAVIS, vice-directeur, occupe le fauteuil.

M. P. PELSENEER, secrétaire perpétuel.

Sont présents : MM. Léon Fredericq, J. Neuberg, M. Delacre, A. Lameere, Ch.-J. de la Vallée Poussin, Max Lohest, Fr. Swarts, J. Massart, A. Demoulin, A. Rutot, Victor Willem, P. Stroobant, G. Lecointe, Émile Marchal, *membres* ; A. Brachet, Van der Stricht, Th. De Donder, P. Fourmarier, *correspondants*.

Absences motivées : MM. J. Deruyts, Cesàro, A. de Hempinne, Julin, *membres* ; de Dorlodot et Grégoire, *correspondants*.

M. le Vice-Directeur annonce que M. V. Willem a été nommé Chevalier de l'Ordre de la Couronne ; M. A. Brachet, Docteur *honoris causa* des Universités de Paris et de Strashbourg, et que M. Gilkinet a été l'objet d'une manifestation de sympathie, organisée en son honneur par ses anciens élèves, à l'occasion de son admission à l'éméritat ; il félicite ces trois confrères au nom de la Classe.

COMITÉ SECRET.

M. G. Cesàro est élu directeur pour 1921.

MM. Gilkinet, Le Paige, Neuberg, Fredericq et Massart sont élus délégués de la Classe à la Commission de la Biographie nationale.

CORRESPONDANCE.

Les membres et correspondants nouvellement élus adressent leurs remerciements à la Classe.

— L'*Union océanographique internationale* annonce sa constitution. M. Lecoqte fait remarquer que la fondation de cette Union est en contradiction avec les décisions du Conseil international de recherches, qui a décrété l'existence : 1° d'une section d'océanographie physique, dépendant de l'Union géodésique et géophysique internationale; 2° d'une sous-section d'océanographie biologique, dépendant de l'Union internationale des sciences biologiques.

— M. Robert Verstraeten prie l'Académie d'accepter le dépôt d'un pli cacheté. — Accepté.

HOMMAGES D'OUVRAGES.

1° Par M. Maurice Delacre, une suite de cinq mémoires intitulés : *Recherches sur la constitution de la Dypnopiacone et de ses dérivés*, avec une note dont l'impression au *Bulletin* de la séance est votée;

2° Par la Ligue suisse pour la protection de la nature : *Les formes topographiques du Parc National suisse*. — Remerciements.

RAPPORT.

De MM. Verschaffelt et de Hemptinne sur un travail présenté par M. J. Boëns : *Électricité atmosphérique et Paratonnerres*. Le dépôt aux archives est proposé et voté.

PRIX PERPÉTUELS.

Il est procédé à la nomination des jurys :

1° Pour le prix Mailly, 6^e période : MM. Stroobant, Le Paige et Lecointe ;

2° Pour le prix Errera, 3^e période : MM. Fredericq, Willem, Massart et Marchal ;

3° Pour le prix Laurent, 4^e période : MM. Gravis, Massart et Marchal.

La Classe s'occupe de la formation d'une liste double de noms pour les jurys des concours décennaux des sciences minéralogiques, des sciences botaniques et de chimie et physique. Ces listes sont arrêtées et seront communiquées au Ministre des Sciences et des Arts aussitôt que la Classe se sera assurée de l'acceptation éventuelle des personnes désignées.

A la demande d'un membre, il est décidé que l'attention de M. le Ministre des Sciences et des Arts sera attirée sur la nécessité de remplacer M. Stöber au sein du jury du prix décennal des sciences appliquées (2^e période, 1903-1912).

COMMUNICATION.

— *Note sur la résistance de l'air dans le cas des projectiles ogivaux*, par M. A. Errera, présentée par M. P. Stroobant, avec rapport verbal concluant à l'impression au *Bulletin*. — Adopté.

NOTE BIBLIOGRAPHIQUE.

MAURICE DELACRE. — *La Dypnopinacone et le problème de l'individualité chimique.*

J'ai l'honneur de présenter à la Classe une suite de cinq Mémoires, parus dans les *Annales de Chimie*, et intitulés : *Recherches sur la constitution de la Dypnopinacone et de ses dérivés.*

Elle voudra bien me permettre de lui en exposer brièvement les conséquences philosophiques. Celles-ci sont de deux ordres : C'est d'abord le problème de l'individualité chimique, dont il m'est arrivé plusieurs fois d'entretenir mes confrères depuis vingt-cinq ans. Je laisserai pour une communication ultérieure quelques considérations sur les familles organiques formant le second ordre de déductions de mes recherches.

Le premier de ces Mémoires a paru en juillet 1914, le second au début de 1916 ⁽¹⁾. Les trois suivants ont pu être terminés vers le mois d'octobre 1916 ⁽²⁾. Sortis en fraude de Belgique ⁽³⁾,

(1) Grâce à l'obligeante intervention de mon très distingué collègue et ami M. PH. A. GUYE, qui a bien voulu faire parvenir à Paris le manuscrit de ce Mémoire.

(2) Les années d'occupation m'ont créé des dettes ineffaçables de reconnaissance envers tous mes concitoyens qui m'ont aidé, mais je dois ici une mention toute spéciale à mon excellent ami M. Marcel DE CLERCQ, administrateur délégué de la Banque de Flandre à Gand, qui a assuré à tous moments ma correspondance scientifique.

(3) Je suis heureux de pouvoir citer ici les noms de ceux qui, à des titres divers, ont rendu possible la continuation de mes travaux. C'est d'abord à M. DELAERE, directeur de l'École industrielle de Gand, et à mon élève dévoué, M. J. POPPE, professeur au même établissement. Tous deux, en me donnant asile dans leurs laboratoires, m'ont rendu un service pour lequel je tiens à leur exprimer ma reconnaissance. C'est ensuite mon garçon de laboratoire, M. Prudent DENÈVE; en conservant la surveillance de mes services universitaires, malgré l'intrusion des Allemands, il en a préservé tout le matériel, ainsi que tous les produits de mes recherches; de plus il a assuré, non sans dangers, une liaison constante entre l'Université et l'École industrielle, pour me fournir journalièrement tout ce qui était nécessaire à mon travail. Enfin le concierge de l'Université, M. Arthur MYS, qui, sans observer les ordres formels des Allemands, a fait tout ce qui était nécessaire pour favoriser cette liaison indispensable à mes travaux. Il a contribué aussi à cacher, au moment des réquisitions, un grand nombre d'objets et de produits appartenant à mon laboratoire.

ils se sont perdus. Averti de cette perte, j'ai pu, en passant la frontière, en avril 1918, prendre avec moi le cinquième Mémoire, qui comportait des conclusions au sujet desquelles je tenais à prendre date. C'est la raison pour laquelle ce cinquième Mémoire a paru avant les autres en juillet 1918 ⁽¹⁾. Les deux derniers n'ont pu être publiés qu'après la libération.

C'est en 1889 que, tout en étudiant la synthèse graduelle de la chaîne benzénique ⁽²⁾, mon attention fut attirée par un fait curieux : La dynopinacone, soumise à l'action de la potasse alcoolique à $\frac{1}{10\ 000}$, se transformait en homo-dynopinacone ; cette dernière, isolée et parfaitement purifiée, revenait au produit originel sous l'influence du même réactif, mais un peu plus concentré, soit à $\frac{1}{6\ 000}$ ⁽³⁾.

La transformation était, à n'en pas douter, le siège d'un équilibre ; mais un réactif intervenait ; je croyais à l'efficacité de sa concentration pour déterminer le sens du phénomène, et je ne voyais pourtant aucun moyen de faire sortir de cette réaction la vérité philosophique que je pressentais.

L'histoire des pinacolines, abordée vers 1895, devait me conduire à des notions préliminaires sur cette question délicate. Quelques années auparavant, j'avais traité la question constitu-

⁽¹⁾ Je ne pouvais, dans ces circonstances, me priver de protester contre la flamanisation de l'Université de Gand. On trouvera bien terne la protestation insérée page 103 de ce cinquième Mémoire. La vérité est que le paragraphe auquel je tenais le plus a été retranché par la rédaction des *Annales*. Le voici :

« Échappé récemment à leur pouvoir maudit, il me sera permis de protester » contre cet acte de brigandage, et ici, dans la maison vénérable de Lavoisier, de » déposer une pierre commémorative pour perpétuer le souvenir de cette hypo- » crisie qui, sous le couvert d'une institution scientifique, étiquette sacrée, cache » une manœuvre pour donner le change à nos alliés sur le moral sublime du » peuple belge lâchement opprimé et sur son inébranlable confiance en la » victoire. »

Cette publication était faite avant l'offensive victorieuse de juillet 1918.

⁽²⁾ J'ai résumé mes travaux sur ce sujet dans *Bull. Soc. chim. de France* (4), t. VII, p. 1041, 1910.

⁽³⁾ *Bull. Acad. roy. de Belg.* (3), t. XXXII, p. 446, 1896 ; *Ibid.* (3), t. XXIX, p. 855, 1895. La constatation remontait cependant au début de mes recherches sur la Dynopinacone.

tive de la benzopinacoline β ⁽¹⁾ et, étant parvenu à introduire celle-ci dans un cycle de transformations, j'en avais conclu logiquement que ce cycle ne comportait pas de changement de structure. La benzopinacoline devait être symétrique.

L'étude de la pinacoline ordinaire, après un essai malheureux ⁽²⁾ qui m'ouvrit les yeux sur l'importance de la pureté des corps, me fit revenir sur mon erreur; mais ce ne fut pas sans hésitation. Après un mémoire pénible ⁽³⁾, mais où se trouvaient exposées des critiques qui n'ont rien perdu de leur portée en ce qui concernait notre notion de l'individualité chimique, je précisai un peu plus la question dans une note ultérieure ⁽⁴⁾; cela me permit de revenir sur la question des benzopinacolines ⁽⁵⁾. Mais elle ne devint réellement claire, tout au moins sur le terrain doctrinal, que sur une observation d'origine structurale de mon regretté maître Louis Henry, établissant une différence très instructive entre les alcools pinacoliques secondaire et tertiaire. Cependant la difficulté philosophique n'en restait pas moins tout entière. C'était déjà un avantage de pouvoir la préciser; je fus amené ainsi par quelques notes ⁽⁶⁾, et après avoir établi un parallèle entre les deux familles de la pinacoline (symétrique et dissymétrique), à montrer que l'on peut réaliser divers cycles de réactions dont le rendement est connu à chaque stade, et qui comportent deux transpositions ⁽⁷⁾ moléculaires inverses.

(1) *Bull. Acad. roy. de Belg.* (3), t. XX, p. 99, 1890.

(2) *Comptes rendus*, t. CXXII, p. 1202, 1896, et t. CXXIII, p. 245, 1896.

(3) *Recherches sur la notion de l'individualité chimique.* (MÉM. IN-8° DE L'ACAD. ROY. DE BELG., et Lamertin, Bruxelles, 1905.) — *Note sur l'isomérisation.* (BULL. ACAD. ROY. DE BELG., Classe des sciences, p. 950, 1904.) — Mes critiques sur l'individualité des alcools propyliques n'ont pu être confirmées par mes expériences faites depuis. *Rapport de L. Henry.* (BULL. ACAD. ROY. DE BELG., Classe des sciences, 1904.)

(4) *Bull. Acad. roy. de Belg.*, Classe des sciences, p. 7, 1906.

(5) *Bull. Acad. roy. de Belg.*, Classe des sciences, p. 62, 1906.

(6) *Bull. Soc. chim. de France* (3), t. XXXV, pp. 343, 348, 350, 811, 1906.

(7) *Bull. Soc. chim. de France* (3), t. XXXV, p. 1088, 1906.

Il me paraît évident que ce fait important, ainsi étayé, enlevait à la « transposition moléculaire » ce caractère exceptionnel et étrange sous lequel nos maîtres nous l'avaient présentée. Je m'attachai de plus en plus à l'idée que cette soi-disant transposition n'existe pas, mais qu'ainsi comprise elle était née artificiellement de l'insuffisance de nos formules; on avait classé comme anormaux des phénomènes réguliers dépendant de l'équilibre.

Admettons pour la pinacoline deux formules connexes : tout devient rationnel. Le déplacement de l'équilibre assure la prédominance du type symétrique ou du type dissymétrique, suivant les cas. Au contraire, obstinons-nous à la représenter par une seule formule, et nous sommes forcés d'invoquer des raisons de stabilité chimériques et parfaitement contradictoires. On voit que mon point de vue nouveau n'a rien d'une théorie nouvelle ⁽¹⁾; au contraire, il ne vaut que comme critique d'une théorie existante; il permet de prévoir la ruine de notre conception moléculaire actuelle, en tant que notion philosophique rigoureusement applicable.

Mais comment rechercher par une expérience directe et décisive si la pinacoline répond à deux formules? Je mis en œuvre des produits d'une pureté que j'ose dire absolue, j'en usai des quantités telles qu'on en avait rarement manipulé dans des recherches de chimie organique. Mes recherches me firent espérer un instant atteindre le but en ce qui concerne les alcools pinacoliques. Tous deux agissaient dans le même sens; l'un était complètement, l'autre presque complètement symétrique; mais tous mes essais en vue de réaliser le phénomène inverse furent sans aucun résultat ⁽²⁾. De même l'oxyde de tétraméthyl-

⁽¹⁾ Le rapport de mon vénéré maître Louis HENRY (*Bull. Acad. roy. de Belg.*, 1904) sur mon long mémoire de 1905 m'attribue une « conception toute personnelle ». Mon idée n'a rien d'une conception; elle est une nécessité expérimentale. Outre son origine expérimentale, elle ne vaut que comme restriction d'une conception régnante, la conception du volume moléculaire.

⁽²⁾ *Bull. Soc. chim. de France* (4), t. I, p. 586, 1907.

éthylène ne paraissait pas susceptible de se transformer aisément en pinacoline ⁽¹⁾.

Malgré l'excellence des matériaux que j'avais eu entre les mains, il me fallait renoncer à résoudre le problème par les méthodes ⁽²⁾ auxquelles je m'étais appliqué depuis vingt ans déjà. Ce fut une grande déception pour moi.

Il ne me restait plus qu'une seule ressource dans le domaine de la pinacoline : l'emploi des méthodes physico-chimiques. Déterminer, par exemple, comparativement dans des conditions variées et à des échelles étendues, les constantes des deux isomères (oxydes, alcools, carbures) et supputer les transpositions par l'examen des courbes.

Je m'apprêtais à réaliser ce plan, comptant sur la collaboration des jeunes gens qui, après vingt ans d'attente, commençaient à fréquenter mon laboratoire. C'est à ce moment que l'Administration m'enleva mon préparateur et que je donnai ma démission à la Faculté des sciences de l'Université de Gand.

J'ai peut-être à me féliciter de ne pas avoir, grâce à ces circonstances, versé dans les méthodes physico-chimiques. Elles étaient pour moi un pis-aller; elles m'auraient vraisemblablement donné une solution assez aléatoire, intéressante surtout sur le papier. Je devais arriver à mieux avec des matériaux autres et plus complexes en apparence, tout en cherchant simplement à mettre de l'ordre dans les documents expérimentaux de ma synthèse du benzène.

(1) *Bull. Soc. chim. de France* (4), t. I, p. 575, 1907. Un exposé plus complet dans *Bull. Soc. chim. Belg.*, n° 5, 1912.

(2) Dans son rapport sur mon mémoire de 1905 (*Bull. Acad. roy. de Belg.*, Classe des sciences, p. 10, 1904), mon regretté maître, exprimant un principe qu'il a défendu et appliqué pendant toute sa brillante carrière, dit : « Les questions doivent être étudiées là où elles se présentent dans leurs éléments les plus simples. » Oui, à condition que nous fassions preuve d'un scepticisme impitoyable envers ces questions, surtout parce qu'elles paraissent simples et résolues. Ici la question est générale et au-dessus des questions étroites de constitution. Plus on y réfléchit, plus on voit que bien des questions peuvent se traiter sans considérer ces pauvres formules.

Je dois dire avant tout cependant que, tout en étudiant la pinacoline ordinaire, je n'avais pas été sans chercher dans les à-côtés de mon sujet des matériaux qui eussent été capables de résoudre le problème qui me préoccupait.

La distillation sèche des benzopinacolines m'avait appris que le dérivé symétrique fournit aussi bien des symétriques que des dissymétriques; de même pour le dissymétrique.

Le phénomène de « transposition » était simple à interpréter, puisqu'il se faisait sans intervention d'aucun réactif.

Mais nos maîtres nous avaient appris à nous méfier des réactions pyrogénées. Pourquoi? Ce qui donne sa signification précise à une réaction, c'est son rendement. Pourquoi une réaction pyrogénée qui donne 100 % ne serait-elle pas tout aussi significative qu'une autre?

La distillation sèche des benzopinacolines nous indique d'une manière aussi directe que sûre la composition des produits constituant la vapeur à la température d'ébullition. L'équilibre, tel qu'il se manifeste à cette température, est saisi par le refroidissement, et les corps n'ont pas le temps de se ranger dans tel ou tel sens suivant un nouvel équilibre.

Il n'est pas surprenant que nous ne puissions faire aucune constatation de ce genre dans la distillation des dérivés de la pinacoline ordinaire.

Cependant, malgré la conviction de plus en plus forte que ces recherches sur la distillation des benzopinacolines avaient produite en moi, je n'osai pas en tirer de conséquences formelles; je considérai comme « désirable que cette importante question soit établie sur des réactions plus systématiques » ⁽¹⁾.

Les réactions de fusion réalisées dans la famille de la Dypnopinacone me permirent de répondre, je crois, à toutes les objec-

⁽¹⁾ *Bull. Soc. chim. de France* (4), t. VII, p. 471, 1910. Je voudrais retrancher ce vilain mot « systématiques » et le remplacer par « simples ». Encore une fois ce n'est pas parce qu'une constitution est inscrite sur le papier qu'elle est féconde. Ce n'est que peu à peu, on le voit que j'ai pu débarrasser mon esprit de tout ce que l'éducation y avait introduit d'artificiel.

tions qui auraient pu m'être faites pour les cas cités relatifs aux benzopinacolines.

Un corps est parfaitement pur, cristallisé et parfaitement défini. On prétend dans l'école qu'il doit être représenté par une formule unique; cette formule unique est d'ailleurs la conséquence de notre conception moléculaire, aussi bien que de la règle d'Avogadro.

Or ce corps, en fondant, subit une réaction *quantitative*, se transformant partiellement en un corps nouveau, qui lui aussi est pur, cristallisé et parfaitement défini.

Enfin ce dernier corps, soumis à une nouvelle fusion, revient pour une certaine proportion au corps primitif.

Toutes ces réactions sont quantitatives.

Il est évident d'après cela qu'il entre dans la constitution des corps un facteur dont on n'a jamais tenu compte. Si A en fondant se transforme partiellement en B, c'est qu'un germe de B se trouvait en A. Il est impossible que A puisse être représenté philosophiquement par une seule formule. La formation de B doit évidemment intervenir dans la représentation de cette constitution.

La conséquence me paraît aussi simple que philosophique. Elle a la même certitude que celle qui nous fait dire qu'une réaction qui s'opère sous l'influence de l'action de la masse et du temps n'est complète qu'à l'infini.

Il suffisait d'étudier à ce point de vue la famille de la Dypnopinacone pour trouver de ce principe des applications aussi nombreuses que variées. Mais je m'empresse d'ajouter que ces constatations, qui m'avaient échappé depuis trente ans, ne me sont devenues possibles qu'après m'être débarrassé de ces théories qui, ainsi qu'on nous l'enseignait dans notre jeunesse, devaient nous servir à « prévoir les faits nouveaux », et après m'être attaché, avec toujours plus de soin, à la pureté scrupuleuse des produits sur lesquels portaient mes recherches.

COMMUNICATION.

PHYSIQUE. — Note sur la résistance de l'air dans le cas des projectiles ogivaux,

par A. ERRERA,

Docteur en sciences physiques et mathématiques (1).

§ 1.

Les lois de la résistance de l'air sont loin d'être certaines, malgré les expériences nombreuses faites dans divers pays, et notamment en France, par la Commission de Gâvre.

Dans son *Traité de Balistique extérieure* (II^e édition, p. 17), M. le Général Charbonnier énonce comme suit la troisième loi :

« La résistance de l'air, pour des projectiles de même section et de formes peu différentes, peut être mise sous la forme $iF(v)$, où i est un coefficient indépendant de la vitesse et $F(v)$ une même fonction de la vitesse pour tous ces projectiles. »

D'après cela, si l'on représentait en coordonnées rectangulaires toutes les valeurs expérimentales de $\frac{F(v)}{v^2}$, que nous appellerons $f(v)$, on devrait obtenir une courbe unique ; au lieu de cela les points forment un amas confus ressemblant plutôt à la voie lactée !

Toutefois, la Commission de Gâvre a cherché à condenser les moyennes des résultats pour les projectiles ogivaux, sous la forme d'une table et d'un graphique, reproduits dans le *Traité de Balistique extérieure* (pp. 525 à 565 et p. 23) ; ils représentent plus ou moins bien des phénomènes très compliqués dont les mesures sont sujettes à revision.

On a cherché depuis longtemps une fonction continue simple, capable de représenter la courbe des $f(v)$; mais les différentes

(1) Présenté par M. Stroobant.

expressions données depuis Newton ne suivent la courbe expérimentale que dans un intervalle restreint.

L'objet de la présente note est d'indiquer une fonction rationnelle qui côtoie la courbe dans toute l'étendue de la table, c'est-à-dire pour des vitesses variant de 0 à 1200 m.

Cette fonction est

$$f(v) = 0,2550 + 40,83 \frac{v - 330}{(v - 330)^2 + 22500}. \quad (1)$$

§ 2.

Nous allons indiquer brièvement la méthode suivie pour y arriver.

D'après la figure (p. 23) et la table (pp. 525 à 565), la fonction jouit d'un maximum M , pour lequel $480 \leq v \leq 488$ et $f(v) = 0,3911$, et d'un minimum m , pour lequel $173 \leq v \leq 180$ et $f(v) = 0,1189$; les abscisses de ces points présentent une notable incertitude.

Ces points sont symétriques par rapport à un point C , où

$$326,5 \leq v \leq 334 \text{ et } f(v) = 0,2550.$$

Or, d'après la table, pour $v = 330$, on a

$$f(v) = 0,2550.$$

Prenons donc ce point pour centre C de symétrie et posons

$$v = z + 330 \quad \text{et} \quad f(v) = t + 0,2550.$$

Or la courbe a l'aspect d'une cubique, qui, rapportée à ses nouveaux axes, est linéaire en t , quadratique en z et a pour centre d'origine C , ce qui supprime les termes de degrés pairs. On est donc amené à essayer une équation de la forme (voir aussi § 3, Rem. II)

$$z^2t - Az + Bt = 0,$$

où

$$t = \frac{Az}{B + z^2}. \quad (2)$$

Cette équation représente en effet une cubique réduite à une serpentine.

Les extrêmes sont donnés par

$$\frac{dt}{dz} = \frac{A(B + z^2) - 2Az^2}{(B + z^2)^2} = \frac{AB - Az^2}{(B + z^2)^2} = 0,$$

où

$$z = \pm \sqrt{B}, \quad \text{d'où} \quad t = \pm \frac{A}{2\sqrt{B}}.$$

Or en M on a

$$\frac{A}{2\sqrt{B}} = t = f(v) - 0,2550 = 0,3911 - 0,2550 = 0,1361.$$

D'où

$$\frac{A}{\sqrt{B}} = 0,2722.$$

De plus, en m on a

$$\sqrt{B} = z = v - 330 \quad \text{avec} \quad 173 \leq v \leq 180.$$

Donc

$$150 \leq \sqrt{B} \leq 157.$$

Des essais nous ont montré que la fonction (2) se rapproche le mieux de la table pour

$$\sqrt{B} = 150, \quad \text{d'où} \quad B = 22500 \quad \text{et} \quad A = 0,2722 \times 150 = 40,83.$$

La courbe est donc

$$t = \frac{40,83z}{22500 + z^2}. \quad (3)$$

Et, en revenant à v et $f(v)$

$$f(v) = 0,2550 + 40,83 \frac{v - 330}{(v - 330)^2 + 22500}. \quad (1)$$

§ 3. — REMARQUES.

I. On peut poser

$$z = \sqrt{B} x \quad \text{et} \quad t = \frac{A}{\sqrt{B}} y,$$

c'est-à-dire

$$z = 150x \quad \text{et} \quad t = 0,2722y.$$

L'équation (2) devient

$$y = \frac{x}{1 + x^2}. \quad (4)$$

Et celle-ci, en posant :

$$x = \operatorname{tg} \varphi,$$

c'est-à-dire

$$\frac{v - 330}{150} = \operatorname{tg} \varphi$$

devient :

$$y = \frac{1}{2} \sin 2\varphi, \quad (5)$$

c'est-à-dire

$$\frac{f(v) - 0,2550}{0,2722} = \frac{1}{2} \sin 2\varphi. \quad (6)$$

II. La table ci-dessous nous indique, pour des valeurs de 10 en 10 m., l'erreur commise en adoptant la fonction (1). Cette erreur est petite, sans être tout à fait négligeable.

Bien entendu, on pourrait ajouter des termes, afin de se rapprocher davantage de l'expérience. Par exemple, on pourrait chercher une cubique de la forme

$$at^3 + bzt^2 + cz^2t + dz + et = 0,$$

qui, elle aussi, représente une serpentine, lorsque $a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$.

Mais ces fonctions et d'autres de degrés plus élevés auraient le désavantage d'être beaucoup moins simples que la fonction (2), sans que l'on puisse affirmer que le gain en précision soit réel, puisque les données expérimentales sont appelées à être modifiées à la suite des tirs d'essai que l'on ne manquera pas d'instituer.

III. L'hodographe est donné (Cf. Charbonnier, p. 92) par

$$\frac{dv}{d\tau} = v \operatorname{tg} \tau + \frac{cvF(v)}{g \cos \tau} \quad \text{avec} \quad F(v) = v^2 f(v), \quad (7)$$

expression dans laquelle τ est l'angle que fait la tangente à la trajectoire avec l'horizontale.

D'après des travaux plus récents, il semble qu'on doive, même en première approximation, multiplier $F(v)$ par un facteur qui tienne compte de la variation de la densité de l'air avec l'altitude.

Quoi qu'il en soit, nous allons indiquer ce que devient l'équation (7) lorsqu'on introduit la relation (1). On a

$$\frac{dv}{d\tau} = v \operatorname{tg} \tau + \frac{cv^3}{g \cos \tau} \left(0,2550 + 40,83 \frac{v - 330}{(v - 330)^2 + 22500} \right).$$

Posant

$$v = 330 + 150x = 150(x + 2,2),$$

$$x = \frac{c}{g} 150 \cdot 40,83$$

et

$$\lambda = \frac{0,2550}{40,83} \cdot 150 = 0,9368 \dots$$

Il vient, en multipliant par $\frac{\cos \tau}{150}$,

$$\frac{dx}{d\tau} \cos \tau = (x + 2,2) \sin \tau + x(x + 2,2)^2 \left(\lambda + \frac{x}{x^2 + 1} \right).$$

Posons

$$u = \sin \tau$$

$$\frac{du}{d\tau} = \cos \tau.$$

Il vient alors

$$(1 - u^2) \frac{dx}{du} = (x + 2,2)u + \kappa(x + 2,2)^3 \left(\lambda + \frac{x}{x^2 + 1} \right). \quad (8)$$

Posons maintenant

$$\kappa(x + 2,2)^3 \left(\lambda + \frac{x}{x^2 + 1} \right) = A(x)$$

et

$$(x + 2,2)u + A(x) = y;$$

alors

$$y' = (x + 2,2)u' + u + A'(x)$$

et (8) devient

$$1 - u^2 = y \cdot u'.$$

Multiplions par $(x + 2,2)^2$ et remplaçons u et u' en fonction de y et y' :

$$(x + 2,2)^2 - [y - A(x)]^2 = y \{ (x + 2,2)[y' - A'(x)] - y + A(x) \}$$

ou

$$(x + 2,2)yy' = [(x + 2,2)A'(x) + A(x)]y - [A(x)]^2 + (x + 2,2)^2 \quad (9)$$

Étant donné que le facteur $(x + 2,2)$ divise $A(x)$, cette dernière relation peut se simplifier encore.

En posant

$$\kappa(x + 2,2)^2 \left(\lambda + \frac{x}{x^2 + 1} \right) = B(x),$$

d'où

$$A(x) = (x + 2,2)B(x)$$

et

$$A'(x) = B(x) + (x + 2,2)B'(x),$$

il vient enfin

$$yy' = [2B(x) + (x + 2,2)B'(x)]y - (x + 2,2)[B(x)]^2 + (x + 2,2). \quad (10)$$

§ 4. — TABLE.

Nous reproduisons ci-dessous, à titre de vérification, une table des valeurs de $f(v)$.

La première colonne donne l'argument v de 10 en 10 mètres; dans la deuxième, on trouve la valeur de $f(v)$ obtenue par la formule (1); la troisième reproduit les nombres donnés par la Commission de Gâvre (*loc. cit.*, pp. 525-565), et la dernière indique la différence ε qui existe entre elles.

Nous pensons qu'il n'y a pas d'intérêt à calculer $f(v)$ pour des valeurs de l'argument différant de 1 mètre.

v .	$f(v)$ calculé.	$f(v)$ d'après Charbonnier (table V).	ε .
0	0,1525	0,1549	+ 0,0024
10	0,1504	0,1524	+ 0,0020
20	0,1483	0,1499	+ 0,0016
30	0,1461	0,1474	+ 0,0013
40	0,1439	0,1449	+ 0,0010
50	0,1417	0,1424	+ 0 0007
60	0 1394	0,1399	+ 0,0005
70	0,1372	0,1374	+ 0,0002
80	0,1349	0,1349	0,0000
90	0,1327	0,1329	+ 0,0002
100	0,1305	0,1309	+ 0,0004

A. Errera. — Note sur la résistance de l'air

$v.$	$f(v)$ calculé.	$f(v)$ d'après Charbonnier (table V).	$\varepsilon.$
110	0,1283	0,1289	+ 0,0006
120	0,1263	0,1269	+ 0 0006
130	0,1243	0,1249	+ 0,0006
140	0,1226	0,1229	+ 0,0003
150	0,1211	0,1209	- 0,0002
160	0,1200	0,1199	- 0,0001
170	0,1192	0,1190	- 0,0002
180	0,1189	0,1189	0,0000
190	0,1192	0,1193	+ 0,0001
200	0,1203	0,1200	- 0,0003
210	0,1222	0,1210	- 0,0012
220	0,1252	0,1230	- 0 0022
230	0,1294	0,1258	- 0,0036
240	0,1349	0,1290	- 0,0059
250	0,1420	0,1340	- 0,0080
260	0,1507	0,1400	- 0 0107
270	0,1611	0,1481	- 0,0130
280	0,1733	0,1577	- 0,0156
290	0,1872	0,1698	- 0,0174
300	0,2027	0,1860	- 0,0167
310	0,2193	0,2062	- 0,0131
320	0,2369	0,2292	- 0,0077
330	0,2550	0,2550	0 0000
340	0,2731	0,2808	+ 0 0077
350	0,2907	0,3038	+ 0,0131

dans le cas des projectiles ogivaux.

$v.$	$f(v)$ calculé.	$f(v)$ d'après Charbonnier (table V).	$\varepsilon.$
360	0,3073	0,3240	+ 0,0167
370	0,3228	0,3402	+ 0,0174
380	0 3367	0,3523	+ 0,0156
390	0,3489	0 3619	+ 0,0130
400	0,3593	0,3700	+ 0,0107
410	0,3680	0,3760	+ 0,0080
420	0,3751	0,3810	+ 0,0059
430	0,3806	0,3842	+ 0,0036
440	0,3848	0,3870	+ 0,0022
450	0,3878	0,3890	+ 0,0012
460	0,3897	0,3900	+ 0 0003
470	0,3908	0,3907	- 0,0001
480	5,3911	0,3911	0,0000
490	0,3908	0,3910	+ 0,0002
500	0,3900	0,3902	+ 0,0002
510	0,3889	0,3891	+ 0,0002
520	0,3874	0,3871	- 0 0003
530	0,3857	0,3851	- 0,0006
540	0,3837	0,3831	- 0,0006
550	0,3817	0,3811	- 0,0006
560	0,3795	0,3791	- 0,0004
570	0,3773	0,3771	- 0,0002
580	0,3751	0,3751	0,0000
590	0,3728	0,3726	- 0,0002
600	0,3706	0,3701	- 0,0005

$v.$	$f(v)$ calculé.	$f(v)$ d'après Charbonnier (table V).	$\varepsilon.$
610	0 3683	0,3676	- 0,0007
620	0,3661	0,3651	- 0,0010
630	0,3639	0,3626	- 0,0013
640	0 3617	0 3601	- 0,0016
650	0,3596	0 3576	- 0,0020
660	0 3575	0,3551	- 0,0024
670	0,3555	0,3526	- 0,0029
680	0,3536	0,3501	- 0,0035
690	0,3516	0,3476	- 0,0040
700	0,3497	0,3451	- 0,0046
710	0,3480	0,3430	- 0,0050
720	0,3462	0,3410	- 0,0052
730	0,3445	0,3390	- 0,0055
740	0,3428	0,3370	- 0,0058
750	0,3412	0,3350	- 0,0062
760	0,3397	0,3330	- 0,0067
770	0,3381	0,3310	- 0,0071
780	0,3367	0,3295	- 0 0072
790	0,3352	0,3280	- 0 0072
800	0 3338	0,3265	- 0,0073
810	0 3325	0,3250	- 0,0075
820	0,3312	0,3235	- 0,0077
830	0,3299	0,3220	- 0,0079
840	0,3287	0,3205	- 0 0082
850	0,3275	0,3190	- 0,0085

dans le cas des projectiles ogivaux.

$v.$	$f(v)$ calculé.	$f, v)$ d après Charbonnier (table V).	$\varepsilon.$
860	0,3263	0,3175	- 0,0088
870	0,3252	0,3160	- 0,0092
880	0,3241	0,3145	- 0,0096
890	0,3230	0,3130	- 0,0100
900	0,3220	0,3110	- 0,0100
910	0,3210	0,3110	- 0,0100
920	0,3200	0,3100	- 0,0100
930	0,3190	0,3090	- 0,0100
940	0,3181	0,3080	- 0,0101
950	0,3172	0,3070	- 0,0102
960	0,3163	0,3060	- 0,0103
970	0,3155	0,3055	- 0,0100
980	0,3146	0,3050	- 0,0096
990	0,3138	0,3045	- 0,0093
1000	0,3130	0,3040	- 0,0090
1010	0,3123	0,3035	- 0,0088
1020	0,3115	0,3030	- 0,0085
1030	0,3108	0,3025	- 0,0083
1040	0,3100	0,3020	- 0,0080
1050	0,3093	0,3015	- 0,0078
1060	0,3087	0,3010	- 0,0077
1070	0,3080	0,3005	- 0,0075
1080	0,3073	0,3001	- 0,0072
1090	0,3067	0,2998	- 0,0069
1100	0,3061	0,2995	- 0,0066

A. Errera. — Note sur la résistance de l'air, etc.

<i>v.</i>	$f(v)$ calculé.	$f(v)$ d'après Charlonnier (table V).	$\varepsilon.$
1110	0,3055	0,2992	- 0,0063
1120	0,3049	0,2990	- 0,0059
1130	0,3043	0,2987	- 0,0056
1140	0,3037	0,2985	- 0,0052
1150	0,3032	0,2982	- 0 0050
1160	0,3026	0,2980	- 0,0046
1170	0,3021	0,2977	- 0,0044
1180	0,3016	0,2975	- 0,0041
1190	0,3011	0,2972	- 0,0039
1200	0,3006	0,2970	- 0,0036

Uccle, le 29 décembre 1919.

Séance du samedi 7 février 1920.

M. A. GRAVIS, directeur de la Classe.

M. PAUL PELSENEER, secrétaire perpétuel.

Sont présents : MM. C. le Paige, J. Deruyts, Léon Fredericq, J. Neuberg, A. Lameere, Ch.-J. de la Vallée Poussin, Fr. Swarts, Jean Massart, A. Demoulin, A. Rutot, A. de Hemptinne, Victor Willem, Paul Stroobant, Ch. Julin, J. Verschaffelt, G. Lecointe, Émile Marchal, *membres* ; M. Stuyvaert, Paul Fourmarier, A. Brachet, O. Van der Stricht, V. Grégoire, Th. De Donder, *correspondants*.

Absences motivées : MM. Cesàro, vice-directeur, et de Dorlodot, correspondant.

Avant d'aborder l'ordre du jour, M. le Directeur exprime les vifs regrets de la Classe à l'occasion du décès de M. Jules Boulvin, correspondant de la section des sciences mathématiques et physiques. Une lettre exprimant les condoléances de l'Académie sera adressée à la famille du défunt.

M. le Directeur félicite M. P. Nolf, nommé Officier de l'Ordre de Léopold ; MM. Willem et Van der Stricht, nommés membres associés de la Société des Sciences médicales et naturelles, et M. De Donder, dont les travaux viennent d'être cités avec éloges par Sir Joseph Larmor, dans le *Times* du 7 janvier. (*Applaudissements.*)

Le procès-verbal de la séance du 10 janvier est lu et approuvé.

CORRESPONDANCE.

M. le Ministre des Sciences et des Arts transmet une ampliation de l'arrêté royal du 30 décembre 1919 approuvant l'élection de M. Servais, et une ampliation d'un arrêté royal de la même date nommant M. J. Brunfaut, directeur de la Classe des beaux-arts, président de l'Académie pour 1920.

— M. Ledent demande une subvention de la Fondation Agathon De Potter. Renvoi à la Commission de cette Fondation.

— L'Ambassade de France transmet le « Bulletin de la Direction des Recherches scientifiques et industrielles et des Inventions » (Ministère de l'Instruction publique).

— L'École d'anthropologie de Paris annonce pour le mois de juillet prochain une réunion générale, préparatoire à la fondation d'un Institut international d'anthropologie.

— L'Observatoire astronomique de Lisbonne annonce la mort de son directeur, le vice-amiral C. A. Campos Rodrigues.

— M. le Ministre des Sciences et des Arts fait savoir qu'il approuve les Statuts du Conseil international de Recherches et des Unions internationales astronomique, géodésique et géophysique, et de chimie pure et appliquée; qu'il reconnaît l'Académie comme « Corps adhérent » à ces Conseil et Unions, et qu'il inscrira au budget de son département les dépenses qui doivent en résulter.

HOMMAGE D'OUVRAGE.

Théorie du champ électromagnétique de Maxwel Lorentz et du champ gravifique d'Einstein, par Th. De Donder.

— Remerciements.

RAPPORTS.

Le rapporteur désigné pour examiner un travail de M. Garot étant décédé, il est remplacé par M. Ch.-J. de la Vallée Poussin.

Un travail en réponse à la 6^e question (Sciences naturelles) du concours de 1915, prorogé jusqu'en 1920, ayant été retrouvé, MM. Cesàro et Lohest sont nommés pour faire rapport à ce sujet.

JURYS DES PRIX DÉCENNAUX.

La Classe présente une liste de cinq noms pour la formation du jury chargé de juger la 10^e période du Prix Guinard.

BUSTES.

A la demande de la Commission des Bustes, la Classe désigne, pour être mis aux plus belles places, les bustes de Schmerling, Brasseur, Dumont, Quetelet, Spring, d'Omalius, Schwann, J. Plateau, Houzeau, Liagre.

150^{me} ANNIVERSAIRE DE L'ACADÉMIE.

La Classe se rallie à la proposition de célébrer en 1922 le cent cinquantième anniversaire de la fondation de l'Académie. Elle désigne MM. Massart et Lecointe pour faire partie de la sous-commission de la publication spéciale qui sera éditée à cette occasion.

CONSEILS NATIONAL ET INTERNATIONAL DE RECHERCHES.

La Classe émet un avis favorable au sujet des Statuts projetés qui lui sont soumis pour les Unions internationales de radiotélégraphie, de mathématiques, de physique, de sciences biologiques, de géographie, de géologie et de bibliographie et documentation. Il en sera donné connaissance au Comité exécutif du Conseil international.

La Classe renvoie à l'examen de la Commission spéciale des Conseils national et international un contre-projet du Ministère des Affaires économiques, transmis par M. le Ministre des Sciences et des Arts.

COMMUNICATIONS ET LECTURES.

De MM. Verschaffelt et Crombez : *Sur l'observation de la dispersion anormale par la méthode des prismes opposés*. Impression au *Bulletin*.

De M. Jean Massart : *L'action de la lumière continue sur la structure des feuilles*. Impression au *Bulletin*.

De M. H. Van der Linden : *Les équations du champ de gravitation d'Einstein*, présentée par M. Lecointe, avec rapport verbal concluant à l'impression au *Bulletin*. Adopté.

M. G. Lecointe prononce à ce propos les paroles suivantes :

« En présentant à la Classe des sciences cette première note de M. Henri Van der Linden sur la Gravifique, je désire rendre un hommage à son ancien professeur, notre confrère M. De Donder, qui continue à s'occuper gracieusement et de façon suivie de son élève, dont il a fait un disciple en la matière. L'Observatoire royal de Belgique lui en est vivement reconnaissant. »

De M. L. Remy : *La mensuration de la fatigue intellectuelle*

des écoliers au moyen d'un audiomètre permettant d'opérer simultanément sur tous les élèves d'une classe. Renvoi à MM. L. Fredericq et Willem.

PHYSIQUE EXPÉRIMENTALE. — Sur l'observation de la dispersion anormale par la méthode des prismes opposés,

par J.-E. VERSCHAFFELT et R. CROMBEZ.

La méthode du prisme a été appliquée par divers auteurs à l'observation et à l'étude de la dispersion anormale dans des solutions de substances absorbantes. Le plus souvent les observations étaient faites sur des solutions assez concentrées, contenues dans des prismes de petit angle; en diluant les solutions on peut, il est vrai, faire usage de prismes plus ouverts, mais alors la dispersion anormale est cachée, ou à peu près, par la dispersion normale du solvant.

Cependant, même avec des solutions faiblement concentrées (1 % par ex.) dans des prismes pas très aigus (20° environ), il est aisé d'observer la dispersion anormale, en compensant la dispersion normale du solvant par un deuxième prisme, de même angle, mais opposé, contenant le solvant pur. C'est ce que l'on observe très bien en prenant par exemple deux cuvettes prismatiques de même angle (à peu près), dont l'une contient une solution de quelques pour-cent de fuchsine, de cyanine ou de violet de méthyle dans l'alcool, et l'autre de l'alcool pur (*). En plaçant le premier prisme dans un goniomètre, on observe tout au plus une indication de la dispersion anormale : on voit une image irisée de la fente du collimateur, violette en dedans, rouge en dehors ; mais si l'on interpose la cuvette

(*) L'iode en solution dans le sulfure de carbone (la couleur de cette solution est violette) se prête également à l'expérience. La solution alcoolique d'iode est brune et n'offre pas de dispersion anormale dans le spectre visible.

contenant l'alcool, on voit le rouge et le violet nettement séparés, le violet se trouvant par rapport au rouge du côté de l'arête du premier prisme.

La théorie mathématique de la méthode, que nous appellerons « méthode des prismes opposés », est facile à faire, en supposant les angles assez petits pour qu'on puisse remplacer les sinus des angles par les angles eux-mêmes (*). Soit α l'angle des prismes ; appelons n_s l'indice de la solution (première cuvette), n' celui du solvant (deuxième cuvette). Supposons qu'un faisceau parallèle tombe normalement sur la première cuvette ; l'angle d'incidence sur la surface de sortie est alors α et l'angle d'émergence est $r_1 = n_s \alpha$, de sorte que la déviation est

$$\delta_1 = (n_s - 1)\alpha. \quad (1)$$

Si nous représentons par n l'indice de la substance dissoute et par x sa concentration en poids (x gr. pour 1 gr. de solution), et que nous supposions vérifiées approximativement les lois de mélange suivantes :

$$\frac{n_s - 1}{d_s} = \frac{n' - 1}{d'}(1 - x) + \frac{n - 1}{d}x \quad (2)$$

et

$$\frac{1}{d_s} = \frac{1}{d'}(1 - x) + \frac{1}{d}x, \quad (3)$$

où d_s , d' et d sont respectivement les densités de la solution, du solvant et de la substance dissoute, il vient, pour de petites valeurs de x :

$$n_s - 1 = n' - 1 + (n - n')\frac{d'}{d}x, \quad (4)$$

de sorte que

$$\delta_1 = (n' - 1)\alpha + (n - n')\frac{d'}{d}\alpha x. \quad (5)$$

(*) Même pour des angles de 20° l'erreur n'est que de quelques pour-cent.

Appelant encore n_r , n'_r , n_v , n'_v les indices du corps dissous et du solvant pour le rouge et le violet, et remarquant que $n'_v - n'_r$ est petit par rapport à $n_v - n_r$, la dispersion produite par le prisme est

$$\Delta_1 = (\delta_1)_v - (\delta_1)_r = (n'_v - n'_r)\alpha - (n_r - n_v)\frac{d'}{d}\alpha x. \quad (6)$$

Suivant que le premier terme l'emporte sur le second ou le second sur le premier, la dispersion sera normale ou anormale (*).

Juxtaposons maintenant la seconde cuvette en opposition; l'angle d'incidence est r_1 et l'angle de réfraction est $r_2 = \frac{r_1}{n'} = \frac{n_s}{n'}\alpha$. L'angle d'incidence sur la face de sortie est $i_3 = r_2 - \alpha = \frac{n_s - n'}{n'}\alpha$ et l'angle d'émergence, qui est en même temps l'angle de déviation totale, est

$$\delta_2 = n'i_3 = (n_s - n')\alpha, \quad (7)$$

ou, d'après (4),

$$\delta_2 = (n - n')\frac{d'}{d}\alpha x. \quad (8)$$

On voit qu'effectivement la déviation due au solvant (voir form. 5) est compensée en première approximation (**). La

(*) Comme pour l'alcool, $n'_v - n'_r$ est à peu près égal à 0,01, alors que pour les substances colorantes, $n_r - n_v$ est de l'ordre de l'unité; on voit que c'est pour des concentrations de 1 % à peu près que se fait le passage de la dispersion normale à la dispersion anormale.

(**) L'expression (5) est d'ailleurs indépendante de l'orientation des prismes, du moins si les angles sont petits; c'est ce qu'on trouve aussi en partant des formules générales du prisme; pour des prismes de petit angle, la déviation reste constante en première approximation et égale à (4).

Remarquons encore qu'en première approximation, $d'x$ est la masse de substance dissoute par unité de volume.

mesure de la déviation permet donc de calculer immédiatement l'indice de réfraction de la substance dissoute.

Pour faire quelques mesures par cette méthode, nous nous sommes servis de deux cuvettes à faces (sensiblement) parallèles, dans chacune desquelles nous avons placé en biais une lame de verre, de façon à la diviser en deux cuvettes prismatiques opposées. L'une des cuvettes, où la lame de verre était collée à la cire, servit à des solutions aqueuses; l'angle α était de $20^{\circ}55'$ (en moyenne, la cuvette formant elle-même un prisme de quelques minutes). Dans l'autre cuvette, qui servit à des solutions alcooliques, la lame était collée à la seccotine; l'angle réfringent était (en moyenne) $\alpha = 19^{\circ}42'$ (*)

Comme substances absorbantes nous avons pris le violet de méthyle et la fuchsine. Nous avons déterminé la densité de cette dernière par la méthode de suspension, en formant un mélange d'eau et de glycérine de même densité; nous avons trouvé ainsi :

densité de la fuchsine : 1,185.

Pour déterminer la densité du violet de méthyle, qui est assez bien soluble dans l'eau, nous avons fait une pastille comprimée de cette substance, et nous en avons déterminé la densité par la méthode de la balance hydrostatique, en la suspendant dans la paraffine liquide; nous avons obtenu ainsi :

densité du violet de méthyle : 1,39.

Comme source de lumière, nous avons employé l'arc au calcium. Les solutions de violet de méthyle et de fuchsine donnaient par dispersion une bande rouge et une bande bleu-violet, dans lesquelles on distinguait quelques raies, auxquelles

(*) Par suite de l'imperfection du parallélisme de leurs faces, les cuvettes, remplies de solvant pur, donnaient une déviation d'un petit nombre de minutes.

se rapportent les mesures. Les résultats sont donnés dans les tableaux suivants (*):

Violet de méthyle.

Solutions alcooliques; $\alpha = 19^{\circ}42'$.

λ	$x = 0,010$		$x = 0,025$		$x = 0,040$		$x = 0,11$ (sat.)	
	δ	n	δ	n	δ	n	δ	n
6712 A.	8'	2,56	19'	2,50	30'	2,48	82'	2,48
6497	7'	2,41	18'	2,44	28'	2,41	78'	2,42
4455	— 1'	1,22	— 2'	1,25	— 5' ?	1,18	— 6'	1,29
4227	+ 1'	1,52	+ 1'	1,43	+ 2'	1,45	+ 5'	1,44

Solutions aqueuses; $\alpha = 20^{\circ}55'$.

λ	$x = 0,005$		$x = 0,020$		$x = 0,031$	
	δ	n	δ	n	δ	n
6712	+ 5'	2,44	23'	2,61	33'	2,51
6497			21'	2,50	30'	2,41
4455	0	1,34	— 1'	1,23	— 4'	1,20
4227			+ 2'	1,45	+ 2'	1,41

Moyenne.

λ	n	n (Pflüger)
6712	2,52	2,53
6497	2,43	2,48
4455	1,23	1,17
4227	1,45	1,46

La dernière colonne, au bas du tableau, contient, comme terme de comparaison, les valeurs de n déduites, pour les longueurs d'onde observées, des mesures d'indices faites par Pflüger sur des prismes de violet de méthyle solide; la concordance est, comme on voit, satisfaisante. Il en est de même pour la fuchsine, comme le montre le tableau suivant :

(*) Les déviations (mesurées au moyen d'un goniomètre donnant la minute) sont comptées à partir de l'image de la fente fournie par la cuvette remplie entièrement de solvant; elles sont prises positivement du côté de la base du prisme à solution.

Fuchsine (alcool, $\alpha = 19^{\circ}42'$).

λ	$x = 0,020$		$x = 0,030$		n	
	δ	n	δ	n	moyenne	Pflüger.
6712	14'	2,25	19'	2,17	2,21	2,34
6497	17'	2,44	24'	2,38	2,41	2,40
6170	20'	2,63	30'	2,63	2,63	2,60
5857	22'	2,76	34'	2,80	2,78	2,63
4227	— 3'	1,18	— 4'	1,20	1,19	1,07

Nous avons fait également, par cette méthode, quelques mesures sur la para-nitrosodiméthylaniline (densité 1,145), dont la dispersion en solution, dans le spectre visible, avait été observée par l'un de nous (R. C.) (*). Le tableau suivant montre que les indices calculés s'accordent très bien avec ceux observés par Wood :

Para-nitrosodiméthylaniline (alcool, $\alpha = 19^{\circ}42'$).

	$x = 0,030$		$x = 0,030$		moyenne.	Wood.
6497	9'	1,73	16'	1,75	1,74	1,76
6170	10'	1,77	17'	1,78	1,78	1,78
5857	11'	1,81	18'	1,80	1,81	1,81
5603	12'	1,85	20'	1,85	1,85	1,85
5270	14'	1,94	23'	1,93	1,93	1,94

De ces expériences nous croyons donc pouvoir conclure non seulement que la méthode des prismes opposés constitue une méthode commode et pratique pour l'observation de la dispersion anormale (**), mais encore qu'elle fournit d'une façon simple des valeurs assez approchées pour les indices de réfraction de la substance dissoute.

(*) *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des sciences), novembre 1919.

(**) Nous avons constaté que Wood (*Phil. Mag.*, t. XLVI, 1898, p. 380) a déjà appliqué la méthode, qui d'après lui serait même une méthode connue; en particulier, Soret aurait déjà proposé l'emploi d'une cuvette à faces parallèles, coupée en diagonale par une lame de verre. Malheureusement, Wood ne donne pas d'indication bibliographique et nous n'avons pas trouvé à quels travaux il fait allusion.

BOTANIQUE. — **L'action de la lumière continue
sur la structure des feuilles,**

Par JEAN MASSART.

En 1895, M. le Prof^r Gaston Bonnier ⁽¹⁾ publia les résultats d'une série d'expériences faites en éclairant des plantes par une lumière électrique continue. D'autres exemplaires de ces espèces étaient cultivés à la même lumière, mais discontinue : ils étaient éclairés de 6 heures du matin à 6 heures du soir, et obscurcis de 6 heures du soir à 6 heures du matin. Un troisième lot, des mêmes plantes, était gardé à l'obscurité continue. Un quatrième lot était cultivé aux conditions normales de jour et de nuit.

M. Bonnier constate qu'à la lumière continue les plantes subissent « une sorte d'*étiolement vert*, car les deux principales caractéristiques des changements obtenus sont la surabondance de la chlorophylle et la simplification de la structure » (p. 413).

Pour ce qui concerne spécialement les feuilles, voici quelles sont ses conclusions : « La structure du limbe de la feuille est simplifiée : le tissu en palissade est moins marqué ou disparaît totalement, l'épiderme a des cellules à parois moins épaisses, les cellules corticales perdent leurs différenciations spéciales (transformation en sclérenchyme des pétioles de Fougère, réduction de la membrane des cellules corticales des feuilles de Pin, etc.) » (p. 413).

Les dessins qui accompagnent le travail sont tout à fait démonstratifs. Les figures les plus intéressantes sont celles de *Pinus austriaca* (pl. 7) et *Helleborus niger* (pl. 7).

Pour la dimension des limbes foliaires, la différence entre l'action de la lumière continue et celle de la lumière discontinue est tout aussi frappante : les premiers sont plus petits que les

(1) G. BONNIER, *Influence de la lumière électrique continue sur la forme et la structure des plantes*. (REVUE GÉNÉRALE DE BOTANIQUE, t. VII, 1895, p. 241.)

seconds. Voir, par exemple, *Carpinus Betulus* et *Amygdalus communis* (pl. 12); *Vicia sativa* et *Stachys tuberifera* (pl. 15). Sur ces deux dernières espèces, on voit aussi très nettement l'intensité plus grande de la teinte verte à la lumière constante.

J'ai repris ces expériences pendant l'automne et l'hiver 1919-1920. Je désirais simplement les répéter pour les montrer à mes élèves, mais le résultat ne répondit nullement à mon attente.

Une bonne vingtaine d'espèces, prises en plein repos hivernal, le 25 novembre 1919, furent mises en pots et placées dans une chambre à doubles parois dans laquelle la lumière extérieure n'a pas accès.

On avait eu soin de choisir, au Jardin Botanique de l'État, à Bruxelles, des touffes assez grosses pour pouvoir être divisées en six fragments. Il y avait donc six lots parfaitement comparables.

La source de lumière était une lampe à incandescence de 400 bougies, à environ un mètre des plantes. L'obscurcissement était obtenu en couvrant les pots de grandes boîtes cylindriques en carton, tout à fait opaques.

La température s'est maintenue généralement entre 16° et 17°5. Les écarts extrêmes ont été 14° et 20°.

Voici comment étaient traités les six lots :

Lum. 24. — A la lumière continue.

Lum. 0. — A l'obscurité continue.

Lum. 12. — A la lumière pendant douze heures et à l'obscurité pendant douze heures. L'un des lots était éclairé de 7 à 19 heures; l'autre de 19 à 7 heures. Il n'y a eu aucune différence entre ces deux lots.

Lum. 6. — A la lumière de 7 à 13 heures; à l'obscurité de 13 à 7 heures.

Lum. 18. — A la lumière de 13 à 7 heures; à l'obscurité de 7 à 13 heures.

Quelques plantes n'ont pas poussé convenablement. Ainsi *Buxus sempervirens* avait à peine commencé à déplier ses bourgeons après deux mois et demi; certaines hépatiques, par exemple *Monoclea*, *Dumortiera* et *Fossombronina*, se sont dessé-

chées ; les bulbilles de *Begonia discolor* et de *Cystopteris bulbifera* n'avaient pas encore germé.

Nous donnons la liste de celles qui ont donné des résultats :

HÉPATIQUES.

Conocephalus conicus.
Lunularia cruciata.
Marchantia polymorpha.
M. emarginata.
Pellia epiphylla.
P. endiviae folia.

LYCOPODIÉES.

Selaginella helvetica.

PHANÉROGAMES.

Notoscordum fragrans.
Sempervivum tectorum.
Egopodium Podagraria.
Lysimachia Nummularia.
L. N. aurea.
Vinca minor.
Glechoma hederaceum.
Ajuga reptans.
A. r. atropurpurea.
Campanula persicifolia.

Il est important de n'étudier que des organes qui se sont formés entièrement depuis le début de l'expérience. Aussi n'ai-je jamais tenu compte des premières feuilles, qui avaient été ébauchées au dehors. Disons d'ailleurs que la comparaison de ces feuilles avec les suivantes montre qu'elles avaient toutes la même structure.

Pour chaque espèce, on a fait à la fois l'étude microscopique des coupes et l'examen des organes à l'œil nu. Quelque paradoxal que cela paraisse, c'est ce dernier mode d'observation qui l'emporte, et de beaucoup. La moindre différence dans la structure et la disposition des tissus assimilateurs se reflète immédiatement dans l'apparence extérieure des organes. Ainsi, le verdissement un peu plus marqué des feuilles de *Glechoma* à la lumière continue se remarque facilement à l'œil nu, tandis qu'il disparaît totalement sur les coupes.

Résumons les observations faites :

Hépatiques. — A l'obscurité une seule a poussé : *Lunularia cruciata*, qui a donné des thalles dressés et étroits.

Dans *Lum. 24*, *Lum. 18*, *Lum. 12* et *Lum. 6*, les résultats ont été exactement les mêmes : aussi bien à la lumière continue qu'à la lumière discontinue, les thalles nouvellement formés

sont absolument identiques aux thalles anciens, tant pour la structure interne que pour les dimensions, la couleur et la direction.

Selaginella helvetica. A l'obscurité, tiges dressées à longs entre-nœuds, à feuilles petites, blanches.

Dans *Lum. 24*, *Lum. 18* et *Lum. 12*, les tiges ont des entre-nœuds un peu plus longs que dans les conditions naturelles; elles sont dressées et non couchées. Les feuilles ont la dimension, la direction, la teinte et la structure habituelles.

Dans *Lum. 6*, les entre-nœuds sont encore un peu plus longs (moins qu'à l'obscurité) et les feuilles sont légèrement moins vertes.

Notoscordum fragrans. A l'obscurité, feuilles blanches et très longues.

Dans *Lum. 24*, *Lum. 18* et *Lum. 12*, les feuilles sont normales à tous les points de vue. Dans *Lum. 6*, elles sont allongées et assez pâles.

Sempervivum tectorum. Dans toutes les conditions expérimentales, les tiges sont allongées et les feuilles petites, ce qui fait que les plantes, au lieu d'être coniques, sont assez longuement cylindriques. L'étiollement est donc manifeste partout, d'autant plus que la teinte des feuilles est assez pâle.

A l'obscurité, les phénomènes d'étiollement sont le plus marqués; les feuilles, toutes petites, sont blanches.

Dans *Lum. 24*, *Lum. 18* et *Lum. 12*, la structure, la dimension, la direction et la teinte des feuilles sont identiques; il est impossible de distinguer ces plantes.

Dans *Lum. 6*, les entre-nœuds sont plus longs et les feuilles plus petites, mais leur teinte verte est la même que dans les cas précédents.

Ægopodium Podagraria. A l'obscurité, les feuilles ont un long pétiole et un limbe petit qui ne se déplie pas et reste courbé en crochet au sommet du pétiole.

Partout ailleurs, la dimension, la direction, la teinte et la

structure des limbes sont tout à fait normales, sans aucune différence entre la lumière continue et la lumière discontinue.

Lysimachia Nummularia. A l'obscurité, les tiges sont longues; les feuilles, petites et blanches, s'étalent tardivement.

A la lumière continue et discontinue, les résultats sont identiques : les tiges sont normales, mais plutôt dressées que couchées; les feuilles sont semblables aux feuilles habituelles, à la fois pour la dimension, pour la direction, pour la teinte et pour la structure.

Lysimachia Nummularia aurea. Mêmes remarques que pour l'espèce type. La coloration jaune est nulle à l'obscurité. A la lumière continue et discontinue, elle est beaucoup moins marquée qu'à l'état naturel; elle est toutefois bien reconnaissable et égale partout.

Vincâ minor. A l'obscurité, les tiges, très longues, restent courbées en crochet à l'extrémité. Les feuilles, petites et blanches, ne s'étalent pas.

Dans *Lum. 24*, *Lum. 18*, *Lum. 12* et *Lum. 6*, l'aspect est le même : les feuilles sont mal formées, assez petites et légèrement concaves.

Glechoma hederaceum. A l'obscurité, les tiges sont longues; les feuilles, petites et blanches, ont des pétioles courts au sommet desquels elles restent courbées en crochet, sans s'étaler.

Dans *Lum. 24*, *Lum. 18* et *Lum. 12*, les feuilles sont absolument identiques entre elles et semblables aux feuilles normales. Elles sont pourtant un peu plus vertes dans *Lum. 24*.

Dans *Lum. 6*, les feuilles sont plus petites et assez pâles, mais leur structure est normale.

Ajuga reptans. A l'obscurité, tige allongée; feuilles blanches, petites, s'étalant mal.

A la lumière continue et discontinue, tiges dressées; feuilles normales, entre lesquelles il n'y a pas de différence.

Ajuga reptans atropurpurea. Exactement comme pour l'espèce type. La matière colorante rouge fait absolument défaut partout.

Campanula persicifolia. A l'obscurité, les tiges s'allongent. Les feuilles ont un long pétiole et un limbe étroit, blanc.

Dans *Lum. 24*, *Lum. 18* et *Lum. 12*, la tige reste indistincte; les feuilles sont assez petites, mais elles ont la structure normale.

Dans *Lum. 6*, les feuilles ont les mêmes dimensions, mais elles sont un peu pâles.

Concluons.

Nulle part on ne remarque la moindre différence entre les effets de la lumière continue et ceux de la lumière discontinue. Chez aucune espèce, la structure ou la forme des feuilles développées à la lumière constante ne rappellent le moins du monde la structure ou la forme de celles qui sont nées dans l'obscurité.

Les éclairagements de vingt-quatre heures par jour, de dix-huit heures, de douze heures et de six heures agissent en général de même façon sur les organes d'assimilation. L'influence de la lumière sur la forme et la structure, ainsi que sur la production de chlorophylle, dépend donc plutôt de son intensité que de sa durée, contrairement à son action sur le tropisme, où durée et intensité s'additionnent. Pourtant chez *Selaginella*, *Notoscordum*, *Glechoma* et *Campanula*, les feuilles qui ne reçoivent la lumière que pendant six heures par jour sont un peu moins vertes que les autres; chez *Sempervivum*, elles sont plus petites.

Dans la plupart des expériences, la lumière de 400 bougies à un mètre de distance semble tout à fait suffisante; aussi les organes verts sont-ils, en tous points, identiques à ceux de conditions naturelles. Mais la lumière s'est montrée trop faible pour provoquer l'aplatissement des tiges de *Selaginella* et de *Lysimachia* contre le sol; on sait d'ailleurs que dans la nature ces tiges ne sont rampantes qu'au soleil; à l'ombre, elles sont plus ou moins dressées. De même, les *Sempervivum* ne gardent leur tige très courte qu'à une lumière très vive; notre éclairage était manifestement insuffisant. Enfin, la couleur rouge d'*Ajuga* et la couleur jaune de *Lysimachia* n'apparaissent dans

les jardins qu'en plein soleil. Dans nos expériences, ces colorations ont fait défaut complètement chez *Ajuga*, partiellement chez *Lysimachia*.

Il faudra de nouvelles expériences pour expliquer la contradiction entre les résultats des expériences de M. Bonnier, lesquels sont tout à fait probants, et les nôtres, qui ne sont pas moins nets.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — Les équations du champ
de gravitation d'Einstein,

par H. VANDERLINDEN (*)

Assistant à l'Observatoire royal de Belgique.

Les méthodes préconisées jusqu'à présent pour déterminer les dix équations différentielles auxquelles doivent satisfaire les potentiels $g_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$) du champ gravifique d'Einstein exigent des calculs fort laborieux, ou des connaissances spéciales relatives aux théories des invariants et au calcul symbolique.

Dans ce travail, je me propose d'établir ces équations d'une manière très simple, en ne faisant appel qu'aux notions élémentaires du calcul différentiel et des déterminants.

En me basant sur deux identités obtenues récemment par M. DE DONDER, j'obtiens une expression simplifiée de la fonction l d'abord, de sa variation δl ensuite ; de celle-ci, je déduis sans difficulté les équations du champ gravifique.

J'ai remarqué, en outre, que les variables qui donnent le plus de concision aux équations sont $g^{\alpha\beta} \sqrt{-g}$.

Au cours de ces recherches, j'ai reçu les meilleurs encouragements de M. DE DONDER. Qu'il me soit permis de lui adresser mes chaleureux remerciements.

(*) Présenté par M. Lecoinge.

1. L'invariant de courbure totale de RIEMANN par rapport à la forme quadratique de l'espace-temps :

$$\delta s^2 = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} g_{\alpha\beta} dx_{\alpha} dx_{\beta} \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4,$$

peut s'écrire (*)

$$C \equiv \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} g^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta}, \quad (1)$$

ou encore

$$C \equiv \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\sigma} \sum_{\tau} g^{\alpha\beta} \left[\frac{d \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha\sigma \\ \sigma \end{smallmatrix} \right\}}{dx_{\beta}} - \frac{d \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha\beta \\ \sigma \end{smallmatrix} \right\}}{dx_{\sigma}} + \left\{ \begin{smallmatrix} \beta\tau \\ \sigma \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha\sigma \\ \tau \end{smallmatrix} \right\} - \left\{ \begin{smallmatrix} \sigma\tau \\ \sigma \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha\beta \\ \tau \end{smallmatrix} \right\} \right], \quad (2)$$

en posant

$$G_{\alpha\beta} \equiv \sum_{\sigma} \sum_{\tau} \left[\frac{d \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha\sigma \\ \sigma \end{smallmatrix} \right\}}{dx_{\beta}} - \frac{d \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha\beta \\ \sigma \end{smallmatrix} \right\}}{dx_{\sigma}} + \left\{ \begin{smallmatrix} \beta\tau \\ \sigma \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha\sigma \\ \tau \end{smallmatrix} \right\} - \left\{ \begin{smallmatrix} \sigma\tau \\ \sigma \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha\beta \\ \tau \end{smallmatrix} \right\} \right]. \quad (3)$$

Posons ensuite, avec M. De Donder,

$$l \equiv k(-g)^{\frac{1}{2}} C, \quad (4)$$

où g représente le déterminant symétrique des $g_{\alpha\beta}$ et où k est une constante universelle indépendante des coordonnées x, y, z, t ; enfin, $g^{\alpha\beta}$ représente le mineur algébrique de $g_{\alpha\beta}$, divisé par g . Le symbole $\left\{ \begin{smallmatrix} i & k \\ l \end{smallmatrix} \right\}$ représente l'accolade à trois indices de Christoffel.

Remplaçons C (2) par sa valeur dans (4) et intégrons par parties ; nous obtenons

$$l = \frac{1}{2} k \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\sigma} \sum_{\tau} \left[\frac{d}{dx_{\beta}} \left((-g)^{\frac{1}{2}} g^{\alpha\beta} \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha\sigma \\ \sigma \end{smallmatrix} \right\} \right) - \frac{d}{dx_{\sigma}} \left((-g)^{\frac{1}{2}} g^{\alpha\beta} \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha\beta \\ \sigma \end{smallmatrix} \right\} \right) \right] + l^{**}, \quad (5)$$

(*) TH. DE DONDER, *Zittingsverslag. konk. Akademie v. Wetenschappen*. Amsterdam, deel XXVII, 29 Juni 1918, et *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des sciences), 1919, p. 471.

où nous avons posé

$$l^{**} \equiv \frac{1}{2} k \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\sigma} \sum_{\tau} \left[- \left\{ \frac{\alpha\sigma}{\sigma} \right\} \frac{d}{dx_{\beta}} [(-g)^{\frac{1}{2}} g^{\alpha\beta}] + \left\{ \frac{\alpha\beta}{\sigma} \right\} \frac{d}{dx_{\sigma}} [(-g)^{\frac{1}{2}} g^{\alpha\beta}] \right] \\ + (-g)^{\frac{1}{2}} g^{\alpha\beta} \left\{ \frac{\beta\tau}{\sigma} \right\} \left\{ \frac{\alpha\sigma}{\tau} \right\} - (-g)^{\frac{1}{2}} g^{\alpha\beta} \left\{ \frac{\tau\sigma}{\sigma} \right\} \left\{ \frac{\alpha\beta}{\tau} \right\} \right]. \quad (6)$$

Les deux premiers termes qui figurent dans l'expression de l^{**} peuvent se transformer très simplement en utilisant les deux identités suivantes (*) :

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \cdot \frac{\partial(\sqrt{-g} \cdot g^{i\lambda})}{\partial x_{\lambda}} \equiv \sum_{\mu} \left(g^{i\lambda} \left\{ \frac{\mu\lambda}{\mu} \right\} - g^{i\mu} \left\{ \frac{\mu\lambda}{k} \right\} - g^{k\mu} \left\{ \frac{\mu\lambda}{i} \right\} \right), \quad (7)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_k \frac{\partial(\sqrt{-g} \cdot g^{ik})}{\partial x_k} \equiv - \sum_{\mu} \sum_k g^{\mu k} \left\{ \frac{\mu k}{i} \right\}. \quad (8)$$

Remarquons, en passant, que la première identité (7) devient la seconde (8), quand on fait $\lambda \equiv k$ et en sommant par rapport à k .

Le premier terme du crochet devient en effet, par (8) et en permutant les indices α et τ ,

$$- \sum_{\alpha} \left\{ \frac{\alpha\sigma}{\sigma} \right\} \sum_{\beta} \frac{d}{dx_{\beta}} [(-g)^{\frac{1}{2}} g^{\alpha\beta}] = (-g)^{\frac{1}{2}} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\tau} g^{\alpha\beta} \left\{ \frac{\tau\sigma}{\sigma} \right\} \left\{ \frac{\alpha\beta}{\tau} \right\}. \quad (9)$$

Le deuxième terme du crochet devient, par (7),

$$\sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\sigma} \left\{ \frac{\alpha\beta}{\sigma} \right\} \frac{d}{dx_{\sigma}} [(-g)^{\frac{1}{2}} g^{\alpha\beta}] \\ = (-g)^{\frac{1}{2}} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\sigma} \left\{ \frac{\alpha\beta}{\sigma} \right\} \sum_{\tau} \left(g^{\alpha\beta} \left\{ \frac{\tau\sigma}{\tau} \right\} - g^{\alpha\tau} \left\{ \frac{\tau\sigma}{\beta} \right\} - g^{\tau\beta} \left\{ \frac{\tau\sigma}{\alpha} \right\} \right).$$

(*) TH. DE DONDER, *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* (Classe des sciences), 1919, p. 473. — Remarquons que ces formules ont été obtenues par des calculs tout à fait élémentaires.

En permutant les indices τ et σ , ensuite σ et β dans le dernier terme et en groupant les deux derniers termes, nous obtenons

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\tau} \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \sigma \end{matrix} \right\} \frac{d}{dx_{\sigma}} [(-g)^{\frac{1}{2}} g^{\alpha\beta}] \\ & = (-g)^{\frac{1}{2}} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\tau} \sum_{\sigma} \left(g^{\alpha\beta} \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \tau \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \sigma\tau \\ \sigma \end{matrix} \right\} - 2g^{\alpha\beta} \left\{ \begin{matrix} \beta\tau \\ \sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha\sigma \\ \tau \end{matrix} \right\} \right). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

En introduisant (9) et (10) dans la valeur (6) de l^{**} , on remarque que les termes de la première ligne valent respectivement deux fois les termes de la deuxième ligne changés de signe. En réduisant les termes semblables, l^{**} prend la forme simplifiée

$$l^{**} = \frac{1}{2} k (-g)^{\frac{1}{2}} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\tau} \sum_{\sigma} g^{\alpha\beta} \left(\left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \tau \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \sigma\tau \\ \sigma \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \beta\tau \\ \sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha\sigma \\ \tau \end{matrix} \right\} \right). \quad (11)$$

2. Pour trouver les équations différentielles du champ gravifique, nous allons appliquer le principe de HAMILTON étendu à l'espace-temps. Cela revient à admettre que pour toute portion de l'espace-temps, on a

$$\delta \iiint \iiint (l + L + \lambda (-g)^{\frac{1}{2}}) dx dy dz dt = 0. \quad (12)$$

Dans cette relation, $l \equiv k (-g)^{\frac{1}{2}} C$, L est une fonction des potentiels gravifiques et de leurs dérivées, qui représente la différence entre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique des champs gravifique et électromagnétique considérés, et λ est une fonction de x, y, z, t .

La variation de la relation (12) est prise *seulement* par rapport aux g^{ik} et leurs dérivées à l'intérieur de la portion de l'espace-temps considérée.

Considérons successivement la variation de chacun des termes de la relation (12). En se reportant à la valeur de l (5), on remarque que l se compose de deux parties, dont la première

est la différence de deux différentielles exactes. L'intégrale quadruple étendue à ces deux termes se réduit donc à une intégrale triple de surface à trois dimensions; par hypothèse les variations δg^{ik} sont nulles sur cette frontière de la portion de l'espace-temps considérée. En tenant compte de la relation (11), on peut écrire

$$\delta l = \delta l^{**} = \frac{1}{2} k \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\sigma} \sum_{\tau} \delta \left[(-g)^{\frac{1}{2}} g^{\alpha\beta} \left(\left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \tau \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \sigma\tau \\ \sigma \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \beta\tau \\ \sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha\sigma \\ \tau \end{matrix} \right\} \right) \right].$$

Développons le second membre et nous aurons

$$\delta l^{**} = \frac{1}{2} k \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\sigma} \sum_{\tau} \left[\begin{aligned} & \left\{ \begin{matrix} \sigma\tau \\ \sigma \end{matrix} \right\} \cdot \delta \left(\sqrt{-g} \cdot g^{\alpha\beta} \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \tau \end{matrix} \right\} \right) \\ & + \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \tau \end{matrix} \right\} \cdot \delta \left(\sqrt{-g} \cdot g^{\alpha\beta} \left\{ \begin{matrix} \sigma\tau \\ \sigma \end{matrix} \right\} \right) \\ & - \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \tau \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \sigma\tau \\ \sigma \end{matrix} \right\} \cdot \delta \left(\sqrt{-g} \cdot g^{\alpha\beta} \right) \\ & - \left\{ \begin{matrix} \alpha\sigma \\ \tau \end{matrix} \right\} \cdot \delta \left(\sqrt{-g} \cdot g^{\alpha\beta} \left\{ \begin{matrix} \beta\tau \\ \sigma \end{matrix} \right\} \right) \\ & - \left\{ \begin{matrix} \beta\tau \\ \sigma \end{matrix} \right\} \cdot \delta \left(\sqrt{-g} \cdot g^{\alpha\beta} \left\{ \begin{matrix} \alpha\sigma \\ \tau \end{matrix} \right\} \right) \\ & + \left\{ \begin{matrix} \alpha\sigma \\ \tau \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \beta\tau \\ \sigma \end{matrix} \right\} \cdot \delta \left(\sqrt{-g} \cdot g^{\alpha\beta} \right) \end{aligned} \right]. \quad (13)$$

Le premier terme du crochet de (13) peut se transformer à l'aide de l'identité (8); on a

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma} \sum_{\tau} \left\{ \begin{matrix} \sigma\tau \\ \sigma \end{matrix} \right\} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \delta \left(\sqrt{-g} \cdot g^{\alpha\beta} \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \tau \end{matrix} \right\} \right) &= - \sum_{\sigma} \sum_{\tau} \left\{ \begin{matrix} \sigma\tau \\ \sigma \end{matrix} \right\} \sum_{\beta} \delta \frac{\partial (\sqrt{-g} \cdot g^{\tau\beta})}{\partial x_{\beta}} \\ &= - \sum_{\sigma} \sum_{\tau} \left\{ \begin{matrix} \sigma\tau \\ \sigma \end{matrix} \right\} \sum_{\beta} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \delta (\sqrt{-g} \cdot g^{\tau\beta}), \end{aligned}$$

où, en changeant τ et α , le premier terme s'écrit

$$- \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\sigma} \left\{ \begin{matrix} \sigma\alpha \\ \sigma \end{matrix} \right\} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \delta (\sqrt{-g} \cdot g^{\alpha\beta}) \quad (a)$$

Dans le quatrième terme du crochet (13), permutons σ et τ ; dans le cinquième, successivement α et β , α et τ ; en combinant ces deux termes, il vient

$$- \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\sigma} \sum_{\tau} \left\{ \begin{matrix} \alpha\tau \\ \sigma \end{matrix} \right\} \delta \left(\sqrt{-g} \cdot g^{\alpha\beta} \left\{ \begin{matrix} \beta\sigma \\ \tau \end{matrix} \right\} + \sqrt{-g} \cdot g^{\tau\beta} \left\{ \begin{matrix} \beta\sigma \\ \alpha \end{matrix} \right\} \right).$$

En permutant dans cette expression les indices τ et σ , σ et β , elle devient

$$- \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\sigma} \sum_{\tau} \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \tau \end{matrix} \right\} \delta \left(\sqrt{-g} \cdot g^{\alpha\tau} \left\{ \begin{matrix} \sigma\tau \\ \beta \end{matrix} \right\} + \sqrt{-g} \cdot g^{\beta\tau} \left\{ \begin{matrix} \sigma\tau \\ \alpha \end{matrix} \right\} \right).$$

Ajoutons à ces deux termes le deuxième terme du crochet (13), et nous obtenons pour la somme des 2^e, 4^e et 5^e termes l'expression

$$\sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\tau} \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \tau \end{matrix} \right\} \sum_{\sigma} \delta \left(\sqrt{-g} \cdot g^{\alpha\beta} \left\{ \begin{matrix} \sigma\tau \\ \sigma \end{matrix} \right\} - \sqrt{-g} \cdot g^{\alpha\tau} \left\{ \begin{matrix} \sigma\tau \\ \beta \end{matrix} \right\} - \sqrt{-g} \cdot g^{\beta\tau} \left\{ \begin{matrix} \sigma\tau \\ \alpha \end{matrix} \right\} \right)$$

Grâce à l'identité (7), cette somme peut s'écrire

$$\sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\tau} \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \tau \end{matrix} \right\} \delta \frac{\partial (\sqrt{-g} \cdot g^{\alpha\beta})}{\partial x_{\tau}} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\tau} \frac{\partial}{\partial x_{\tau}} \delta (\sqrt{-g} \cdot g^{\alpha\beta}) \quad (b)$$

Introduisons les termes ainsi modifiés (a) et (b) dans l'expression (13), et nous aurons

$$\delta l^{**} = \frac{1}{2} k \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\sigma} \sum_{\tau} \left[\begin{aligned} & - \left\{ \begin{matrix} \sigma\alpha \\ \sigma \end{matrix} \right\} \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \delta (\sqrt{-g} \cdot g^{\alpha\beta}) \\ & + \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \tau \end{matrix} \right\} \frac{\partial}{\partial x_{\tau}} \delta (\sqrt{-g} \cdot g^{\alpha\beta}) \\ & - \left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ \tau \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \sigma\tau \\ \sigma \end{matrix} \right\} \delta (\sqrt{-g} \cdot g^{\alpha\beta}) \\ & + \left\{ \begin{matrix} \alpha\sigma \\ \tau \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \beta\tau \\ \sigma \end{matrix} \right\} \delta (\sqrt{-g} \cdot g^{\alpha\beta}) \end{aligned} \right].$$

Intégrons dans cette expression les deux premiers termes par parties ; d'où

$$\delta l^{**} = \frac{1}{2} k \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\sigma} \sum_{\tau} \left[\begin{aligned} & - \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left[\left\{ \begin{matrix} \sigma \alpha \\ \sigma \end{matrix} \right\} \delta(\sqrt{-g} \cdot g^{\alpha\beta}) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial x_{\tau}} \left[\left\{ \begin{matrix} \alpha \beta \\ \tau \end{matrix} \right\} \delta(\sqrt{-g} \cdot g^{\alpha\beta}) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial x_{\beta}} \left\{ \begin{matrix} \sigma \alpha \\ \sigma \end{matrix} \right\} \delta(\sqrt{-g} \cdot g^{\alpha\beta}) \\ & - \frac{\partial}{\partial x_{\tau}} \left\{ \begin{matrix} \alpha \beta \\ \tau \end{matrix} \right\} \delta(\sqrt{-g} \cdot g^{\alpha\beta}) \\ & + \left\{ \begin{matrix} \alpha \sigma \\ \tau \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \beta \tau \\ \sigma \end{matrix} \right\} \delta(\sqrt{-g} \cdot g^{\alpha\beta}) \\ & - \left\{ \begin{matrix} \alpha \beta \\ \tau \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \sigma \tau \\ \sigma \end{matrix} \right\} \delta(\sqrt{-g} \cdot g^{\alpha\beta}) \end{aligned} \right].$$

Or, en intégrant δl^{**} , l'intégrale quadruple relative aux deux premiers termes se réduira encore à une intégrale triple ; sur cette frontière, les δg^{ik} sont nuls. D'où l'expression de δl^{**} peut s'écrire

$$\delta l^{**} = \frac{1}{2} k \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\sigma} \sum_{\tau} \left[\begin{aligned} & \frac{\partial \left\{ \begin{matrix} \alpha \sigma \\ \sigma \end{matrix} \right\}}{\partial x_{\beta}} - \frac{\partial \left\{ \begin{matrix} \alpha \beta \\ \sigma \end{matrix} \right\}}{\partial x_{\tau}} \\ & + \left\{ \begin{matrix} \alpha \sigma \\ \tau \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \beta \tau \\ \sigma \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \alpha \beta \\ \tau \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \sigma \tau \\ \sigma \end{matrix} \right\} \end{aligned} \right] \delta(\sqrt{-g} \cdot g^{\alpha\beta}).$$

ou finalement, en vertu de (3),

$$\boxed{\delta l = \delta l^{**} = \frac{1}{2} k \sum_{\alpha} \sum_{\beta} G_{\alpha\beta} \delta(\sqrt{-g} \cdot g^{\alpha\beta})}. \quad (14)$$

Effectuons la variation dans l'expression précédente par rapport aux g^{ab} ; nous aurons

$$\delta(\sqrt{-g} \cdot g^{\alpha\beta}) = \frac{\Sigma}{ab} \frac{d\sqrt{-g}}{dg^{ab}} \cdot g^{\alpha\beta} \delta g^{ab} + \sqrt{-g} \delta g^{\alpha\beta} \quad (a, b = 1, 2, 3, 4).$$

Le symbole $\frac{\Sigma}{ab}$ indique une sommation étendue aux dix combinaisons avec répétition de 1, 2, 3, 4 pris deux à deux. En développant le second membre, il vient

$$\delta(\sqrt{-g} \cdot g^{\alpha\beta}) = \frac{\Sigma}{ab} \left(-1 + \frac{\varepsilon_{ab}}{2} \right) (-g)^{\frac{1}{2}} g_{ab} g^{\alpha\beta} \delta g^{ab} + (-g)^{\frac{1}{2}} \delta g^{\alpha\beta},$$

en posant $\varepsilon_{aa} = 1$, $\varepsilon_{ab} = 0$, quand a est différent de b .

L'expression de δl^{**} devient ainsi

$$\delta l^{**} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left[\frac{\Sigma}{ab} \left(-1 + \frac{\varepsilon_{ab}}{2} \right) \frac{k}{2} (-g)^{\frac{1}{2}} G_{\alpha\beta} g_{ab} \delta g^{ab} + \frac{k}{2} (-g)^{\frac{1}{2}} G_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta} \right],$$

ou, en vertu de l'expression (1)

$$\delta l^{**} = \frac{\Sigma}{ab} \left(-1 + \frac{\varepsilon_{ab}}{2} \right) k (-g)^{\frac{1}{2}} C g_{ab} \delta g^{ab} + \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \frac{k}{2} (-g)^{\frac{1}{2}} G_{\alpha\beta} \delta g^{\alpha\beta}.$$

D'où, finalement

$$\delta l^{**} = \frac{\Sigma}{\alpha\beta} \left[- \left(1 - \frac{\varepsilon_{\alpha\beta}}{2} \right) [k (-g)^{\frac{1}{2}} C g_{\alpha\beta} - k (-g)^{\frac{1}{2}} G_{\alpha\beta}] \right] \delta g^{\alpha\beta}.$$

Grâce au principe de HAMILTON (12), les équations du champ gravifique peuvent s'écrire, en introduisant le symbole $\Diamond^{\alpha\beta}$ de M. DE DONDER (*)

$$\left(1 - \frac{\varepsilon_{\alpha\beta}}{2} \right) [k (-g)^{\frac{1}{2}} G_{\alpha\beta} - k (-g)^{\frac{1}{2}} C g_{\alpha\beta}] = - \Diamond^{\alpha\beta} L - \lambda \frac{d(-g)^{\frac{1}{2}}}{dg^{\alpha\beta}}. \quad (15)$$

(*) TH. DE DONDER, *Théorie du champ électromagnétique de Maxwell-Lorentz et du champ gravifique d'Einstein* (p. IV). Paris, 1920 (Gauthier-Villars).

Posons, avec M. DE DONDER (*)

$$-(1 + \varepsilon_{\alpha\beta}) \diamond^{\alpha\beta} L \equiv \mathfrak{C}_{\alpha\beta} \equiv \mathfrak{C}_{\beta\alpha},$$

où les seize fonctions $\mathfrak{C}_{\alpha\beta}$ forment *le tenseur symétrique* des champs gravifique et électromagnétique considérés.

De plus,

$$-\frac{d(-g)^{\frac{1}{2}}}{dg^{\alpha\beta}} = \left(1 - \frac{\varepsilon_{\alpha\beta}}{2}\right) (-g)^{\frac{1}{2}} g_{\alpha\beta}.$$

Les équations (15) du champ gravifique deviennent donc

$$k(-g)^{\frac{1}{2}} G_{\alpha\beta} - l^* g_{\alpha\beta} = \mathfrak{C}_{\alpha\beta}.$$

en posant

$$l^* \equiv l + \lambda \sqrt{-g}.$$

Ce sont précisément les équations obtenues par M. DE DONDER (*).

3. REMARQUE. L'expression (14) montre qu'il sera *avantageux* de choisir comme variables les quantités

$$\gamma^{\alpha\beta} \equiv (-g)^{\frac{1}{2}} \cdot g^{\alpha\beta}.$$

Dans ce cas, les équations de la gravifique peuvent s'écrire

$$\left(1 - \frac{\varepsilon_{\alpha\beta}}{2}\right) k G_{\alpha\beta} = - \diamond^{\alpha\beta} (L + \lambda (-g)^{\frac{1}{2}}),$$

où le symbole $\diamond^{\alpha\beta}$ sert à rappeler que le lagrangien a été pris par rapport aux variables $\gamma^{\alpha\beta}$.

Posons encore

$$-(1 + \varepsilon_{\alpha\beta}) \diamond^{\alpha\beta} L \equiv \mathfrak{S}_{\alpha\beta} \equiv \mathfrak{S}_{\beta\alpha}.$$

(*) TH. DE DONDER, *Théorie du champ électromagnétique de Maxwell-Lorentz et du champ gravifique d'Einstein* (p. IV). Paris, 1920 (Gauthier-Villars).

Nous obtenons (14) ainsi les équations du champ de gravitation d'Einstein sous la forme simple, *dans le cas où λ serait nul* :

$$kG_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}.$$

**La mensuration de la fatigue intellectuelle des écoliers
au moyen d'une échelle visuelle permettant d'opérer
simultanément sur tous les élèves d'une classe ⁽¹⁾,**

par L. REMY,

Inspecteur principal d'hygiène au Ministère de l'Intérieur.

PRÉFACE.

La fatigue et la capacité intellectuelles ont entre elles des connexions tellement intimes que la détermination de l'une peut, en quelque sorte, servir pour apprécier indirectement la puissance de l'autre.

Au cours des travaux que nous avons effectués pour établir « les bases scientifiques de la pédagogie et de la méthodologie », nous avons constaté combien il était urgent de rechercher des moyens plus perfectionnés que ceux dont on dispose pour les évaluer. Leur mensuration possède en effet une importance considérable relativement à la solution de certaines questions (sélection intellectuelle, orientation professionnelle, combinaison des horaires et des programmes, etc.) rentrant dans le domaine de la pédagogie expérimentale.

Le mémoire que nous avons l'honneur de présenter à l'Académie est un résumé des recherches que nous avons entreprises, au moyen d'un procédé que nous avons imaginé, pour mesurer la fatigue intellectuelle des écoliers.

(1) Imprimé sur rapports de MM. Fredericq et Willem dans le *Bulletin* de décembre 1919, p. 846 B.

**Considérations relatives aux troubles occasionnés
par la fatigue intellectuelle et aux moyens de la
mesurer.**

La fatigue intellectuelle peut se manifester dans les actes au moyen desquels les centres psychiques extériorisent leur contenu et par les perturbations qu'elle occasionne dans l'accomplissement des fonctions physiologiques. Les troubles qu'elle entraîne chez l'écolier sont donc pédagogiques ou physiologiques.

Les troubles pédagogiques se révèlent par des symptômes apparents d'excitation ou de dépression et par des signes extérieurement invisibles qui se traduisent dans l'exécution des exercices scolaires. Les uns comme les autres sont des manifestations de l'apparition du réflexe intellectuel supérieur, — l'inattention ⁽¹⁾, — qui, en permettant aux centres de mémoire et de pensée de se reposer, laisse l'enfant sous la domination de ses centres psychiques inférieurs.

Les troubles physiologiques atteignent les fonctions de la vie animale : circulation, respiration, température et les fonctions de relation : sensibilité tactile, musculaire, etc.

Pour évaluer la fatigue intellectuelle, il suffisait donc de déterminer l'intensité des troubles qu'elle engendre dans l'exécution des exercices pédagogiques et des fonctions physiologiques; aussi, a-t-on imaginé, pour la mesurer, un grand nombre de procédés : les uns pédagogiques, les autres physiologiques.

Parmi les procédés pédagogiques, on peut citer : la dictée, le calcul, la réfection des textes, la copie de certaines lettres d'un texte, la reproduction de lettres, de mots, de chiffres, après des exercices visuels ou auditifs. On a reproché aux procédés pédagogiques que d'autres facteurs : la bonne volonté et l'effort de

⁽¹⁾ Voir *Les fonctions de la vie végétative, de la vie animale et de la vie psychique chez les êtres vivants.*

l'enfant, agissant en même temps que la fatigue, pouvaient en influencer la mensuration. Cette objection serait admissible si l'absence de bonne volonté et d'effort n'était déjà pas un indice de dépression attribuable à la fatigue intellectuelle. On a également invoqué l'action prépondérante du maître sur l'accomplissement des exercices scolaires; mais sa capacité ou son insuffisance pédagogiques ne permettent pas de juger la valeur intrinsèque du procédé d'investigation qu'il a employé. Sans prétendre que les méthodes pédagogiques de mensuration de la fatigue ou de la capacité intellectuelles puissent entraîner la confiance absolue dans les résultats qu'elles fournissent, nous croyons que lorsqu'elles sont bien conduites et suffisamment nombreuses, elles donnent des présomptions sérieuses.

Comme procédés physiologiques, la circulation, la température et la respiration, présentant des modifications attribuables à des causes autres que la fatigue intellectuelle, n'ont pas été utilisées. La sensibilité à la douleur a procuré des résultats inconstants. La sensibilité musculaire et surtout la sensibilité tactile ont été appliquées avec quelque succès.

La sensibilité musculaire, peu employée encore, se mesure au moyen du dynamomètre et de l'ergographe.

La sensibilité tactile (sens du lieu) a surtout été étudiée en Allemagne par Weber, Eulenburg, Bernstein et Griesbach, qui en 1895 l'appliqua à la mensuration de la fatigue intellectuelle. Pour l'évaluer, on se sert d'un compas spécial (esthésiomètre). Lorsque les centres intellectuels sont reposés, les deux pointes de l'esthésiomètre, appliquées sur la pulpe des doigts de l'enfant, donnent deux sensations distinctes, quand elles sont séparées par une distance minimum de 2 à 4 millimètres. Quand la fatigue intellectuelle existe, on n'obtient deux sensations distinctes que si l'écart entre les deux pointes atteint 6-8-9... millimètres. La fatigue intellectuelle est, alors, en raison directe de la grandeur de l'espace compris entre les deux pointes. Ce procédé présente deux inconvénients sérieux, qui proviennent du fait que l'on ne

peut examiner qu'un enfant à la fois : D'abord les causes qui provoquent la fatigue intellectuelle n'impressionnent pas tous les sujets pendant le même laps de temps. Ensuite, l'excitation devant être renouvelée, pour la mensuration de chaque élève, il serait téméraire d'affirmer qu'elle ait agi avec la même intensité sur tous les écoliers. Il en résulte évidemment que les données qu'il fournit ne permettent pas de comparer les enfants entre eux.

Les acquisitions scientifiques modernes nous ont procuré le moyen d'imaginer un procédé permettant d'éviter ce double écueil.

Les études embryologiques ont montré que les cellules sensibles, quel que soit l'organe sensoriel auquel elles appartiennent, sont bipolaires et dérivent du même feuillet embryonnaire : l'ectoderme. Puisque la mensuration de la sensibilité tactile a été utilisée pour mesurer la fatigue intellectuelle, il était tout indiqué de rechercher si la détermination de l'acuité visuelle ne pouvait pas être utilisée dans le même but.

Échelle optométrique permettant de mesurer la fatigue intellectuelle. Principes qui ont servi de base à sa combinaison.

Avec les échelles visuelles actuellement en faveur, on ne peut examiner qu'un seul enfant à la fois. En outre, elles ne fournissent pas le moyen de déterminer quantitativement la sensibilité visuelle. Elles ne convenaient donc pas pour l'étude systématique de la fatigue intellectuelle que nous voulions entreprendre.

L'échelle optométrique que nous avons imaginée à cette fin est combinée conformément au principe qui a servi de base à l'établissement des différentes échelles visuelles, à savoir qu'un œil peut être considéré comme normal quand il distingue, à 5 mètres de distance, des caractères ayant 7 millimètres de hauteur. Nous avons également tenu compte des lois admises en

optique physiologique, relativement à la grandeur des images rétiniennes. On sait qu'elle est en raison directe de la grandeur de l'objet et en raison inverse de la distance qui le sépare de l'œil. Il résulte évidemment de ce qui précède qu'un œil normal qui voit à 5 mètres des caractères de 7 millimètres distinguera à 1 mètre des caractères ayant $\frac{7}{5}$, soit 1.4 millimètre.

Un œil normal doit donc lire :

A 2 mètres	des caractères	ayant	$1.4 \times 2 =$	2mm8
A 3	id.	id.	$1.4 \times 3 =$	4mm2
A 4	id.	id.	$1.4 \times 4 =$	5mm6
A 5	id.	id.	$1.4 \times 5 =$	7mm0
A 6	id.	id.	$1.4 \times 6 =$	8mm4
A 7	id.	id.	$1.4 \times 7 =$	9mm8
A 8	id.	id.	$1.4 \times 8 =$	11mm2
A 9	id.	id.	$1.4 \times 9 =$	12mm6
A 10	id.	id.	$1.4 \times 10 =$	14mm0
A 11	id.	id.	$1.4 \times 11 =$	15mm4

Reposant sur les principes précédents, notre échelle est constituée de 11 lignes de caractères imprimés ayant respectivement 2.8, 4.2, 5.6, 7, 8.4, 9.8, 11.2, 12.6, 14 et 15.4 millimètres de hauteur et de largeur.

Les nombres 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, sont inscrits au commencement de chaque ligne; ils indiquent, en mètres, la distance à laquelle un œil normal doit lire.

En vue d'empêcher les écoliers de copier machinalement les lettres du texte, et de faciliter le travail de correction du maître, les lettres ne se suivent pas régulièrement, mais une lettre a été omise entre elles, dans chaque ligne. A B C D E F, etc. En outre la lettre Q, que l'on confondait trop facilement avec la lettre O, a été remplacée par la lettre L.

Le local dans lequel nous avons opéré, figure 1, page 7, mesure 8 mètres de longueur, 6^m50 de largeur et 5 mètres de hauteur. Il est éclairé par 3 larges fenêtres, F. Deux portes P y donnent accès.

Les bancs sont disposés sur 3 files perpendiculaires à la planche noire, A, B, C, fig. 1. Dans chacune des files ils se trouvent respectivement à 2, 3, 4, 5, 6 et 7 mètres du tableau. Ces distances sont inscrites sur la tablette des pupitres.

Détermination de l'acuité visuelle.

Pour déterminer l'acuité visuelle, les élèves s'installent sur les pupitres; ils inscrivent sur une feuille de papier leur nom, l'année d'études, la date et, en évidence, le chiffre placé sur leur pupitre. Ils copient ensuite l'échelle visuelle E 1, E 2, E 3, appendue à la planche noire en face de la file à laquelle ils appartiennent, en ayant soin de transcrire chaque fois, dans la marge, le chiffre figurant au commencement de la ligne qu'ils reproduisent.

L'acuité visuelle est représentée par la formule $AV = \frac{D}{d}$, dans laquelle D indique la distance qui sépare le sujet de l'échelle E 1, E 2 ou E 3; l'écolier l'a placée en évidence sur sa feuille, elle est écrite sur la tablette de son banc, fig. 1; d est la distance à laquelle un œil normal aurait reconnu les caractères que le sujet en observation a distingués à la distance D; elle se trouve au commencement de chacune des lignes de l'échelle, et les élèves l'ont transcrite en copiant celle-ci. Les feuilles que les écoliers remettent quand ils ont terminé leur travail permettent donc de déterminer l'acuité visuelle. Ainsi un élève placé au 4^e banc a inscrit en évidence 4, c'est-à-dire D. S'il a copié la ligne 4, le chiffre 4 qu'il a transcrit au commencement de la ligne 4 donne d . En remplaçant, dans la formule $AV = \frac{D}{d}$, D et d par leur valeur on obtient $AV = \frac{4}{4}$. L'acuité visuelle est égale à l'unité, elle est normale.

Si l'écolier a pu distinguer la ligne 2, son acuité visuelle devient $\frac{4}{2}$. Si, au contraire, il n'a pu voir que la ligne 6, son acuité visuelle sera $\frac{4}{6}$.

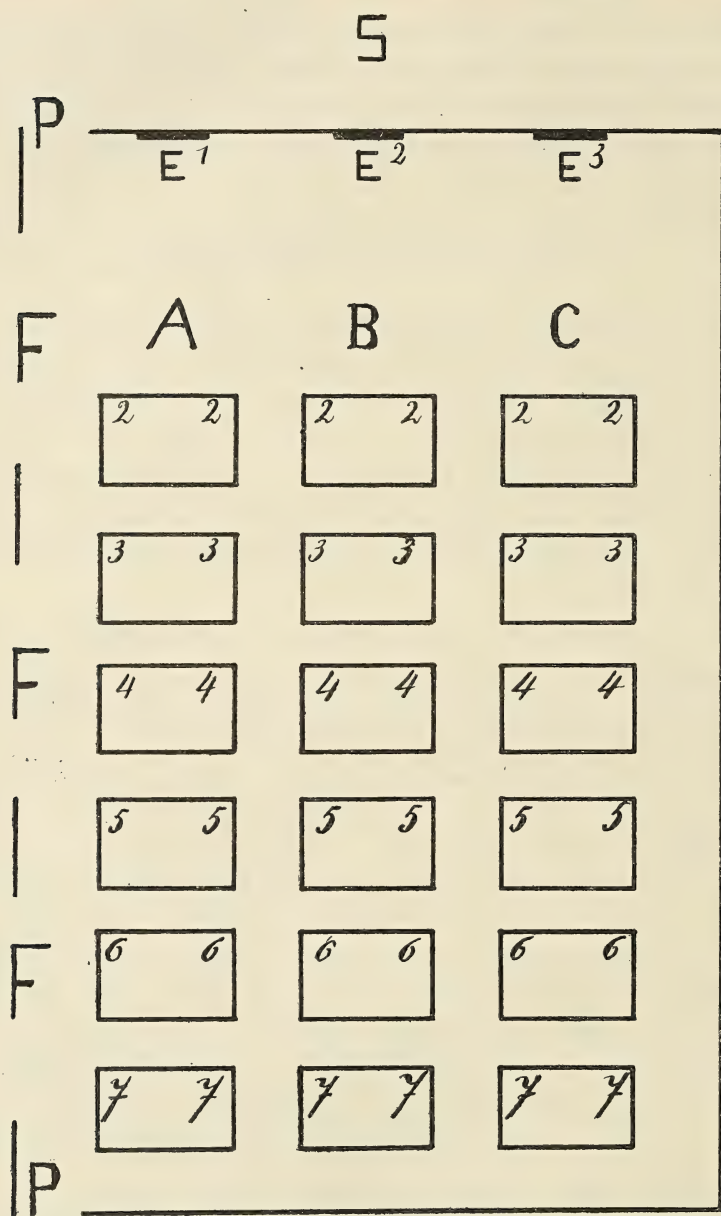


fig: 1

Afin d'éviter les erreurs résultant du coup d'œil indiscret que les écoliers sont tentés de jeter chez leur voisin, une toile tendue du premier au septième banc, dans chacune des files, sépare les élèves les uns des autres.

En opérant de cette façon avec 930 écoliers d'Etterbeek, nous avons trouvé 121 insuffisants visuels, soit une proportion de 13 %.

Cette échelle optométrique nous a permis de résoudre, par la voie expérimentale, les questions suivantes :

1° Influence des insuffisances visuelles sur le développement intellectuel des écoliers ;

2° Influence de la fatigue intellectuelle sur la sensibilité visuelle ;

3° La mensuration de la fatigue intellectuelle au moyen de la mensuration de la sensibilité visuelle ;

4° Le siège de la fatigue intellectuelle ainsi constatée ;

5° L'évolution des yeux chez les enfants à l'école.

1° INFLUENCE DES INSUFFISANCES VISUELLES SUR LE DÉVELOPPEMENT INTELLECTUEL DES ÉCOLIERS.

Pour établir l'influence des insuffisances visuelles sur le développement des facultés intellectuelles de l'enfant, il suffit de comparer les résultats obtenus aux compositions de fin d'année avec ceux que fournit la détermination de l'acuité visuelle. Parmi les 342 écoliers qui ont pris part aux concours et aux expériences, on comptait 40 insuffisants visuels ; 12 de ceux-ci, soit environ le tiers, se trouvent dans la première moitié ; 28, soit les deux tiers, se classent parmi les 171 derniers.

Les insuffisances visuelles sont donc défavorables au développement des facultés intellectuelles chez l'enfant.

2° INFLUENCE DE LA FATIGUE INTELLECTUELLE
SUR LA SENSIBILITÉ VISUELLE.

Le fait d'avoir constaté que les insuffisances visuelles exercent une influence nuisible sur l'évolution des facultés intellectuelles de l'enfant nous incitait déjà à soupçonner que la fatigue intellectuelle devait imprimer des modifications appréciables à la sensibilité visuelle.

L'expérience suivante nous a permis d'établir le bien fondé de cette opinion.

Nous avons déterminé l'acuité visuelle à $8\frac{1}{2}$ heures, à $11\frac{1}{2}$ heures, à $13\frac{1}{2}$ heures et à $15\frac{1}{2}$ heures, chez les 28 écoliers d'une cinquième année d'études. Nous avons obtenu les résultats suivants :

A $11\frac{1}{2}$ heures, l'acuité visuelle est restée la même qu'à $8\frac{1}{2}$ heures chez 7 enfants; elle a augmenté chez 14 et diminué chez 7.

A $13\frac{1}{2}$ heures, comparée à celle de $11\frac{1}{2}$ heures, elle n'a pas varié chez 12 écoliers; elle lui est inférieure chez 6 et supérieure chez 10.

Enfin, à $15\frac{1}{2}$ heures, la vision est identique à celle de $13\frac{1}{2}$ heures chez 9 écoliers; elle est moindre chez 13 et plus élevée chez 6.

C'est donc à $13\frac{1}{2}$ heures, c'est-à-dire à la rentrée de l'après-midi, que l'acuité visuelle est la meilleure; elle a quelque peu fléchi à $15\frac{1}{2}$ heures.

Si l'on compare entre eux les résultats fournis par chacun des élèves à $8\frac{1}{2}$, à $11\frac{1}{2}$, à $13\frac{1}{2}$ et à $15\frac{1}{2}$ heures, on remarque chez certains d'entre eux que l'acuité visuelle diminue avec la durée du séjour à l'école; chez d'autres, elle reste stationnaire; chez d'autres encore elle augmente; chez d'autres enfin elle subit des oscillations à la fin des deux demi-journées de classe.

La conclusion qui se dégage de cette expérience, c'est qu'il existe des rapports entre la fatigue intellectuelle et la puissance visuelle des écoliers.

3° MENSURATION DE LA FATIGUE INTELLECTUELLE AU MOYEN DE LA MENSURATION DE LA SENSIBILITÉ VISUELLE.

Afin de pouvoir gagner du temps, tout en graduant la fatigue intellectuelle, nous avons remplacé les exercices scolaires par des exercices visuels.

Le 2 avril, à 9 heures du matin, nous prenons l'acuité visuelle des élèves d'une cinquième année d'études (10-11 ans), à quatre distances (3, 4, 5 et 6 mètres).

Les enfants, après avoir donné leur acuité visuelle à une distance, changent trois fois de place, de telle sorte que nous obtenons leur puissance visuelle pour chacune des quatre distances.

Nous comparons entre eux les résultats fournis par la première et la troisième mensuration. Les deux premiers exercices sont donc des travaux de fatigue. Le tableau ci-joint, page 11, résume les données résultant de cette expérience. Les noms des écoliers figurent dans une première colonne. A côté d'elle se trouvent deux autres colonnes, dans lesquelles on lit respectivement l'acuité visuelle à la première, puis à la troisième distance.

En additionnant les nombres représentant l'acuité visuelle de chacun des écoliers à la première distance, on obtient 29,17. La même opération effectuée avec les résultats fournis pour la troisième distance donne 31,14.

Le fonctionnement a donc augmenté la puissance visuelle des écoliers.

Si au lieu de porter l'attention sur les totaux, on examine les mensurations individuelles de chacun des élèves, on constate que l'acuité visuelle n'augmente pas chez tous les écoliers. C'est ainsi qu'elle diminue chez huit d'entre eux : les numéros 1, 6,

7, 9, 10, 17, 19 et 21. Elle augmente chez treize autres, portant les numéros 2, 4, 5, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 20 et 22, tandis qu'elle reste stationnaire chez le numéro 3.

NOMS.	ACUITÉ VISUELLE		NOMS.	ACUITÉ VISUELLE	
	à la première distance.	à la troisième distance.		à la première distance.	à la troisième distance.
			Reports.	14,79	15,25
1 M.	1,33	1,20	12 D.	1,25	1,61
2 G.	1,15	1,61	13 V.	1,00	1,14
3 B.	2,00	2 00	14 C.	1,50	1,66
4 H.	1,30	1,66	15 N.	1,33	1,46
5 D.	1,25	1,46	16 S.	1,29	1,71
6 V. L.	1,66	1,25	17 E.	0,75	0,74
7 L.	1,18	1,15	18 R.	1,22	1,43
8 D.	0,78	0,90	19 L.	1,56	1,36
9 F.	1,19	1,00	20 B.	1,39	1,74
10 G.	1,56	1,36	21 Ch.	1,76	1,54
11 O.	1,39	1,66	22 M.	1,33	1,50
A reporter	14,79	15,25	Totaux .	29,17	31,14

Cette expérience autorise les conclusions suivantes :

1° On peut provoquer la fatigue intellectuelle en substituant aux exercices scolaires habituels des exercices visuels plus faciles à graduer.

2° En mesurant les changements provoqués dans la sensibilité visuelle par la fatigue intellectuelle, il est possible de mesurer celle-ci.

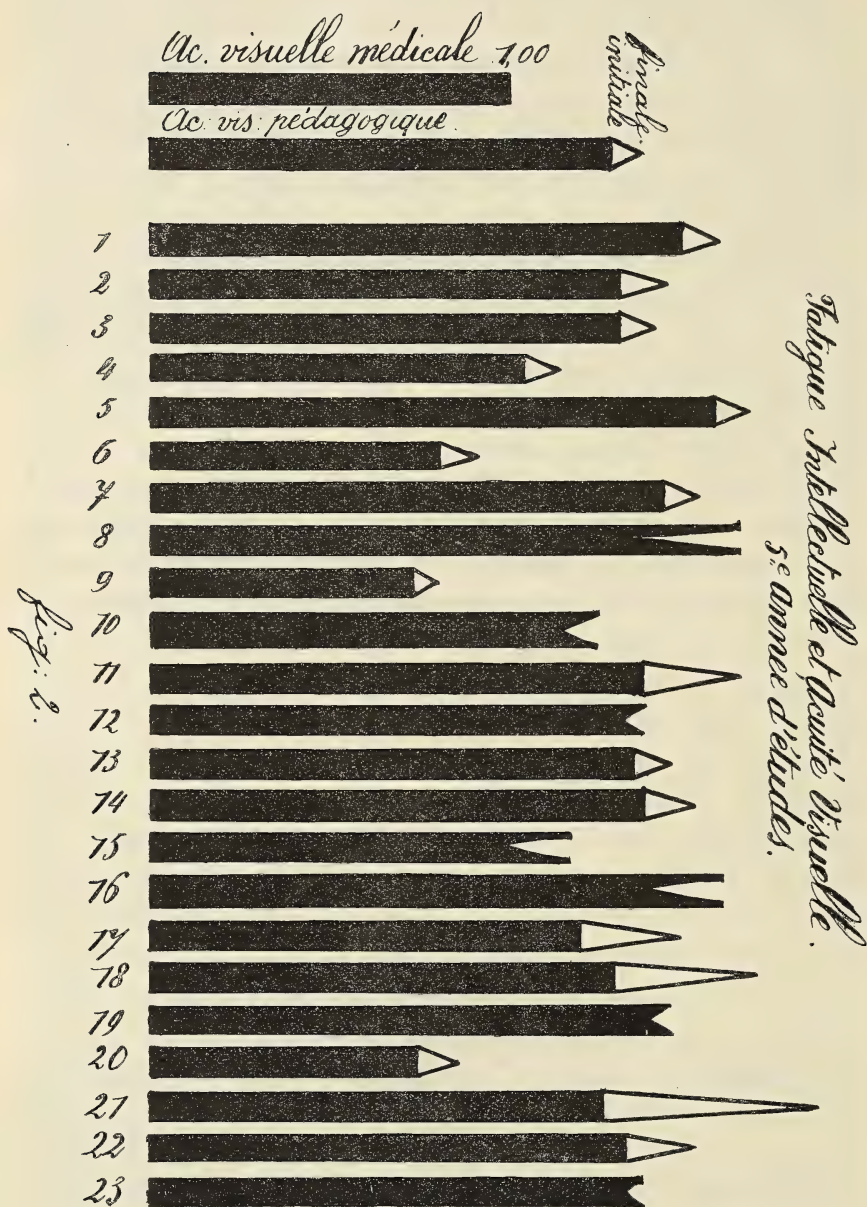
L'expérience suivante prouve qu'il en est réellement ainsi :

Le 8 avril, à 9 heures du matin, nous prenons l'acuité visuelle à 3, 4, 5 et 6 mètres, des enfants d'une cinquième année d'études (10-11 ans). Nous comparons entre eux les chiffres représentant l'acuité visuelle des enfants à la première et à la troisième distance. Les résultats sont consignés dans le diagramme ci-joint (fig. 2).

Chacune des vingt-trois dernières colonnes représente l'acuité visuelle d'un écolier. Elle possède autant de demi-millimètres de hauteur que le nombre représentant la sensibilité visuelle de cet élève compte de centièmes. En face d'elle se trouve le numéro d'ordre donné à chaque enfant. La colonne est surmontée d'un angle saillant lorsque l'acuité visuelle est plus élevée à la troisième distance qu'à la première; elle se termine par un angle rentrant dans le cas contraire. La hauteur de cet angle est proportionnelle à la différence existant entre l'acuité visuelle prise au début et à la fin de l'expérience (1^{re} et 3^e distance).

La première colonne représente l'unité que l'on utilise actuellement en médecine pour évaluer l'acuité visuelle; nous l'avons appelée acuité visuelle médicale. C'est la puissance visuelle minimum que le sujet doit posséder pour n'être pas déclaré insuffisant visuel. Tout écolier qui distingue à 5 mètres des caractères ayant 7 millimètres de hauteur est normal. La formule de l'acuité visuelle $AV = \frac{D}{d}$ devient, dans ces conditions, $AV = \frac{5}{5} = 1$. C'est pour cette raison que nous lui avons donné une hauteur de $0,0005 \times 100$ ou 50 millimètres. Conformément aux principes qui ont été appliqués dans la combinaison de notre échelle optométrique, les écoliers qui, à 3, 4, 5... mètres de distance, copient les caractères constituant respectivement les lignes 3, 4, 5..., ont, d'après la formule générale $AV = \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \frac{5}{5}$, c'est-à-dire l'acuité visuelle normale ou l'unité. Elle est, dans ce cas, figurée par une colonne ayant 50 millimètres de hauteur.

La deuxième colonne donne l'acuité visuelle pédagogique



moyenne initiale, ou plus simplement l'acuité visuelle pédagogique initiale. On la détermine en divisant par le nombre d'élèves (23) la somme des acuités visuelles fournies par les élèves à la première distance (29,65). Les enfants qui se trouvent au-dessous de cette moyenne sont des insuffisants visuels pédagogiques initiaux.

Cette deuxième colonne indique, en outre, l'acuité visuelle pédagogique moyenne finale. On l'obtient en totalisant les acuités visuelles terminales (3^e distance) et en divisant la somme (31,70) par le nombre d'élèves (23). Les écoliers qui n'atteignent pas cette moyenne sont les insuffisants pédagogiques.

Constatons qu'il existe trois insuffisants visuels médicaux, les n^{os} 6, 9 et 20; cinq insuffisants visuels pédagogiques initiaux, les n^{os} 4, 10, 15, 17 et 21; cinq insuffisants visuels pédagogiques finals, les n^{os} 4, 10, 12, 15 et 23.

Remarquons enfin que la colonne est terminée par un angle rentrant, indice de fatigue chez sept écoliers, les n^{os} 8, 10, 12, 19 et 23.

Comment doit-on interpréter ces résultats?

Les insuffisants visuels médicaux sont des écoliers chez lesquels les vices de réfraction diminuent la capacité visuelle. On peut constater, par l'examen du diagramme, que ce sont également des insuffisants pédagogiques. Leur insuffisance visuelle peut être reconnue au moyen des échelles optométriques actuelles, mais leur vice de réfraction ne peut être diagnostiqué que par l'oculiste.

Les insuffisants visuels pédagogiques ont l'acuité visuelle plus élevée que les insuffisants médicaux. Ils échappent à l'examen subjectif effectué au moyen des échelles visuelles actuelles. On ne peut les découvrir qu'en mesurant simultanément la sensibilité visuelle des écoliers, avant et après l'exécution d'exercices de fatigue.

Certains insuffisants pédagogiques, les n^{os} 17 et 21, devraient

plutôt être appelés des paresseux visuels pédagogiques, car si leur fonction visuelle s'éveille lentement, elle dépasse bientôt la normale.

D'autres insuffisants, les n^{os} 4, 10, 12, 15 et 23, sont des insuffisants pédagogiques réels; chez eux, en effet, la résistance à la fatigue est inférieure à la normale, puisque la colonne qui représente leur puissance visuelle pédagogique terminale est moins haute que celle qui figure la moyenne visuelle pédagogique finale.

Enfin, les écoliers dont la colonne se termine par un angle rentrant, c'est-à-dire ceux dont la puissance visuelle a diminué à la fin des exercices, sont des enfants chez lesquels le travail intellectuel fatigue rapidement les voies visuelles, parce qu'elles n'ont probablement pas encore achevé leur développement.

Il était intéressant de rechercher si l'examen médical des enfants de cette classe, pratiqué par l'oculiste, confirmerait ces prévisions. Notre confrère, le D^r Devleeschouwer, chef de service à la clinique ophtalmologique de l'hôpital civil d'Etterbeek, a bien voulu se charger de les examiner.

Voici les résultats de son travail :

Des 3 anormaux médicaux, le n^o 6 est atteint d'hypermétropie, 1.75 dioptrie. Il est insuffisant visuel et doit porter des verres. Le n^o 9 a une hypermétropie de 4 dioptries et de l'astigmatisme. C'est un insuffisant visuel. Des verres lui sont indispensables. Le n^o 20 présente de l'hypermétropie, 2 D, et de l'astigmatisme, il est insuffisant visuel. Il doit se servir de verres.

Parmi les insuffisants visuels pédagogiques, le n^o 4 montre une hypermétropie de 1 dioptrie. Il doit avoir des verres. C'est donc un insuffisant médical. Le n^o 10 est atteint d'hypermétropie, 2 dioptries, et d'astigmatisme. Des verres lui sont nécessaires. C'est donc également un insuffisant visuel médical.

Les n^{os} 12, 15, 17, 21 et 23 ne présentent rien de particulier.

Ils se comportent à l'examen du spécialiste comme la plupart de leurs condisciples pédagogiquement normaux.

Quant aux écoliers dont la colonne est terminée par un angle rentrant, que nous avons attribué à la fatigue, ils donnent des signes d'asthénopie musculaire, particulièrement marqués chez le n° 8.

Des considérations qui précèdent, il résulte :

1° Que l'échelle visuelle que l'on utilise actuellement dans les écoles ne permet pas de déceler tous les anormaux visuels médicaux. Chez certains enfants qui devraient porter des verres, le déficit visuel ne se révèle que lors de la mensuration de la fatigue intellectuelle.

2° Qu'il existe des insuffisants visuels pédagogiques chez lesquels l'examen du spécialiste ne révèle aucun signe permettant de les distinguer de leurs condisciples pédagogiquement normaux.

4° OÙ SIÈGENT LES TROUBLES QUI PROVOQUENT LES INSUFFISANCES VISUELLES PÉDAGOGIQUES.

Les insuffisances visuelles médicales sont occasionnées par des vices de réfraction que l'oculiste découvre, au moyen de l'ophtalmoscope, et que l'on peut déceler par l'examen subjectif pratiqué au moyen des échelles visuelles dont on dispose actuellement. Mais les insuffisances visuelles pédagogiques ne sont révélées par aucune perturbation décelable par ces mêmes procédés.

Il importe cependant de rechercher la place occupée par les altérations qui provoquent la fatigue, parce que la solution de cette question présente une grande importance scientifique.

Si la fatigue réside dans l'organe oculaire, elle ne peut plus guère être considérée comme étant d'origine intellectuelle.

Si, au contraire, nous parvenons à établir qu'elle a son siège dans les centres visuels supérieurs de l'écorce cérébrale, nous

établissons sa nature, et nous apportons un argument sérieux en faveur de la conception que nous nous faisons de l'architecture cérébrale ⁽¹⁾. A la suite des travaux embryologiques et histologiques entrepris sur le système nerveux par Flechsig, Van Gehuchten, Ramon y Cajal, etc., on a cru pouvoir admettre

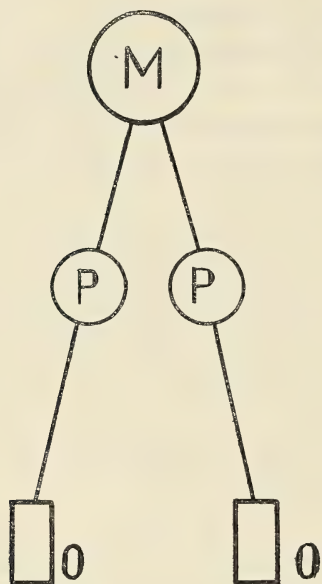


fig. 3.

que chacun des organes visuels, O, possédait son centre de perception P, mais qu'il n'existait qu'un centre visuel mnémonique unique ⁽¹⁾, M (fig. 3). Or, dans les expériences de fatigue que nous avons réalisées, c'est surtout le centre mnémonique, M, qui travaille. Si l'idée que l'on se fait actuellement de la structure de l'écorce cérébrale est exacte, les perturbations produites par le fonctionnement de l'un des organes visuels, si elles occupent le centre de mémoire, M, qui leur est commun, devront se répercuter dans l'autre œil. Nous sommes donc amené à étudier l'acuité visuelle monoculaire.

Afin de pouvoir opérer alternativement avec chacun des yeux des enfants, nous avons construit des montures de lunettes avec le fil de laiton dont se servent les modistes. Chaque monture exige environ 75 centimètres de fil et coûtait, au début de la guerre, 2 à 3 centimes. L'un des deux disques est garni avec un

⁽¹⁾ L. REMY, *Les bases scientifiques de la pédagogie et de la méthodologie*, vol. I : « Les fonctions de la vie végétative, de la vie animale et de la vie psychique chez les êtres vivants. »

tissu opaque, de telle sorte que les lunettes étant appliquées, l'enfant ne voit qu'avec l'œil non caché. Il suffit de courber les branches à 180 degrés pour que les mêmes lunettes puissent ensuite servir à l'examen de l'autre œil.

Pour étudier l'acuité visuelle monoculaire, nous avons procédé de la même façon que pour les mensurations binoculaires. Nous avons soumis les deux yeux à des exercices de fatigue, puis chacun des deux yeux alternativement aux mêmes exercices, et nous avons comparé entre eux les chiffres obtenus en totalisant les résultats individuels.

Le 4 avril, à 9 heures du matin, nous déterminons l'acuité visuelle binoculaire, à 3, 4 et 5 mètres, des écoliers d'une cinquième année d'études (10-11 ans). Nous prenons ensuite l'acuité de l'œil gauche aux trois mêmes distances, puis, immédiatement après, celle de l'œil droit. Nous comparons alors entre eux les chiffres fournis par chacun des deux yeux à la première et à la troisième distance.

Les résultats sont consignés dans le tableau ci-joint. Dans la première colonne se trouvent les noms des écoliers. La deuxième et la troisième colonne donnent respectivement l'acuité visuelle à la première et à la troisième distance pour l'œil gauche, qui a travaillé d'abord, la quatrième et la cinquième colonne mentionnent les mêmes indications pour l'œil droit, appelé ensuite à l'activité.

La totalisation des résultats des deux yeux pour la première, puis pour la troisième distance donne :

Œil gauche, première distance : 23,89; troisième distance : 24,55.

Œil droit, première distance : 23,47; troisième distance : 26,33.

Il y a donc augmentation de la puissance intellectuelle pour chacun des deux yeux à la troisième distance. Elle est plus marquée pour l'œil droit, qui a terminé l'expérience.

Le lendemain, à la même heure, avec les écoliers de la même classe, nous répétons cette expérience; seulement, après l'exer-

NOMS.	OEIL GAUCHE A COMMENCÉ L'EXPÉRIENCE. —		OEIL DROIT A FINI L'EXPÉRIENCE. —	
	ACUITÉ VISUELLE		ACUITÉ VISUELLE	
	à la première distance.	à la troisième distance.	à la première distance.	à la troisième distance.
1 C.	1,50	1,60	1,50	1,60
2 N.	1,00	1,20	1,00	1,50
3 V.	1,00	1,16	1,00	1,25
4 C.	1,33	1,50	1,33	1,50
5 D.	0,89	0,88	0,90	0,83
6 D.	1,50	1,33	1,50	1,66
7 V.	1,25	1,25	1,22	1,20
8 L.	0,66	0,65	1,00	0,98
9 H.	1,25	1,66	1,25	1,66
10 G.	1,00	1,00	1,00	1,00
11 J.	1,29	1,43	1,29	1,20
12 B.	1,50	1,33	1,20	1,53
13 L.	1,56	1,36	1,56	1,36
14 G.	0,97	0,98	0,97	0,91
15 D.	1,00	1,00	1,00	1,49
16 R.	1,66	1,43	1,66	1,43
17 E.	0,56	0,71	0,56	0,71
18 O.	1,25	1,25	1,00	1,49
19 M.	1,33	1,50	1,33	1,50
20 H.	1,39	1,33	1,20	1,53
Totaux.	23,89	24,55	23,47	26,53

eice binoculaire de fatigue, nous faisons travailler l'œil droit d'abord, l'œil gauche ensuite. Les résultats obtenus sont condensés ci-dessous.

Œil droit, première distance : 22,87; troisième distance : 25,67.

Œil gauche, première distance : 25,79; troisième distance : 27,73.

Ici encore, il y a accroissement de l'énergie intellectuelle pour chacun des deux yeux à la troisième distance, et le gain est plus considérable pour l'œil gauche, qui a achevé l'expérience, que pour l'œil droit, qui l'a commencée. En conséquence, l'œil qui fonctionne en dernier lieu, que ce soit l'œil droit ou l'œil gauche, a toujours l'acuité visuelle plus élevée que celui qui participe le premier au travail intellectuel.

L'exercice du premier œil a donc perfectionné le fonctionnement du second, et comme le centre supérieur, M, seul est intervenu dans les actes exécutés par l'un et l'autre œil, c'est lui qui a profité de l'entraînement.

Rappelons que le résultat de l'expérience ne se chiffre pas par une augmentation de l'acuité visuelle chez tous les écoliers. On peut également constater la diminution ou le maintien de la puissance visuelle du début.

Ces expériences autorisent les conclusions suivantes :

1^o Le centre visuel de mémoire, M, est le siège des modifications que le travail de l'une des voies visuelles provoque dans l'autre voie visuelle maintenue au repos. En conséquence, les excitations recueillies par les deux organes visuels sont conservées dans un centre visuel unique de mémoire.

2^o Les modifications survenues dans les centres intellectuels se traduisent, dans la sensibilité visuelle, par des variations dont la mensuration permet d'évaluer la fatigue ou la résistance, autrement dit la capacité intellectuelle.

Certes l'intérêt, la bonne volonté, l'effort et l'attention influencent l'exécution des exercices que l'on impose aux

écoliers pour mesurer leur fatigue intellectuelle. Mais ces quatre facteurs ne peuvent entrer en action que sous l'influence de l'énergie intellectuelle. Leur disparition indique donc une diminution dans l'utilisation de celle-ci.

Quand nous parlons de mesurer la fatigue ou la capacité intellectuelle, nous ne prétendons pas évaluer l'énergie psychique ⁽¹⁾, nous dosons seulement la puissance de consommation qui varie, chez les écoliers, proportionnellement aux perturbations produites par le fonctionnement cérébral dans les éléments constitutifs des centres intellectuels.

5° L'ÉVOLUTION DES ORGANES VISUELS CHEZ LES ENFANTS

A L'ÉCOLE.

On sait que les enfants naissent habituellement hypermétropes et rarement myopes : on ne compte guère que trois ou quatre enfants myopes pour mille. Les auteurs ne signalent aucune différence entre la puissance rétinienne des yeux chez les enfants avant l'âge d'école, alors que tous ceux qui ont examiné l'acuité visuelle chez les écoliers ont constaté la supériorité de l'œil droit.

Il était donc intéressant d'étudier l'évolution des organes visuels à l'école.

En déterminant l'acuité visuelle monoculaire chez les enfants des différentes classes, c'est-à-dire chez les écoliers de plus en plus âgés, on assiste au développement de leurs yeux. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-joint. Afin de les rendre aisément comparables, nous les avons rapportés à cent élèves, pour chacune des années d'études.

La première colonne mentionne l'année d'études et le nombre des élèves, la deuxième porte le nombre d'écoliers chez lesquels

(1) Voir mon ouvrage : *Les bases scientifiques de la pédagogie et de la méthodologie*, vol. I : « Les fonctions de la vie végétative, de la vie animale et de la vie psychique chez les êtres vivants. »

l'acuité visuelle gauche est supérieure à l'acuité visuelle droite, la troisième colonne indique le nombre d'écoliers dont l'acuité visuelle droite l'emporte sur l'acuité visuelle gauche. La quatrième colonne enfin renseigne le nombre des écoliers chez lesquels les deux organes ont la même puissance visuelle.

Année d'études.	Nombre d'élèves.	Nombre d'élèves dont l'acuité visuelle <i>gauche</i> est supérieure.	Nombre d'élèves dont l'acuité visuelle <i>droite</i> est supérieure.	Nombre d'élèves ayant Acuité G = D A
1 ^{re} année. . . .	100	14	13	73
2 ^e année. . . .	100	27	23	50
3 ^e année. . . .	100	50	30	20
4 ^e année. . . .	100	30	26	44
5 ^e année. . . .	100	23	24	53
6 ^e année. . . .	100	15	19	66

Les chiffres renseignés dans ce tableau n'ont qu'une valeur relative, puisque nous n'avons pas réellement opéré sur le même nombre d'élèves de chacune des six années d'études. Nous aurions même examiné exactement cent écoliers de chaque classe, que les nombres n'auraient pas acquis une valeur absolue.

Pour pouvoir étudier rationnellement l'évolution des yeux chez les écoliers, il conviendrait de les suivre dans les différentes classes et de comparer entre eux les résultats fournis, chaque année, par la mensuration de leur acuité visuelle monoculaire prise dans les mêmes conditions.

Toutefois, les chiffres ci-dessus peuvent donner une idée générale de l'allure du phénomène.

Il semble que l'œil gauche évolue avant l'œil droit. Dès les premières années, il prend sur lui une avance qui atteint son maximum vers la troisième année. Dès la quatrième année, le nombre des yeux droits qui se développent se rapproche de celui

des yeux gauches, il l'égale sensiblement en cinquième année, pour le dépasser légèrement en sixième année d'études.

Signalons cependant que les physiologistes admettent que le durcissement du cristallin commence déjà vers la onzième année. Il y a peut-être là un fait dont il conviendrait de tenir compte.

CONCLUSIONS.

Les recherches que nous avons faites sur la fatigue intellectuelle autorisent les conclusions suivantes :

1° Il est possible de mesurer la fatigue intellectuelle au moyen de la mensuration de la sensibilité visuelle.

2° L'échelle optométrique que nous avons imaginée fournit le moyen de mesurer la fatigue intellectuelle, la myopie et l'hypermétropie des écoliers, en opérant simultanément sur tous les élèves d'une classe. Elle est donc supérieure aux échelles visuelles actuellement utilisées dans les écoles.

3° Il existe une insuffisance visuelle médicale et une insuffisance visuelle pédagogique. Les insuffisances visuelles médicales sont occasionnées par des vices de réfraction que le spécialiste seul peut diagnostiquer. Tous les insuffisants visuels pédagogiques ne présentent pas, à l'examen pratiqué par l'oculiste, des signes permettant de les distinguer de leurs compagnons pédagogiquement suffisants visuels.

4° Tous les écoliers atteints de vice de la réfraction ne se trouvent pas parmi les insuffisants visuels que l'on décèle par l'examen subjectif actuellement utilisé dans les écoles, mais ils figurent parmi les élèves reconnus insuffisants pédagogiques lors de la mensuration de la fatigue intellectuelle au moyen de la mensuration de la sensibilité visuelle.

5° La mensuration de la fatigue intellectuelle visuelle s'effectuant au moyen d'exercices scolaires devrait être pratiquée par le personnel enseignant. Celui-ci déterminerait ainsi les insuffisants visuels pédagogiques, parmi lesquels l'oculiste découvrirait

les insuffisants visuels médicaux et leur prescrirait des verres.

6° Au moyen de cette échelle optométrique, nous avons encore pu établir l'influence des insuffisances visuelles : a) sur le développement intellectuel; b) sur la sensibilité visuelle des écoliers.

7° Enfin, elle nous a permis de confirmer, par des recherches expérimentales, certaines conceptions relatives à l'architecture des centres cérébraux.

*
* *

Cette échelle fournit encore la possibilité de réaliser des expériences en vue de contribuer à la solution de certaines questions rentrant dans le domaine de la pédagogie scientifique, parmi lesquelles nous citerons surtout les suivantes :

1° Les causes et la prophylaxie de la myopie scolaire;

2° Les connexions existant entre la fatigue intellectuelle et l'évolution des facultés psychiques chez les écoliers;

3° Les raisons qui déterminent l'évolution des organes visuels chez les écoliers;

4° La mensuration de l'acuité visuelle dans ses rapports avec la sélection intellectuelle et avec l'orientation professionnelle des écoliers.

Pour entreprendre ces études, et confirmer les résultats que nous avons déjà acquis, il conviendrait de disposer d'un outillage suffisant et de pouvoir expérimenter dans un certain nombre d'écoles des différentes régions du pays.

Maintenant que la guerre est terminée, nous espérons que ces desiderata pourront enfin être pris en considération.

Parvenu au terme de notre travail, nous croyons que c'est pour nous un devoir d'adresser nos vifs remerciements :

A MM. les Administrateurs communaux d'Etterbeek, qui ont bien voulu nous autoriser à expérimenter dans les écoles officielles.

A M. l'Inspecteur des écoles Delfeld, qui nous y a aimablement présenté.

Au personnel enseignant, et particulièrement à ses chefs M^{me} Debecker et M. Decléene, qui, outre leur dévouement, ont mis à notre disposition les résultats de l'expérience acquise au cours d'une carrière pédagogique longue et bien remplie.

Nous ne pouvons pas oublier notre chef de service à la clinique ophtalmologique de l'hôpital civil d'Etterbeek, M. le D^r Devleeschouwer, qui a bien voulu se charger de pratiquer l'examen objectif des enfants que nous lui avons adressés.

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
PRÉFACE	52
Considérations relatives aux troubles occasionnés par la fatigue intellectuelle et aux moyens de la mesurer	53
Échelle optométrique permettant de mesurer la fatigue intellectuelle. Principes qui ont servi de base à sa combinaison	55
Détermination de l'acuité visuelle	57
Influence des insuffisances visuelles sur le développement intellectuel des écoliers	59
Influence de la fatigue intellectuelle sur la sensibilité visuelle	60
Mensuration de la fatigue intellectuelle au moyen de la mensuration de la sensibilité visuelle	61
Où siègent les troubles qui provoquent les insuffisances visuelles pédagogiques	67
L'évolution des organes visuels chez les enfants à l'école.	72
CONCLUSIONS.	74

Séance du 6 mars 1920.

M. A. GRAVIS, directeur.

M. PAUL PELSENEER, secrétaire perpétuel.

Sont présents : MM. A. Gilkinet, C. le Paige, J. Deruyts, Léon Fredericq, J. Neuberg, A. Lameere, Ch.-J. de la Vallée Poussin, Max Lohest, Frédéric Swarts, Jean Massart, A. Demoulin, A. Rutot, A. de Hemptinne, Victor Willem, Paul Stroobant, Ch. Julin, J. Verschaffelt, G. Lecointe, E. Marchal et Pierre Nolf, *membres*; O. Van der Stricht, A. Brachet, L. Crismer, Th. De Donder, *correspondants*.

Absences motivées : MM. Stuyvaert et Grégoire, *correspondants*.

M. le Directeur félicite MM. Lagrange, promu Commandeur de l'Ordre de Léopold, Cornet, promu Officier et Crismer, nommé Chevalier du même Ordre. MM. Bordet et Brachet, élus respectivement membre et correspondant de l'Académie royale de Médecine, et M. Julin, élu membre honoraire de la Société zoologique de France.

CORRESPONDANCE.

L'Académie des Sciences et Lettres du Danemark annonce la mort de son ancien secrétaire, M. H.-G. Zeuthen.

— La Société chimique de Londres fait savoir qu'elle annonce dans ses « Proceedings » la question de Concours posée par l'Académie : Contribution à l'étude de la valence.

— Le Comité exécutif du Conseil international de Recherches annonce que la Convention du C. I. R. est entrée en vigueur le 1^{er} janvier 1920 et que les Pays-Bas, l'Espagne, la Norvège et la Principauté de Monaco ont adhéré au Conseil international.

— MM. Ledent et De Donder demandent chacun à l'Académie d'accepter le dépôt d'un pli cacheté. — Accepté.

— M. Larose communique un mémoire intitulé : Réalisation de l'idée pestalozzienne relative à l'intuition dans l'enseignement du calcul. — Renvoi à M. Stuyvaert.

HOMMAGES D'OUVRAGES.

Le Prince Roland Bonaparte. *Notes ptéridologiques*, fasc. VIII.

X. Raspail. Raspail et Pasteur. *Trente ans de critiques médicales et scientifiques*.

Ch.-J. de la Vallée Poussin. *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble. Classes de Baire, et Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle*.

— Remerciements.

RAPPORTS.

De MM. Fredericq et Willem sur un mémoire de M. Remy : La mensuration de la fatigue intellectuelle des écoliers au moyen d'un audiomètre permettant d'opérer simultanément sur tous les élèves d'une même classe.

Le dépôt aux archives est proposé et voté.

De M. Ch.-J. de la Vallée Poussin sur un mémoire de M. Garot relatif au mouvement perpétuel. Le dépôt aux archives est proposé et voté.

AUGMENTATION DE LA VALEUR DES MÉDAILLES DE CONCOURS.

Après un échange de vues auquel prennent part MM. Frédéricq, Willem, Swarts, Lecointe et Stroobant, la Classe décide que la valeur de ces médailles sera désormais portée uniformément à 1,500 francs.

CONSEIL DE RECHERCHES.

La rédaction du projet de loi relatif à ce Conseil et celle des statuts du même Conseil national, proposées par la Commission, sont adoptées par la Classe et seront transmises au Ministre des Sciences et des Arts.

JURY DU PRIX DECENNAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES.

La Classe choisit deux noms à proposer à M. le Ministre des Sciences et des Arts, pour remplacer le sieur Stöber au sein de ce jury.

COMMISSION ADMINISTRATIVE.

M. Stroobant est désigné comme suppléant à M. le Directeur Gravis.

BANQUET DU MOIS DE MAI.

La Classe est d'avis qu'il y a lieu d'en rétablir l'usage, le jour de l'assemblée plénière des trois Classes, à 6 $\frac{1}{2}$ heures.

MOTION DE M. LAMEERE.

Une proposition de loi a été déposée, qui supprime en fait l'Université actuelle de Gand. L'Académie revendique des prérogatives diverses dont le principe commun est la défense des intérêts scientifiques du pays. Or le maintien de l'Université de Gand, dans sa forme actuelle, est une des conditions nécessaires à la vie scientifique nationale.

Il y aurait donc lieu pour l'Académie d'émettre un avis défavorable au projet de loi en question.

La Classe décide que l'objet sera porté à l'ordre du jour de la séance d'avril et qu'avis en sera donné à la Classe des lettres.

MOTION DE M. JULIN.

M. Julin signale la création en Suède d'un organe scientifique d'apparence internationale, constitué avec l'appui des Centraux, de neutres et même de quelques alliés (*Acta zoologica*). Il y voit une manifestation nouvelle de la tendance de certains neutres à imposer la reprise des relations personnelles avec le monde scientifique des empires centraux ; il met ses confrères en garde contre ces tentatives. M. Lameere confirme les renseignements donnés par M. Julin et ajoute qu'ayant été sollicité de participer à l'entreprise projetée, il a nettement refusé de voir son nom mêlé à ceux de représentants de la science allemande.

PROPOSITION DE M. MASSART.

M. Massart fait remarquer que le temps laissé aux communications et lectures est devenu de plus en plus restreint, par suite de la prédominance des affaires administratives. Il en résulte que beaucoup de nos confrères ont cessé de faire des communica-

tions scientifiques à l'Académie et réservent l'exposé de leurs découvertes à d'autres recueils que notre *Bulletin*. Il voudrait cependant que celui-ci devint le reflet de la vie scientifique nationale et pense que cela pourrait se réaliser si chacun de nos confrères lui apportait immédiatement le résultat sommaire des recherches effectuées par eux-mêmes, leurs élèves, leurs collègues et les élèves de ceux-ci. Si cela était fait en communications de peu d'étendue, le *Bulletin* pourrait paraître rapidement et l'intérêt varié qu'il présenterait le ferait consulter davantage dans le monde scientifique international.

M. de Hemptinne propose, pour consacrer plus de temps aux communications scientifiques, un système analogue à celui que va expérimenter la Classe des lettres (séances trimestrielles, commençant le matin par une partie administrative).

M. Verschaffelt estime que la question des séances et celle du *Bulletin* sont distinctes et pourraient être traitées séparément.

M. Swarts craint que beaucoup d'entre nous ne puissent avant assez longtemps faire des communications scientifiques, soit pour eux-mêmes soit pour leurs élèves ; et il pense qu'on pourrait provisoirement accroître l'intérêt des séances par l'exposé de progrès scientifiques réalisés ailleurs ; il cite comme exemple les recherches d'Einstein.

M. de Hemptinne appuie cette manière de voir.

M. Lameere ne voudrait pas qu'on fit double emploi avec les sociétés scientifiques et qu'on nuise à la vie de celles-ci, en apportant à l'Académie une multitude de communications spéciales de peu d'importance.

Après de nouvelles remarques de MM. Fredericq, de Hemptinne et Swarts, la Classe décide de remettre la question à une prochaine réunion et d'attendre le résultat de l'expérience que va faire la Classe des lettres.

LECTURES.

M. Verschaffelt fait une communication verbale sur le tracé de la cycloïde.

M. Lameere présente un travail de M. Verlaine sur la spermio-genèse chez les lépidoptères. La Classe charge MM. Brachet et Lameere de faire rapport sur ce travail.

BOTANIQUE. — Recherches sur les organismes inférieurs.

VII. — Les réflexes chez les Polyporées,

par JEAN MASSART, membre de la Classe.

Les Polyporées, à l'exclusion du genre *Poria*, sont caractérisées par le fait que l'hyménium tapisse des tubes verticaux s'ouvrant à la face inférieure d'un chapeau; celui-ci a le plus souvent la forme d'une console attachée latéralement au support : sa face supérieure est stérile, sa face inférieure seule porte les tubes hyménifères.

L'orientation strictement verticale des tubes est indispensable pour que les spores soient mises en liberté. On sait, en effet ⁽¹⁾, que la spore mûre ne tombe pas simplement de la baside, mais qu'elle est lancée à quelques microns de distance, puis qu'elle tombe verticalement. Si les tubes, qui n'ont en général qu'une fraction de millimètre de largeur sur 10 ou 20 millimètres de hauteur, étaient obliques, si peu que ce soit, les spores resteraient accrochées aux parois, et leur dissémination serait impossible. La figure 1 montre que, quelle que soit la direction du chapeau, les spores sont toujours exactement verticales, avec l'ouverture vers le bas.

C'est certainement vis-à-vis de la pesanteur, et non vis-à-vis

(1) Voir R. BULLER, *Researches on Fungi*. London, 1909, pl. I. fig. 4.

de la lumière, que les Polyporées réagissent pour orienter les spores dans la direction du fil à plomb. Les exemplaires de la figure 1 ont été récoltés, en effet, à l'obscurité absolue, tout au fond de la grotte de Rochefort.



FIG. 1 (4). — Coupes verticales à travers deux chapeaux de *Fomes annosus*, récoltés dans la grotte de Rochefort. Face supérieure stérile; face inférieure fertile, avec les tubes exactement verticaux, quelle que soit la direction des chapeaux.

Pourtant les Polyporées sont, en général, sensibles à la lumière. Il faut cet excitant à la plupart des espèces pour provoquer la naissance du chapeau. On introduit dans les grottes ouvertes au public de grandes quantités de bois de toute sorte, pour la construction d'escaliers, de rampes, de passerelles, etc.

(4) Les dessins ont été faits par mon élève, M. Robert Descamps, que je remercie de tout cœur.

Ces boiseries se recouvrent d'un épais revêtement de mycélium, mais nous n'y avons jamais récolté qu'une seule Polyporée fructifiée, *Fomes annosus*, qui y présente sa structure et sa coloration habituelles : le chapeau est brun marron clair à la face supérieure, jaune roussâtre pâle à la face inférieure. Il est curieux que ce soit une espèce parasite (de Conifères) qui seule puisse se passer de l'excitant lumineux. Faisons remarquer que la coloration différente des deux faces n'est pas non plus sous la dépendance de la lumière, mais sous celle de la pesanteur.

Comment se comportent des Polyporées qui, après s'être développées dans les conditions normales, sont ensuite retournées? L'expérience est facile à réaliser en hiver, saison de croissance de ces espèces; il suffit de retourner des souches sur lesquelles il y a des Polyporées avec des chapeaux complètement différenciés. Nous avons fait une expérience de ce genre au Jardin botanique de Bruxelles, en novembre 1919; le tronc portait de nombreux *Polystictus versicolor*.

La figure 2 indique schématiquement les diverses réactions; les figures 3 à 5 en représentent les réalisations. Nous croyons inutile de commenter davantage les explications des figures.

Les figures 2, a, A, et 6 montrent aussi comment se comporte une Polyporée qui est insérée à la face supérieure d'un tronc : elle commence par produire un gros piédestal de tissu stérile, sur les flancs duquel naissent ultérieurement des chapeaux en forme de console. C'est, en effet, le seul moyen de produire des tubes verticaux, ouverts dans le bas. Certaines Polyporées (par exemple, *Ganoderma rugosum*, fig. 9) possèdent régulièrement un dispositif de ce genre.

Les Polyporées présentent encore un autre mode de sensibilité. Quand le bord d'un chapeau en voie de croissance (fig. 8) rencontre un corps étranger, — brindille, feuille, mousse, rameau mort, etc., — les tissus touchés cessent aussitôt de s'allonger (voir la figure schématique 7 et les dessins 8 et 9). Successivement la même inhibition frappe toutes les hyphes à

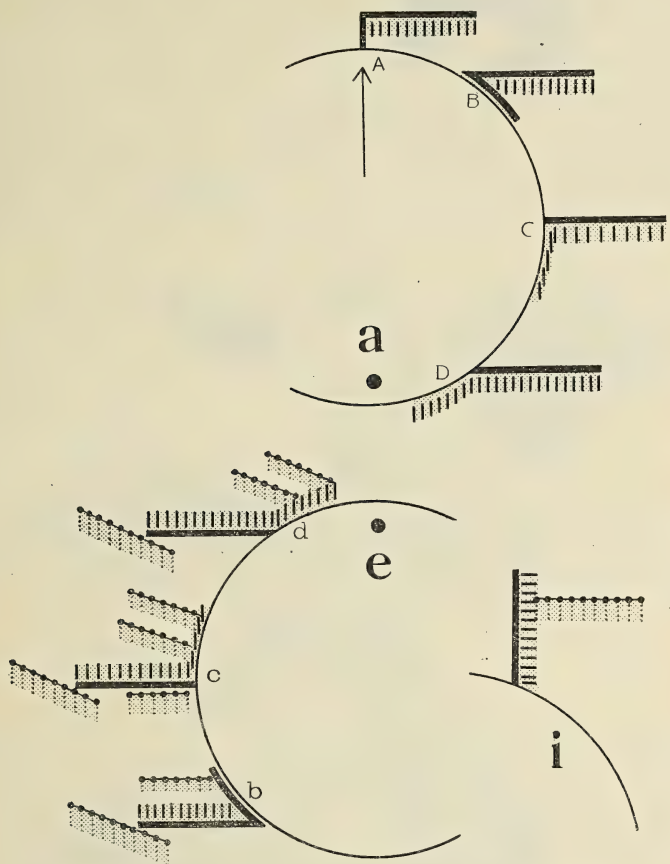


FIG. 2. — La sensibilité des Polyporées à la gravitation.

- a) Coupe transversale d'un tronc d'arbre couché par terre; la flèche indique le haut, et le point noir le bas. Le tronc porte des chapeaux de Polyporées orientés normalement. Ils sont insérés dans diverses positions : A, chapeau né sur le flanc supérieur du tronc; il a commencé par s'élever jusqu'à ce qu'il pût former une console horizontale (comparer avec la fig. 6). — B, chapeau né sur le flanc oblique supérieur; il se prolonge au-dessous du point d'attache par du tissu stérile. — C, chapeau né sur le flanc latéral; il se prolonge au-dessous du point d'attache par du tissu fertile. — D, chapeau né sur le flanc oblique inférieur; il se prolonge aussi par du tissu fertile.
- e) Le même tronc retourné de 180°, de façon que les chapeaux aient maintenant la face stérile tournée vers le bas et la face fertile tournée vers le haut. Partout le chapeau a cessé de croître. De nouvelles consoles (représentées en pointillé) sont nées sur le bord libre des chapeaux, en b, c, d (comparer avec la fig. 3) et sur les tissus qui prolongeaient le chapeau au-dessous de son insertion; plus rarement de nouveaux tubes se sont formés sur l'ancienne face stérile, en c (comparer avec la fig. 5, à gauche).
- i) Un tronc tourné de 90°, de façon que les consoles, d'abord horizontales, soient maintenant verticales. Les chapeaux ont cessé de s'accroître, et ils en ont formé de nouveaux sur leur face fertile (comparer avec les fig. 4 et 5, à droite).



FIG. 3. — Coupes verticales à travers deux *Polystictus versicolor*. Le Champignon d'en haut avait été tourné de 180° ; il a formé une nouvelle console sur le bord de l'ancienne (voir la fig. 2, e, b, c, d). — Celui du bas a été retourné de 210° ; de nouvelles consoles sont nées à la fois sur le bord et sur l'ancienne face inférieure.

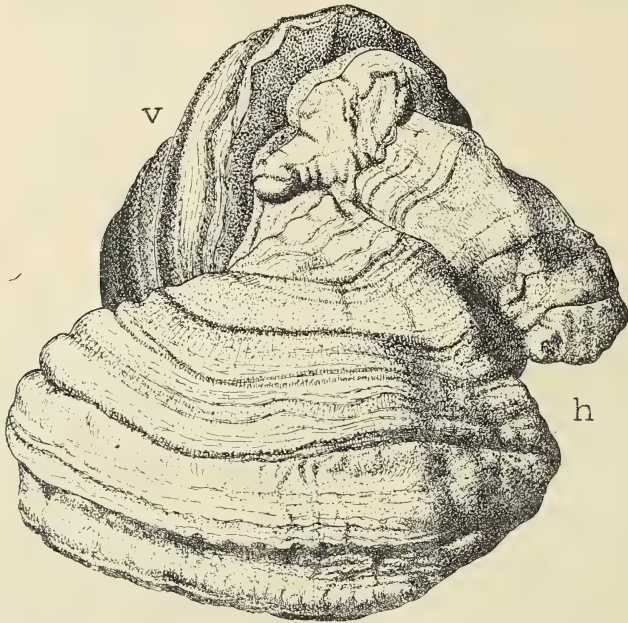


FIG. 4. — Un chapeau de *Fomes fomentarius* qui avait poussé sur un tronc d'arbre; celui-ci a été tourné de 90° , de telle manière que la console v, d'abord horizontale, a été orientée verticalement. Dans cette nouvelle position elle a cessé de croître, mais deux nouvelles consoles h sont nées sur sa face fertile et se sont développées dans la position normale (voir fig. 2, i). — Cet échantillon a été récolté par Léo Errera, à Herkulesfürdő Hongrie), le 24 juin 1905.

mesure qu'elles viennent en contact avec l'objet. Pendant ce temps les hyphes voisines, non excitées, continuent à s'allonger; elles dépassent à droite et à gauche le corps étranger; puis, au delà de lui les deux lèvres se rejoignent, et voilà l'objet entouré de toutes parts par les tissus du Champignon. S'agit-il réellement d'un arrêt de croissance, survenant comme réaction

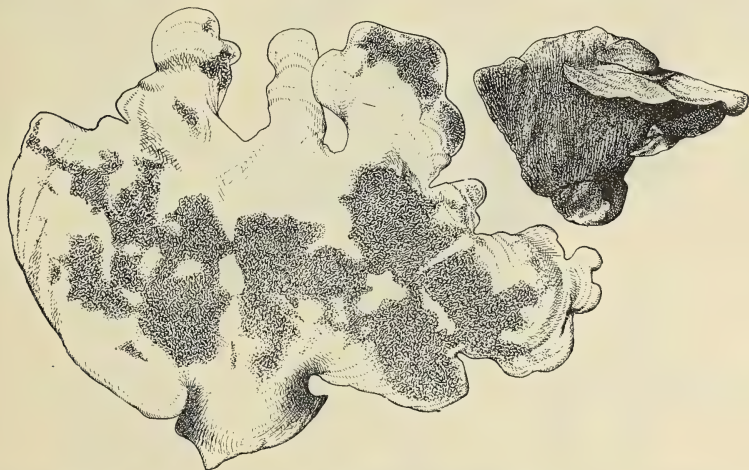


FIG. 5. — Deux exemplaires de *Lenzites deplanata* qui ont été déplacés. Celui de gauche a été retourné complètement; on voit de nouveaux tubes qui sont nés sur l'ancienne face supérieure (voir la fig. 2, e, D). — A droite, un individu qui a été tourné de telle manière que la console soit verticale; de nouvelles consoles sont nées sur l'ancienne face inférieure (voir 2, i). — Ces échantillons ont été récoltés sur des troncs de Muscadiers, à Soekamantri (Java).

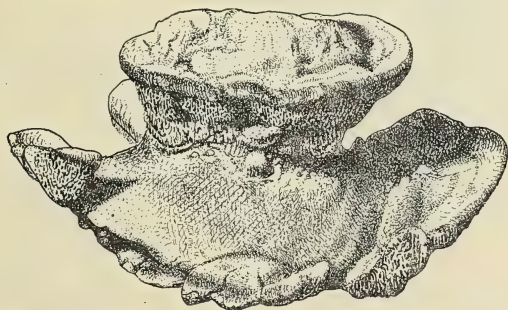


FIG. 6. — Un exemplaire de *Trametes gibbosa* qui a poussé sur une surface horizontale; il a produit d'abord un gros socle de tissu stérile, d'où se détachent latéralement les consoles (voir la fig. 2, a, A).

d'un réflexe déterminé par le contact, ou n'est-ce pas plutôt le résultat inévitable de la résistance qu'offre le corps étranger à la pression exercée par le bord du chapeau? Cette dernière interprétation pourrait paraître plausible si le Champignon n'englobait que des objets qu'il ne réussit pas à pousser devant lui.

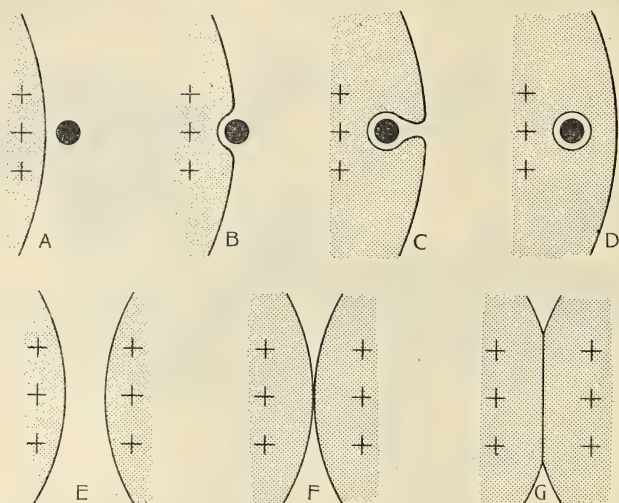


FIG. 7. — La sensibilité tactile chez les Polyporées. En haut les phases de l'englobement d'un corps étranger par le bord d'un chapeau en voie de croissance (comparer avec la fig. 8). — En bas, les phases de la soudure de deux chapeaux (comparer avec la fig. 9).

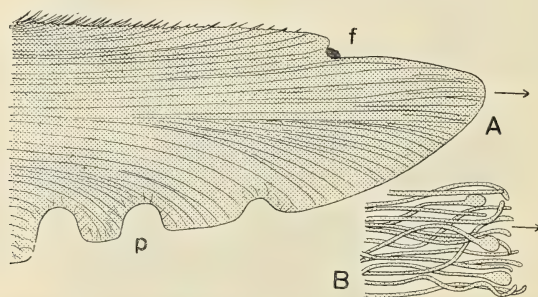


FIG. 8. — Coupe verticale à travers le bord d'un chapeau de *Polystictus versicolor*. — A, coupe faiblement grossie montrant la direction des filaments. — f, petit bout de feuille morte, contre lequel les filaments ont cessé de croître; p, ébauches des pores. — B, portion plus grossie, près de la flèche.

Mais ce n'est certainement pas le cas quand il entoure un tout petit bout de feuille morte posé à sa surface (fig. 8) ou une infime fibre de bois suspendue devant son chapeau et qu'il pourrait aisément écarter.

Non seulement les Polyporées possèdent la sensibilité tactile, mais leurs hyphes ont encore le pouvoir de distinguer certaines particularités des corps qu'elles touchent. Si un attouchement

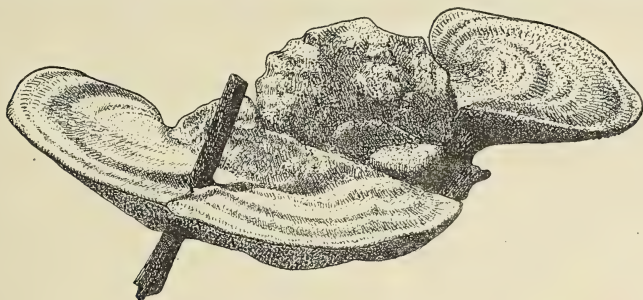


FIG. 9. — Chapeau de *Trametes gibbosa* qui a rencontré un morceau de bois et l'a entouré de ses tissus (voir la fig. 7, en haut).

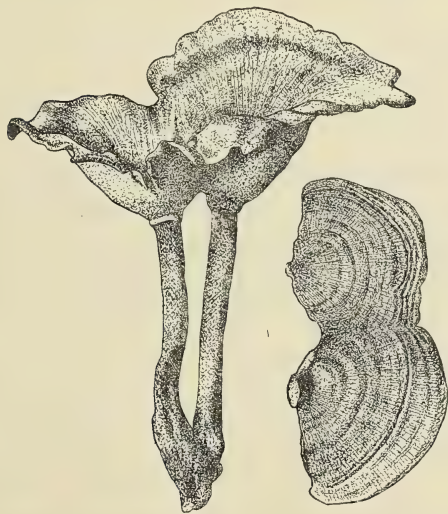


FIG. 10. — Polyporées soudées. A gauche, deux *Ganoderma rugosum*, récoltés au Jardin botanique de Buitenzorg (Java). — A droite, deux *Polystictus versicolor*, récoltés dans la forêt de Tjibodas (Java) (voir la fig. 7, en bas).

qu'importe provoquait un arrêt de croissance, le contact des deux lèvres du chapeau derrière le corps étranger les empêcherait de se souder. Or non seulement la soudure s'opère dans ces conditions, mais même des chapeaux primitivement distincts s'unissent quand ils se rencontrent (fig. 10).

On peut donc reconnaître chez les Polyporées des réflexes qui ont comme points de départ les trois excitants que voici :

a) La lumière, qui intervient dans la production des chapeaux ;

b) La pesanteur, vis-à-vis de laquelle le Champignon différencie son chapeau et oriente ses tubes hyménifères ;

c) Le contact, qui provoque l'arrêt de la croissance des hyphes.

ASTRONOMIE. — La trajectoire
d'un rayon lumineux dans le champ de gravitation
d'Einstein - Schwarzschild (*),

par H. VANDERLINDEN, assistant à l'Observatoire royal de Belgique.

En m'inspirant des intéressants travaux de M. DE SITTER (**), je me suis proposé de rattacher le problème du rayon lumineux au *champ d'Einstein et de Schwarzschild* et d'éviter toute approximation au cours des calculs. Cette méthode m'a permis de trouver une expression plus rigoureuse de la marche de ce rayon (voir équation 8); une équation équivalente avait été rencontrée par M. De Donder.

J'en déduis ensuite la déviation du rayon lumineux émis par une étoile, et passant près du disque solaire.

(*) Présenté par M. Lecoq.

(**) W. DE SITTER, *On Einsteins Theory of Gravitation*. (MONTHLY NOTICES R. A. S., vol. LXXVI, p. 717.)

1. Le champ d'Einstein-Schwarzschild est défini par (*)

$$\delta s^2 \equiv -\frac{r}{r-\alpha} \delta t^2 - r^2 (\delta \theta^2 + \sin^2 \theta \delta \varphi^2) + c^2 \frac{r-\alpha}{r} \delta t^2, \quad (1)$$

où c est la vitesse de la lumière dans l'espace-temps non déformé et où α est une constante arbitraire.

Ce champ possédant la symétrie sphérique pure, nous pouvons toujours supposer que le rayon lumineux se trouve dans le plan $\theta = \frac{\pi}{2}$; d'où

$$\delta s^2 \equiv -\frac{r}{r-\alpha} \delta t^2 - r^2 \delta \varphi^2 + c^2 \frac{r-\alpha}{r} \delta t^2. \quad (2)$$

Admettons, avec EINSTEIN (**) et DE SITTER, que la propagation de la lumière correspond à $ds = 0$ (géodésique de longueur nulle). Il en résulte que l'expression (2) s'écrit

$$c^2 \frac{r-\alpha}{r} dt^2 = \frac{r}{r-\alpha} dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

Posons

$$u^2 \equiv c^2 \frac{r-\alpha}{r} = \frac{r}{r-\alpha} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2. \quad (3)$$

Le champ gravifique d'Einstein-Schwarzschild, produit par le Soleil, étant très peu différent de l'espace-temps non déformé, on admet, en outre, que la lumière se propage suivant le principe de Fermat, ce qui revient à écrire que

$$\int dt \text{ est minimum, ou } \delta \int dt = 0,$$

les extrémités de cette intégrale curviligne étant supposées fixes.

(*) TH. DE DONDER, *La Gravifique*. (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique [Classe des sciences], 1919, p. 470.)

(**) A. EINSTEIN, *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*. (ANNALEN DER PHYSIK, 1916, vol. XLIX, p. 822.)

Multiplions et divisons la quantité sous le signe intégral par n et écrivons

$$\delta \int \frac{\sqrt{\frac{r}{r-\alpha} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}}{c \sqrt{\frac{r-\alpha}{r}}} dt = 0.$$

Simplifions cette relation par dt et mettons dr en évidence; il vient

$$\delta \int \frac{\sqrt{\frac{r}{r-\alpha} + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2}}{c \sqrt{\frac{r-\alpha}{r}}} dr = 0. \quad (4)$$

Posons

$$\frac{d\varphi}{dr} = \varphi', \quad (5)$$

et effectuons la variation (4), en prenant $\delta r = 0$ et $\delta \varphi$ différent de zéro; d'où

$$\int \frac{1}{\sqrt{\frac{r-\alpha}{r}}} \cdot \frac{r^2 \varphi' \delta \varphi'}{\sqrt{\frac{r}{r-\alpha} + r^2 \varphi'^2}} dr = 0.$$

Intégrons cette relation par parties (limites fixes); nous aurons

$$\int \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{r-\alpha}{r}}} \cdot \frac{r^2 \varphi'}{\sqrt{\frac{r}{r-\alpha} + r^2 \varphi'^2}} dr \right] \delta \varphi = 0.$$

Comme $\delta \varphi$ est tout à fait arbitraire, il en résulte que

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{r-\alpha}{r}}} \cdot \frac{r^2 \varphi'}{\sqrt{\frac{r}{r-\alpha} + r^2 \varphi'^2}} = a,$$

a étant une constante pour le rayon lumineux considéré.

En simplifiant le premier membre de la relation précédente il vient

$$\frac{r^2 \varphi'}{\sqrt{1 + r(r - \alpha) \varphi'^2}} = a. \quad (6)$$

Développons le dénominateur du premier membre de (6) comme suit :

$$(1 + r^2 \varphi'^2 - r \alpha \varphi'^2)^{\frac{1}{2}} = (1 + r^2 \varphi'^2) \left[1 - \frac{1}{2} (1 + r^2 \varphi'^2)^{-1} r \alpha \varphi'^2 \dots \right].$$

Retournons à (6), en négligeant les puissances supérieures de $\frac{\alpha}{r}$ (*), cette quantité étant très petite dans le cas considéré (**):

$$\frac{r^2 \varphi'^2}{(1 + r^2 \varphi'^2)^{\frac{1}{2}}} \sim a \left(1 - \frac{\alpha}{2r} \cdot \frac{r^2 \varphi'^2}{1 + r^2 \varphi'^2} \right).$$

Posons

$$r \varphi' \equiv \operatorname{tg} V. \quad (7)$$

L'équation du rayon lumineux (***) devient ainsi

$$\boxed{r \sin V \sim a \left(1 - \frac{\alpha}{2r} \sin^2 V \right)}. \quad (8)$$

(*) *Remarque.* — Le développement de

$$(1 - z)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{où } z = \frac{r \alpha \varphi'^2}{1 + r^2 \varphi'^2}$$

est convergent, car on peut écrire

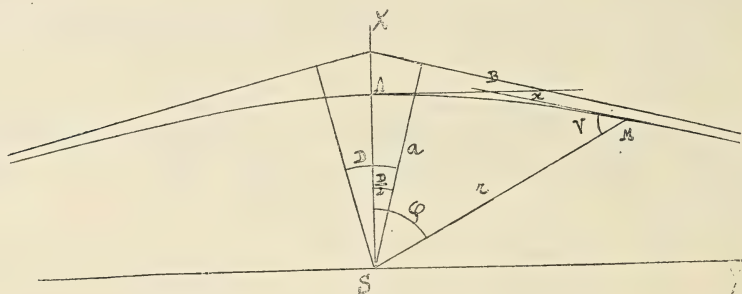
$$z = \frac{\alpha}{r} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{r^2 \varphi'^2}} < \frac{\alpha}{r}.$$

(**) TH. DE DONDER, Mémoire cité, p. 476.

(***) L'équation obtenue par M. De Sitter (Mémoire cité, p. 748) est, en employant nos notations,

$$r \sin V = a \left(1 - \frac{\alpha}{r} \right).$$

2. La déviation du rayon lumineux. — Comme nous l'avons déjà remarqué ci-dessus, le *champ d'Einstein-Schwarzschild* est très peu différent de l'espace-temps non déformé. Reportons l'image de la marche du rayon lumineux dans un plan euclidien (voir figure). Prenons comme origine le centre du Soleil.



La courbe est symétrique par rapport à l'axe SX. Elle admet deux asymptotes, dont la distance à l'origine S est a , et qui font chacune avec l'axe SY un angle égal à la moitié de la déviation. Si M est un point de la trajectoire, l'angle V défini par (7) est l'angle formé par le rayon secteur SM avec la tangente à la courbe en M.

Au point A, on a $V = \frac{\pi}{2}$, et r atteint une valeur minimum $r_0 = a \left(1 - \frac{\alpha}{2r_0}\right)$, très peu différente de a .

Le calcul de la déviation du rayon lumineux revient à déterminer l'angle que font les asymptotes avec l'axe SY.

Appelons x l'angle des tangentes aux points A et M de la courbe. Dans le quadrilatère SABM, on a

$$x = V + \varphi - \frac{\pi}{2};$$

d'où, en dérivant cette relation par rapport à V,

$$\frac{dx}{dV} = 1 + \frac{d\varphi}{dV} = 1 + \frac{d\varphi}{dr} \cdot \frac{dr}{dV}.$$

En vertu de (5) et (7), cette relation s'écrit

$$\frac{dx}{dV} = 1 + \frac{\operatorname{tg} V}{r} \cdot \frac{dr}{dV}. \quad (9)$$

D'autre part, en dérivant par rapport à V l'équation (8) du rayon lumineux, il vient

$$\frac{dr}{dV} \sin V + r \cos V = a \left(\frac{\alpha}{2r^2} \sin^2 V \frac{dr}{dV} - \frac{\alpha}{r} \sin V \cos V \right).$$

On en déduit que

$$\frac{dr}{dV} = - \frac{r \cos V + \frac{a\alpha}{r} \sin V \cos V}{\sin V - \frac{a\alpha}{2r^2} \sin^2 V}. \quad (10)$$

Remplaçons $\frac{dr}{dV}$ par sa valeur (10) dans (9); après quelques réductions, nous obtenons

$$\frac{dx}{dV} = - \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{a\alpha}{r^2} \sin V}{1 - \frac{a\alpha}{2r^2} \sin V},$$

ou

$$\frac{dx}{dV} \sim - \frac{3}{2} \cdot \frac{a\alpha}{r^2} \sin V. \quad (11)$$

Intégrons cette équation, en remarquant que $\sin V$ est une fonction impaire. Pour un rayon lumineux passant de $-\infty$ à $+\infty$, nous aurons ainsi, comme valeur de la déviation totale,

$$D \sim -2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2} \cdot \frac{a\alpha}{r^2} \cdot \sin V dV. \quad (12)$$

Éliminons r dans (12), à l'aide de l'équation (8); comme $\frac{\alpha}{r}$ est très petit, on a pratiquement

$$r \sin V \sim a,$$

d'où

$$r \sim \frac{a}{\sin V},$$

et ainsi (12) devient

$$D \sim -3 \frac{\alpha}{a} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^3 V dV = -3 \frac{\alpha}{a} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1 - \cos^2 V) \sin V dV.$$

Effectuons l'intégration, et nous aurons

$$D \sim -3 \frac{\alpha}{a} \left[-\cos V + \frac{\cos^3 V}{3} \right]_{\frac{\pi}{2}}^0;$$

d'où l'on a finalement, comme expression de la déviation du rayon lumineux,

$$D \sim 2 \frac{\alpha}{a}. \quad (13)$$

Pour un rayon lumineux qui rase le bord du Soleil, la distance minimum est le rayon de Soleil R , et l'on aura comme déviation, exprimée en radians,

$$\Delta \sim 2 \frac{\alpha}{R}. \quad (14)$$

Calculons la constante α . Entre cette constante α et la constante de la gravitation universelle, il existe la relation (*)

$$Mf \sim \frac{\alpha}{2} c^2.$$

Dans cette formule,

M est la masse du Soleil, que l'on peut prendre comme unité;

c est la vitesse de la lumière dans l'espace-temps non déformé, en prenant comme unité de longueur la distance moyenne du Soleil à la Terre, et comme unité de temps, le jour solaire moyen; d'où

$$c = \frac{86400}{498,5},$$

(*) TH. DE DONDER, Mémoire cité, p. 476.

le numérateur de cette fraction étant le nombre de secondes en un jour, et le dénominateur, le nombre de secondes employées par la lumière pour parcourir la distance du Soleil à la Terre; f est alors le carré de la constante de Gauss, et l'on a

$$\log f = 6,4711628_{-10}.$$

Il en résulte que

$$\log \alpha = 2,2944958_{-10}.$$

La distance du Soleil à la Terre étant prise comme unité de longueur, le rayon R du Soleil a pour mesure (en radians)

$$R = \frac{959,63}{206264,81},$$

le numérateur de la fraction étant le rayon du Soleil en secondes d'arc, et le dénominateur, le nombre de secondes que renferme un arc de cercle de longueur égale à celle du rayon; d'où

$$\log R = 7,6676787_{-10}.$$

En introduisant les valeurs précédentes de α et de R dans (14), on trouve

$$\log \Delta = 4,9278471_{-10}, \quad (\Delta \text{ en radians})$$

ou, en secondes d'angle,

$$\log \Delta'' = 0,2422722; \quad (\Delta \text{ en secondes d'angle})$$

d'où

$$\Delta = 1''75.$$

Ce résultat a été vérifié par les mesures effectuées sur les clichés obtenus par les deux expéditions anglaises, lors de l'éclipse totale de Soleil du 29 mai 1919 (*).

(*) *The Observatory*, November 1919. Joint Eclipse meeting of the Royal Society and the Royal Astronomical Society.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

- Chaix (Émile)*. Les formes topographiques du parc national suisse. Berne, 1918; gr. in-8° (pp. 170-216, planches).
- Delacre (Maurice)*. Sur l'isophorone. Paris, 1918; extr. in-8° (pp. 219-232).
- Recherches sur la constitution de la dypnopinacone et de ses dérivés. Paris, 1914-1918; extr. in-8° (6 brochures).
- Forcrand (R. de)*. Cours de chimie à l'usage des étudiants P. C. N. et S. P. C. N. Tome I. Paris, 1918; in-8° (432 p.). Tome II. Paris, 1919 (526 p.).
- Healey Dall (William)*. Spencer Fullerton Baird. A Biography. Philadelphie. Londres, 1915; in-4° (463 p., planches).
- Jonckheere (Robert)*. Méthode graphique pour déterminer les éléments des orbites des étoiles doubles. Paris, 1908; extr. in-8° (pp. 3-5).
- Mesures de quelques étoiles doubles faites avec le petit réfracteur de l'Observatoire de Strasbourg. Paris, 1908; extr. in-8° (pp. 1-3).
- Études sur la planète Mars à l'Observatoire d'Hem. Paris, 1909; extr. in-4° (pp. 1-3).
- Sur l'éclipse totale de Lune des 16-17 novembre 1910 à Hem. Paris, 1910; extr. in-4° (pp. 1-2).
- Mesures d'étoiles doubles à l'Observatoire de Lille. Edinburgh, 1911; extr. in-8° (pp. 156-165).
- Nouvelles étoiles doubles. Sixième série. Edinburgh, 1911; extr. in-8° (pp. 45-49).
- Cent nouvelles étoiles doubles. Cinquième série. Edinburgh, 1911; extr. in-8° (pp. 750-755).
- Sur la découverte d'étoiles doubles nouvelles à l'Observatoire de Hem. Paris, 1911; extr. in-4° (pp. 1-2).
- Sur la longitude de l'Observatoire de Lille, déterminée par télégraphie sans fil. Edinburgh, 1912; extr. in-8° (pp. 187-190).
- Étoiles doubles nouvelles découvertes à l'Observatoire de Lille. Paris, 1913; extr. in-4° (pp. 1-3).

- Jonckheere (Robert)*. Journal astronomique, publié par l'Observatoire de l'Université de Lille. Nouvelles étoiles doubles. Lille, 1912; extr. in-4° (4 p.).
- Éphémérides d'étoiles doubles. Lille, 1912; extr. in-4° (4 p.).
 - Nouvelles étoiles doubles. Lille, 1913; extr. in-4° (4 p.).
 - Éphémérides d'étoiles doubles. Deuxième série. Lille, 1913; extr. in-4° (4 p.).
 - Éphémérides d'étoiles doubles. Troisième série. Lille, 1914; extr. in-4° (4 p.).
 - Measures of the diameter of mercury obtained at the royal observatory, Greenwich, during the transit of 1914. November, 6-7. Edinburgh, 1914; extr. in-8° (pp. 31-34).
 - Observations of Encke's comet (1917*c*) made with the 28-inch equatorial at the royal observatory, Greenwich. Edinburgh, 1918; extr. in-8° (1 p.).
 - Prix Lalande. Paris, 1917; extr. in-4° (2 p.).
 - Measures of double stars. Albany, 1917; extr. in-4° (pp. 1-8).
 - Catalogue and Measures of double stars. Londres, 1917; in-4° (203 p.).
 - On the corrections of double star orbits determined graphically, and an application to a preliminary orbit of Sirius. Edinburgh, 1918; extr. in-8° (pp. 657-663).
 - The period of Sirius. Edinburgh, 1918; extr. in-8° (pp. 480-483).
 - Observations of Sirius and Procyon made with the 28-inch refractor of the royal observatory, Greenwich. Edinburgh, 1918; extr. in-8° (pp. 479-480).
 - Observations of Encke's comet (1917*c*) made with the 28-inch equatorial at the royal observatory, Greenwich. Edinburgh, 1918; extr. in-8° (pp. 448-449).
 - Measures of double stars. Albany, 1918; extr. in-4° (pp. 113-130).
- Macdonald (Arthur)*. Anthropometry of civilized man. Washington, 1919; extr. in-4° (3 p.).
- Micheels (Henri)*. Note sur la forme du Thalle chez *Dictyota dichotoma*. Naples, 1910; extr. gr. in-8° (pp. 379-383).
- Action du courant galvanique continu sur la germination. Bruxelles, 1910; extr. in-8° (pp. 51-101).
 - Action des liquides anodiques et cathodiques sur certains organismes marins. Liège-Paris, 1911; extr. gr. in-8° (pp. 341-349).

- Micheels (Henri)*. Recherches sur *Caulerpa prolifera*. Bruxelles, 1911; extr. in-8° (pp. 110-179).
- Mode d'action des solutions étendues d'électrolytes sur la germination. Bruxelles, 1912; extr. gr. in-8° (pp. 753-765).
 - Action des solutions anodisées et cathodisées sur la germination. Bruxelles, 1913; extr. gr. in-8° (pp. 831-887).
- Séllys-Longchamps (Marc de)*. Évolution des stigmates branchiaux. Bruxelles, 1914; extr. in-8° (pp. 127-138).
- Autotomie et régénération des viscères chez *Polycarpa tenera* Lacaze et Delage. Paris, 1915; extr. in-8° (pp. 1-3).
 - Sur un mode nouveau de bourgeonnement chez un tunicier du groupe des polystyélidés : les statoblastes de *Stolonica socialis Hartmeyer* (1903). Paris, 1916; extr. in-8° (pp. 6-15).
 - Sur le bourgeonnement des polystyélidés. Paris, 1917; extr. in-8° (pp. 170-276, planches).
- Servais (Clément)*. Sur les transformations birationnelles quadratiques. Gand, 1888; extr. in-8° (pp. 1-25).
- Sur la courbure dans les coniques. Paris, 1888; extr. in-8° (pp. 1-6).
 - Sur les ombilics dans les surfaces du second degré. Gand, 1889; extr. in-8° (pp. 366-384).
 - Sur les points d'inflexion dans les cubiques. Bruxelles, 1890; extr. in-8° (pp. 453-462).
 - Sur les centres de courbure des lignes décrites pendant le déplacement d'une figure plane dans son plan. Bruxelles, 1890; extr. in-8° (pp. 241-245).
 - Sur l'hyperbole équilatère. Bruxelles, 1890; extr. in-8° (pp. 759-763).
 - Sur la courbure de la podaire et de la polaire réciproque d'une courbe donnée. Gand, 1891; extr. in-8° (pp. 1-7).
- Servais (Clément)*. Sur les courbures des polaires en un point d'une courbe d'ordre n . Bruxelles, 1891; extr. in-8° (pp. 362-367).
- Sur les coniques osculatrices dans les courbes du troisième ordre. Bruxelles, 1892; extr. in-8° (pp. 522-527).
 - Sur le système focal. Bruxelles, 1895; extr. in-8° (pp. 3-11).
 - Sur les imaginaires en géométrie. Applications à la théorie des cubiques gauches. Gand-Paris, 1894; in-8° (64 p.).

- Servais (Clément)*. La projectivité imaginaire. Bruxelles, 1895; in-8° (51 p., fig.).
- La courbure et la torsion dans la collinéation et la réciprocité. Bruxelles, 1898; extr. in-8° (pp. 3-48).
 - Sur les faisceaux de coniques. Paris, 1902; extr. in-8° (pp. 1-10).
 - Sur les faisceaux de surfaces du second ordre. Bruxelles, 1904; in-8° (53 p.).
 - Sur la courbure des coniques et des cubiques gauches. Bruxelles, 1906; in-8° (23 p.).
 - Sur les points focaux dans les surfaces du second degré. Coimbra, 1907; extr. gr. in-8° (pp. 1-24).
 - Sur les centres de courbure principaux de trois quadriques homofocales. Coimbra, 1910; extr. gr. in-8° (pp. 1-16).
 - Propriétés des tangentes communes à deux quadriques homofocales. Coimbra, 1911; extr. gr. in-8° (pp. 1-5).
 - Analogies dans la courbure des courbes et des surfaces du second ordre. Coimbra, 1911; extr. gr. in-8° (pp. 1-13).
 - Sur les cubiques gauches. Coimbra, 1911; extr. gr. in-8° (pp. 1-4).
 - Sur la courbure des biquadratiques gauches de première espèce. Paris, 1911; extr. in-8° (pp. 1-14).
 - Relations entre les courbures totales de deux surfaces polaires réciproques. 1912, s. l.; extr. in-8° (pp. 1-8).
 - Extension des théorèmes de Frégier aux courbes et aux surfaces algébriques. Paris, 1912; extr. in-8° (pp. 1-12).
 - Sur les biquadratiques gauches de première espèce. Coimbra, 1913; extr. gr. in-8° (pp. 1-42).
 - Sur les axes de l'indicatrice et les centres de courbure principaux en un point d'une surface du second ordre. Paris, 1914; extr. in-8° (pp. 1-26).
 - Sur l'hyperbole de Feuerbach. 1915, s. l.; extr. in-8° (pp. 1-14).
 - Sur les surfaces réglées. Coimbra, 1919; extr. gr. in-8° (pp. 1-23).
 - Sur le complexe des axes d'une quadrique. S. l. n. d.; extr. in-8° (pp. 1-8).
 - Sur les quadriques homofocales. S. l. n. d.; extr. in-8° (pp. 1-10).

Zunz (Edgar). Recherches expérimentales sur les effets de la transfusion dans les divers états de collapsus circulatoire. Bruxelles, 1919; extr. in-8° (pp. 4-60).

— Recherches sur l'action de la diglycylglycine, de la tétraglycylglycine et du sérum de cheval chez des lapins soumis au préalable à des injections de glycocolle. Liège-Paris, 1919; extr. in-8° (pp. 192-202).

— Recherches sur l'action de la diglycylglycine, de la tétraglycylglycine et du sérum de cheval chez des lapins soumis au préalable à des injections de tétraglycylglycine. Liège-Paris, 1919; extr. in-8° (pp. 179-191).

— Sur la teneur en iode du corps thyroïde chez l'homme. Paris, 1919; extr. in-8° (2 p.).

— Sur la présence d'histamine dans les muscles atteints de gangrène gazeuse. Paris, 1919, extr. in 8° (2 p.).

— Sur la teneur en azote et en résidu sec du thymus et du corps thyroïde chez l'homme et sur les rapports pondéraux entre ces deux organes. Paris, 1919; extr. in 8° (3 p.).

Cesàro (G.). Note on the liquidus in the iron-carbon diagram. Londres, 1919; extr. in-8° (pp. 447-456).

De Donder (Th.). Théorie du champ électromagnétique de Maxwell-Lorentz et du champ gravifique d'Einstein. Paris, 1920; in 8° (102 p.).

Machado (Virgilio). Elementos de Neurossemiologia clinica. Lisbonne, 1919; gr. in-8° (187 p.).

Mascart (Jean). La recherche des documents météorologiques. Lyon, s. d.; in-8° (27 p.).

Murray (John). The Depths of the Ocean. Londres, 1912; in-8° (821 p., gravures, 1 portrait, rel., édit.).

Philippi (E.). Mesures pratiques en radioactivité. Paris, 1919; in-8° (181 p.).

Raspail (Xavier). Raspail et Pasteur. Trente ans de critiques médicales et scientifiques (1884-1914). Paris, 1916; gr. in-8° (526 p., 1 portrait).

Rouillard (Aug.). Dictionnaire des rivières et des lacs de la province de Québec. Québec, 1914; gr. in-8° (432 p.).

Straunard (R.). La fourbure du cheval. Paris, 1919; in-8° (218 planches).

TABLE DES MATIÈRES

Séance du 10 janvier 1920.

M. le Vice-Directeur félicite MM. V. Willem, Chevalier de l'Ordre de la Couronne; A. Brachet, docteur <i>honoris causa</i> des Universités de Paris et de Strasbourg; M. Gilkinet, qui a été l'objet d'une manifestation de sympathie organisée en son honneur par ses anciens élèves, à l'occasion de son admission à l'éméritat	5
COMITÉ SECRET : M. Cesàro, élu directeur pour 1921	5
Élection des délégués à la Commission de la Biographie nationale	5
CORRESPONDANCE : Remerciement des nouveaux élus. — L'Union océanographique internationale annonce sa constitution. — M. Robert Verstraeten dépose un pli cacheté. — Hommages d'ouvrages.	6
RAPPORTS	6
PRIX PERPÉTUELS.	7
PRIX DÉCENNAUX	7
COMMUNICATION	7

BIBLIOGRAPHIE :

DELACRE (MAURICE). — <i>La Dypnopinacone et le problème de l'individualité chimique</i> , note par l'auteur	8
---	---

Communications et Lectures.

PHYSIQUE. — <i>Note sur la résistance de l'air dans le cas des projectiles ogivaux</i> , par A. Errera	15
--	----

Séance du 7 février 1920.

NÉCROLOGIE. — Décès de M. Jules Boulvin	27
M. le Directeur félicite MM. P. Nolf, Officier de l'Ordre de Léopold; Willem, Van der Stricht, membres associés de la Société des Sciences médicales et naturelles, et M. De Donder, dont les travaux viennent d'être cités avec éloges par sir Joseph Larmor, dans le <i>Times</i> du 7 janvier	27
CORRESPONDANCE : M. le Ministre des Sciences et des Arts approuvant l'élection de M. Servais et nommant M. Brunfaut, directeur de la Classe des beaux-arts, président de l'Académie. — M. Ledent demande une subvention de la Fondation De Potter. — L'Ambassade de France transmet le « Bulletin de la Direction des Recherches scientifiques et industrielles et des Inventions ». — L'École d'anthropologie annonce pour le mois de juillet une réunion générale, préparatoire à la fondation d'un Institut international d'anthropologie. — L'Observatoire astronomique de Lisbonne annonce la mort de son directeur, le vice-amiral C.-A. Campos Rodrigues. — M. le Ministre des Sciences et des Arts fait savoir qu'il approuve les Statuts du Conseil international de Recherches et qu'il reconnaît l'Académie comme « Corps adhérent » à ce Conseil et à ses Unions. — Hommage d'ouvrage	28
RAPPORTS	29
PRIX DÉCENNAUX	29
BUSTES	29
CENTENAIRE DE L'ACADÉMIE.	29
CONSEILS NATIONAL ET INTERNATIONAL DE RECHERCHES	30
RAPPORTS	30

Communications et Lectures.

PHYSIQUE EXPÉRIMENTALE. — <i>Sur l'observation de la dispersion anormale par la méthode des prismes opposés</i> , par J.-E. Verschaffelt et R. Crombez . . .	31
BOTANIQUE. — <i>L'action de la lumière continuée sur la structure des feuilles</i> , par Jean Massart . . .	37
PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — <i>Les équations du champ de gravitation d'Einstein</i> , par H. Vanderlinden . . .	43
<i>La mensuration de la fatigue intellectuelle des écoliers au moyen d'une échelle visuelle permettant d'opérer simultanément sur tous les élèves d'une classe</i> , par L. Remy . . .	52

Séance du 6 mars 1920.

M. le Directeur félicite MM. Lagrange, Commandeur de l'Ordre de Léopold, Cornet, Officier, et Crismer, Chevalier; MM. Bordet et Brachet, élus respectivement membre et correspondant de l'Académie royale de médecine, et M. Julin, membre honoraire de la Société Zoologique de France . . .	77
CORRESPONDANCE : L'Académie des Sciences et Lettres du Danemark annonce la mort de son ancien secrétaire, M. H.-G. Zeuthen. — La Société Chimique de Londres fait savoir qu'elle annonce dans ses <i>Proceedings</i> la question de concours posée par l'Académie : « Contribution à l'étude de la Valence ». — Le Comité exécutif du Conseil international de Recherches annonce que la Convention du C. I. R. est entrée en vigueur le 1 ^{er} janvier 1920 et que les Pays-Bas, l'Espagne, la Norvège et la principauté de Monaco ont adhéré au Conseil international. — MM. Ledent et De Donder demandent chacun d'accepter le dépôt d'un pli cacheté. — M. Larose communique un mémoire. — Hommages d'ouvrages . . .	78
RAPPORTS . . .	78
AUGMENTATION DE LA VALEUR DES MÉDAILLES DE CONCOURS . . .	79
CONSEIL DE RECHERCHES. . .	79
JURY DU PRIX DÉCENNAL DES SCIENCES MATHÉMATIQUES . . .	79
COMMISSION ADMINISTRATIVE . . .	79
BANQUET ANNUEL . . .	79
MOTION ET PROPOSITION . . .	80
LECTURES . . .	82

Communications et Lectures.

<i>Recherches sur les organismes inférieurs. — VII. Les réflexes chez les polyporées</i> , par Jean Massart . . .	28
ASTRONOMIE. — <i>La trajectoire d'un rayon lumineux dans le champ de gravitation d'Einstein-Schwarzschild</i> , par H. Vanderlinden. . .	90
Bulletin bibliographique . . .	98

Le fonds des publications académiques ayant été systématiquement pillé par les Allemands, il ne sera plus possible de donner suite aux demandes de combler les lacunes antérieures à 1919.

19-4-20.

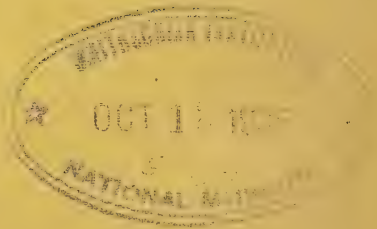
ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

BULLETIN

DE LA

CLASSE DES SCIENCES

1920 — N^{os} 4-5



BRUXELLES

MAURICE LAMERTIN

LIBRAIRE-ÉDITEUR

Rue Coudenberg, 58-62

M. HAYEZ

IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE

Rue de Louvain, 112

1920

Séance du samedi 10 avril 1920.

M. A. GRAVIS, directeur de la Classe.

M. P. PELSENEER, secrétaire perpétuel.

Sont présents : MM. G. Cesàro, vice-directeur, A. Gilkinet, C. le Paige, J. Deruyts, Léon Fredericq, A. Lameere, Ch.-J. de la Vallée Poussin, F. Swarts, Jean Massart, A. Rutot, A. de Hemptinne, Victor Willem, P. Stroobant, Ch. Julin, J. Verschaffelt, Émile Marchal, Pierre Nolf, Jules Bordet, *membres*; M. Stuyvaert, A. Brachet, P. Fourmarier, O. Van der Stricht, Th. De Donder, *correspondants*.

Absences motivées : MM. Lohest et Lecoïnte, membres : MM. de Dorlodot et Grégoire, *correspondants*.

M. le Directeur rend hommage à la mémoire de M. Paul Fredericq et exprime à M. Léon Fredericq les sentiments de condoléance de la Classe. Il félicite M. Bordet, qui a été autorisé à porter l'Étoile d'argent de la Reconnaissance nationale sur sa décoration de l'Ordre de Léopold.

CORRESPONDANCE.

Le Congrès international des mathématiciens qui se tiendra le 22 septembre prochain, à Strasbourg, invite l'Académie à s'y faire représenter. MM. Deruyts, de la Vallée Poussin, Stuyvaert et éventuellement M. Demoulin, sont nommés délégués de la Classe.

L'Académie royale des sciences de Madrid annonce la mort de son ancien secrétaire général Francisco de P. Arrilaga. Une lettre de condoléance lui sera adressée.

M. Mac Alister de Dublin est autorisé à reproduire certaines figures d'anciens volumes du *Bulletin* de la Classe.

La Commission géophysique de Norwège demande l'échange de publications; le *Bulletin* de la Classe des sciences lui sera adressé.

HOMMAGES D'OUVRAGES.

J. Masek. *Zakon Hospodamosti*.

A. Gravis. *Archives de l'Institut botanique de l'Université de Liège*. Vol. V.

-- Remerciements.

COMITÉ SECRET.

La Classe prend connaissance des candidatures proposées par la Section des sciences mathématiques et physiques, pour les places vacantes de correspondant et d'associé.

RAPPORTS.

1° De MM. Fredericq, Willem, Massart et Marchal, sur le Prix Errera, 3^e période. Sur la proposition des rapporteurs, le Prix est attribué à l'ensemble des publications de M. Maurice Herlant.

2° De M. Stuyvaert, sur un travail de M. Larose : *Réalisation de l'Idée pestalozzienne*. Le dépôt aux archives est proposé et voté.

3° De MM. Brachet et Lameere, sur un travail de M. Verlaine, intitulé : *Note sur la Spermiogenèse et la double Spermatogenèse des Lépidoptères*. L'impression dans les mémoires in-8° est décidée, sous réserve de certaines modifications proposées par les rapporteurs.

150^e ANNIVERSAIRE DE L'ACADÉMIE.

La Classe autorise les délégués à la sous-commission de la publication anniversaire de désigner eux-mêmes leurs collaborateurs éventuels.

MOTION DE M. LAMEERE.

A propos d'un projet de loi sur la transformation de l'Université de Gand. Après une discussion à laquelle prennent part MM. Lameere, Verschaffelt, Willem, Gilkinet, Fredericq, Cesàro, Bordet et Brachet, la Classe vote, à l'unanimité moins une voix la résolution suivante : La Classe des sciences de l'Académie royale de Belgique déclare qu'il serait contraire à l'intérêt scientifique du pays de transformer l'Université actuelle de Gand en université de langue flamande. — Elle prie instamment la Chambre des Représentants de repousser le projet de loi qui lui est présenté dans le but d'opérer cette transformation.

M. Nolf annonce que l'inauguration de la statue d'Éd. Van Beneden aura lieu à Liège le lundi 24 mai, et, au nom du Comité, invite l'Académie à se faire représenter à cette inauguration.

COMMUNICATIONS ET LECTURES.

Après lecture des communications reproduites ci-après, M. Verschaffelt en fait une, verbale, sur les poids atomiques.

M. Nolf fait connaître l'existence d'un mémoire inédit d'Éd. Van Beneden, *Sur l'Organisation des Cerianthides*, avec de nombreuses planches, dont la rédaction est à peu près définitive. A la suite de communications faites par MM. Willem et Brachet, la Classe décide en principe de s'occuper de la publication de ce mémoire, en recourant au besoin à certaines fondations.

Sur la proposition de M. Swarts, il est décidé que la Classe s'occupera, dans sa prochaine séance, de la désignation des délégués de l'Académie auprès des diverses unions internationales.

MOTION DE M. MASSART.

La Classe adopte le vœu suivant présenté par M. Massart :

« Il est hautement désirable que les nombreux problèmes biologiques qui se présentent dans les régions dévastées par la guerre soient étudiés sans retard : reconstitution des forêts dont les arbres ont été tués; colonisation des terrains bouleversés par le bombardement; remplacement de la faune et de la flore saumâtres ou marines dans les inondations de l'Yser, etc.

» Les deux points les plus intéressants sont sans doute Houthulst et Nieuport.

» Des laboratoires et logements pour les travailleurs chargés de ces études devraient être installés dans des baraquements tels que ceux du Fonds du Roi Albert. »

Ce vœu sera communiqué aux Ministres des Sciences et des Arts, de l'Agriculture, de l'Intérieur, des Affaires Économiques, ainsi qu'aux Hauts Commissaires royaux du littoral, d'Ypres et de la Flandre occidentale.

PRIX LEO ERRERA.

(3^e période.)

Rapport de M. Victor Willem.

Des deux collections, très méritantes, de travaux soumis à notre appréciation, je mets en première ligne celle de M. Maurice Herlant, en raison de la plus grande portée des résultats obtenus.

A. — Toute l'œuvre de M. Herlant est consacrée à la fécondation de l'œuf, ou plus exactement à l'analyse expérimentale des facteurs internes qui déterminent l'œuf à sortir de son état d'inertie, pour se segmenter et commencer une ontogenèse. Les travaux soumis au jury peuvent se répartir en trois groupes, dont chacun correspond à une technique spéciale et à des buts expérimentaux définis.

1. Étude des œufs de grenouille rendus artificiellement dispermiques ou trispermiques. L'auteur, en précisant la notion de l'énergie spermatique, a reconnu que l'une des causes principales de la monospermie normale dans la fécondation consiste dans un changement de l'état physique du cytoplasme, provoqué par la pénétration du spermatozoïde, qui se traduit par l'irradiation astérienne et qui exclut toute pénétration ultérieure de spermatozoïdes accessoires.

Il a ajouté des faits nouveaux et intéressants à la connaissance de l'origine de la symétrie bilatérale de l'œuf fécondé, et a clairement montré pourquoi le têtard, en apparence bien conformé, provenant d'un œuf dispermique, doit mourir prématurément, malgré qu'il puisse vivre durant trois mois.

2. Recherches sur la parthénogenèse expérimentale : traumatique chez la grenouille, selon la méthode de Loeb chez des Échinodermes. Dans ces travaux très importants, Herlant donne, pour la première fois, l'explication cytologique de la parthénogenèse. Sans entrer dans le détail, il montre que, ni dans celle de Loeb, ni par conséquent dans celle de Delage, le second temps de la parthénogenèse ne reproduit un acte normal de la fécondation, mais introduit quelque chose d'autre qui remplace cet acte par un autre, équivalent, mais dont le mécanisme est différent. Le premier temps, au contraire, qui détermine l'activation de l'œuf, déclanche un mécanisme qui ne diffère en rien de celui de la fécondation normale.

3. L'œuf vierge, l'œuf fécondé, l'œuf activé par un agent de parthénogenèse, ne sont pas dans les mêmes relations avec le milieu où ils vivent. Leur perméabilité, spécialement à l'eau et aux sels, n'est pas la même. Herlant montre que dès son activation, l'œuf passe par des changements réguliers de perméabilité (augmentation et diminution), qui suivent une évolution cyclique. Le premier cycle se ferme à l'anaphase de la première segmentation ; un autre recommence pour la seconde, etc. Ces

recherches, dans un domaine de la physico-chimie de l'œuf qui commence seulement à être exploré, ont donné des résultats fort encourageants; conjointement avec les recherches, simultanées ou postérieures, de Kite et de Chambers, sur les changements d'état des colloïdes de l'œuf aux mêmes stades, elles font apercevoir dans le protoplasme un jeu d'actions et de réactions très important.

B. — M. H. Kufferath soumet au jury un nombre considérable de mémoires portant sur la physiologie de la nutrition chez des algues, sur la flore algologique de districts belges, sur des sujets de bactériologie théorique ou appliquée. Je laisserai à mes collègues botanistes le soin de mettre en lumière la valeur de ces publications; mais je crois avoir des sujets traités une connaissance générale suffisante pour oser affirmer que l'œuvre, très sérieuse, de Kufferath, n'a pas l'importance de celle que j'ai mise en première ligne.

Je propose d'accorder à M. Herlant le prix Errera; je verrais avec plaisir accorder à M. Kufferath une mention très honorable.

Rapport de M. Massart.

Je suis heureux de pouvoir me rallier pleinement au rapport de mon savant confrère M. Willem. Je me permets d'attirer tout spécialement l'attention sur les travaux de M. Herlant publiés en 1918 et 1919; ils ont été effectués par l'auteur, alors qu'il était déjà atteint du mal, contracté au front en janvier 1915, qui l'a, hélas! emporté il y a quelques jours.

Rapport de M. Marchal.

C'est de grand cœur que je m'associe à l'hommage posthume que l'Académie va pouvoir rendre à l'œuvre scientifique du regretté Maurice Herlant en la couronnant du prix Errera. Je souligne, d'autre part, en l'appuyant, la proposition de mon

savant confrère M. Willem, tendant à accorder à M. Kufferath une mention très honorable.

La réelle valeur des travaux de M. Kufferath me semble justifier pleinement l'attribution de cette distinction.

COMMUNICATIONS ET LECTURES.

Sur la forme de l'alvéole de l'abeille,

par G. CESÀRO, vice-directeur de la Classe.

On sait que l'alvéole de l'abeille est formé d'un prisme hexagonal régulier fermé à une extrémité par trois faces rhombes issues d'un point situé sur l'axe du prisme, également inclinées sur cet axe et coupant des distances égales sur trois arêtes latérales, non consécutives du prisme. La position de ce point est choisie par l'abeille de manière que la surface de l'alvéole soit le plus petite possible.

On peut se demander si l'alvéole ainsi construit n'a pas des propriétés géométriques remarquables, si ses angles dièdres n'ont pas des valeurs simples et si le polyèdre qu'il représente ne peut être déduit facilement d'un solide connu. Ce sont ces deux points qui constituent le but de ma communication. J'y ajouterai deux propriétés de l'alvéole, dont l'une très remarquable.

*
* *
*

FORME DE L'ALVÉOLE. — Sur trois arêtes latérales non consécutives d'un prisme hexagonal régulier (fig. 1), prenons des longueurs égales $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, et traçons le triangle équilatéral $\alpha\beta\gamma$. Par un point S pris sur l'axe du prisme menons trois plans passant respectivement par un des côtés du triangle $\alpha\beta\gamma$; on obtient ainsi les trois faces rhombes qui clôturent l'alvéole; une de ces faces se construit facilement en joignant S au point m milieu d'un des côtés du triangle et prolongeant Sm

jusqu'à son point de rencontre en T avec l'arête latérale DT du prisme hexagonal. On obtient ainsi un solide formé de dix faces : l'hexagone régulier de base, six trapèzes latéraux égaux

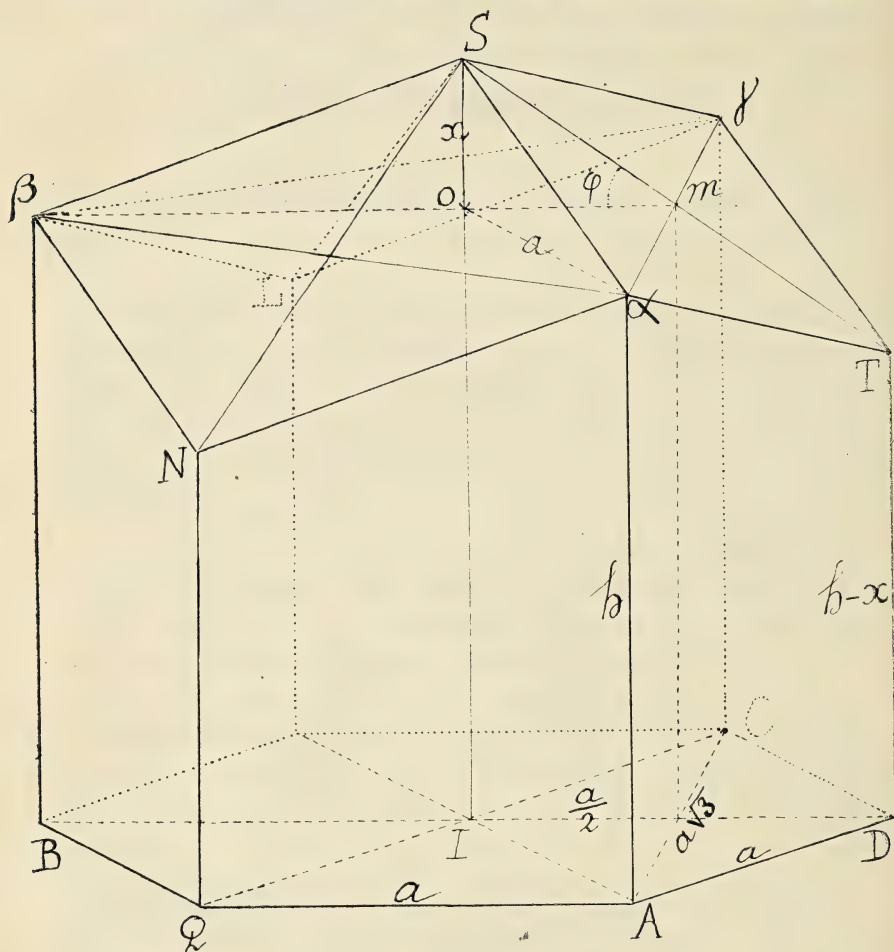


FIG. 1.

tels que ADT_α et trois faces rhombes égales de clôture. La distance du plan du triangle $\alpha\beta\gamma$ à celui de l'hexagone de base est une constante (*) que nous désignerons par h . La variable

(*) Voir la Note.

du problème est la position du point S, dont on désigne par x la distance au plan du triangle $\alpha\beta\gamma$.

Il est facile de voir que la surface de l'alvéole se compose de deux parties variant en sens inverse avec x : lorsque S s'approche du plan $\alpha\beta\gamma$, le triangle $Sx\gamma$ va en diminuant, vu qu'il se rapproche de sa projection, et il en est de même du losange $SxT\gamma$; donc la surface de l'ensemble des trois faces de clôture *diminue* lorsque x diminue; au contraire, comme à l'abaissement du point S correspond un relèvement du point T, le trapèze αADT , dont la hauteur a (*) et une base Ax restent invariables, voit sa seconde base DT , et, par conséquent, sa surface augmenter, de sorte que la surface de l'ensemble des six trapèzes latéraux va en *augmentant* lorsque x diminue. On conçoit par là que pour une certaine position du point S la surface de l'alvéole passe par un minimum. En exprimant cette surface en fonction de x , on obtient

$$\begin{aligned} \text{Surf.} &= 3a\sqrt{3}\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} + 3a(2h - x) \quad (**) \\ &= 3a\left(\sqrt{3}\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} - x\right) + 6ah. \end{aligned} \quad (1)$$

En cherchant le minimum de la quantité entre parenthèses, on trouve qu'il correspond à

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{4},$$

c'est-à-dire que le sommet S doit être distant du plan du triangle $\alpha\beta\gamma$ d'une longueur égale au quart de la diagonale du carré construit sur le côté de l'hexagone de base.

*
* * *

(*) Nous désignons par a le côté de l'hexagone de base.

(**) Le plan du triangle équilatéral NTL coupe sur l'axe de l'alvéole, à partir du point O, une distance égale à x ; en effet, les droites Nx et βS étant égales et parallèles, leurs projections sur l'axe de l'alvéole sont égales entre elles.

ANGLES DIÈDRES DE L'ALVÉOLE. — Si l'on calcule d'abord l'angle φ sous lequel les plans des losanges culminants sont inclinés sur le plan $\alpha\beta\gamma$ (*), puis que l'on en déduise la valeur de l'angle dièdre $S\alpha$ du trièdre de clôture, on obtient 120° ; les dièdres des six arêtes latérales en zigzag telles que βN , $N\alpha$, αT , ... sont aussi de 120° , et comme les faces latérales du prisme hexagonal se coupent aussi sous l'angle de 120° , on voit que « tous les » angles dièdres de l'alvéole, à l'exception des six angles » basiques, sont de 120° ».

Les choses se passent comme si le pouvoir édificateur de l'abeille lui permettait de construire des parois inclinées l'une sur l'autre à 120° . Le travail à 120° commence à s'effectuer suivant l'arête QN du prisme hexagonal, puis, lorsque le moment de commencer la fermeture est arrivé, l'abeille se dirige obliquement suivant $N\alpha$ tout en continuant son édification à 120° ; enfin, lorsque le triangle $\alpha\beta\gamma$ est atteint, elle achève la clôture en se dirigeant suivant αS , tout en continuant à bâtir des parois inclinées les unes sur les autres à 120° .

Il se pourrait que là se trouve l'explication de la forme de l'alvéole, la propriété du minimum de surface n'étant que fortuite (**).

*
* * *

LA FORME DE L'ALVÉOLE SE DÉDUIT TRÈS SIMPLEMENT DU CUBE. — Si sur chaque face du cube, dessiné en ponctué dans la figure 2, on place une pyramide régulière dont les faces sont inclinées à 45° sur celle du cube, comme les faces triangulaires telles que

(*) Le triangle rectangle SOm , qui a pour côtés $x = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ et $Om = \frac{a}{2}$, donne $tg\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(**) Cependant, il reste toujours un sentiment de direction, que l'on est bien forcé d'attribuer à ce que l'on appelle l'instinct; c'est celui par lequel l'abeille, arrivée en N, dirige son travail à 120° suivant $N\alpha$, puis suivant αS , chacune des nouvelles directions faisant avec celle qu'elle vient de quitter un angle de $109^\circ 28'$.

γ TV, VTK de deux pyramides ayant l'arête VT commune sont dans un même plan, on obtient un solide formé de douze faces rhombes, le *rhombododécaèdre*. Toutes les arêtes de ce solide sont de 120° (*). On voit facilement que c'est là la forme de l'alvéole.

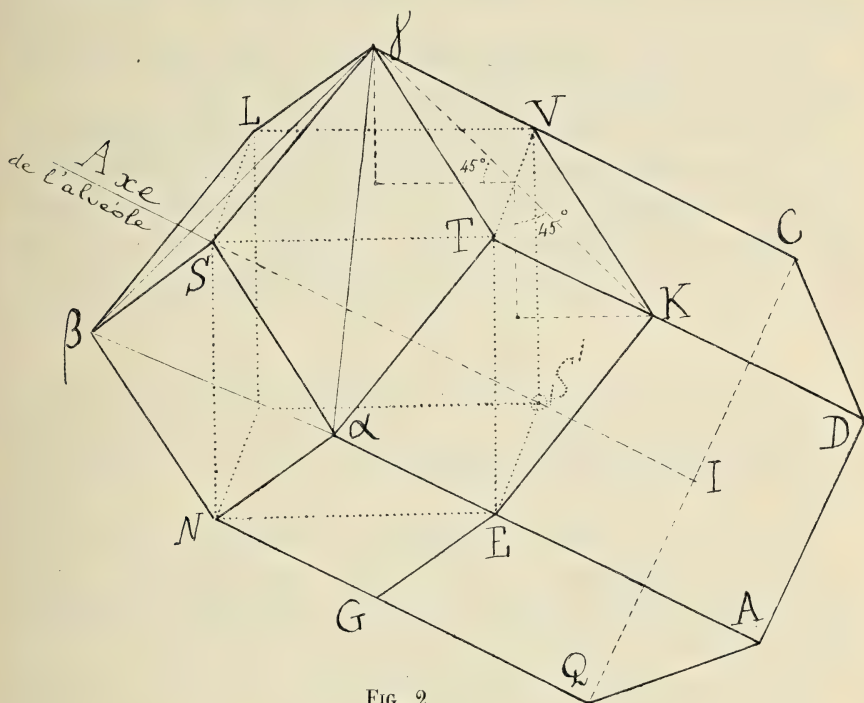


FIG. 2.

L'axe de l'alvéole est la diagonale SS' du cube; le triangle de fermeture est $\alpha\beta\gamma$ (**); les trois losanges de clôture sont SN, ST, SL; les arêtes culminantes sont $S\alpha$, $S\beta$, $S\gamma$ et les arêtes en zigzag $T\alpha$, αN , $N\beta$, βL , $L\gamma$ et γT ; les six arêtes NG, αE , TK, γV , ... sont parallèles à la diagonale du cube SS' et, prolongées, constituent le corps hexagonal de l'alvéole; enfin,

(*) C'est l'angle dièdre d'une pyramide régulière à base carrée, dont les faces sont inclinées à 45° sur la base.

(**) Les points correspondants sont représentés par la même lettre sur les figures 1 et 2.

une face normale à la diagonale du cube, face qui appartient à l'octaèdre régulier, et qui placée en S couperait le trièdre de clôture suivant un triangle équilatéral, déplacée en QADC couperait les six faces du rhombododécaèdre qui constituent le corps hexagonal de l'alvéole suivant un hexagone régulier qui est la base.

Dans la figure 1 les droites SN, ST, SL sont trois arêtes du cube, SI une diagonale, prolongée, du même solide.

En somme : *L'alvéole est un rhombododécaèdre dont trois faces forment la clôture et six faces, parallèles à une diagonale du cube, diagonale qui est l'axe de l'alvéole, constituent le corps hexagonal; le rhombododécaèdre est coupé par une face de l'octaèdre normale à l'axe et constituant la base hexagonale.*

*
* *

Propriété I. — *L'alvéole, tel que l'abeille le construit, correspond non seulement à un minimum de surface, mais aussi à un minimum de périmètre.*

Les arêtes du solide représenté par la figure 1, autres que celles de l'hexagone de base, sont les suivantes : trois arêtes culminantes et six arêtes en zigzag ayant pour longueur commune

$$Sx = \sqrt{x^2 + a^2};$$

six arêtes latérales prismatiques, dont trois ont pour longueur

$$Ax = h \quad \text{et trois} \quad DT = h - x \quad (*);$$

de sorte que le périmètre est

$$9\sqrt{x^2 + a^2} - 3x + 6h,$$

ou bien

$$6h + 3(3\sqrt{x^2 + a^2} - x).$$

(*) Voir la note 1 de la page 111.

En cherchant le minimum de la quantité entre parenthèses on trouve qu'il correspond à

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{4},$$

c'est-à-dire à la même valeur qui rend minima la surface de l'alvéole.

*
* *

Propriété II. — *La surface de l'alvéole égale la surface latérale du prisme hexagonal qui en forme le corps prolongé jusqu'au plan mené parallèlement à la base hexagonale par le sommet culminant S de l'alvéole.* — En effet, si dans la formule (1)

(page 111), on fait $x = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, on obtient

$$\text{Surf.}_{\min.} = 6a \left(h + \frac{a\sqrt{2}}{4} \right) = 6aH,$$

en désignant par H la distance du point S à la base de l'alvéole. Donc, etc.

NOTE.

De prime abord on pourrait croire que l'espace disponible est la distance du point S à la base hexagonale. Mais il faut observer que les alvéoles sont adossés de manière que la pointe de clôture de l'un d'eux vient se placer dans le creux formé par les pointes de trois alvéoles appartenant à la série dirigée en sens inverse, les faces formant la pointe du premier alvéole se plaçant chacune en coïncidence avec une face des trois derniers alvéoles. Il en résulte que les triangles $\alpha\beta\gamma$ des deux séries d'alvéoles se trouvent dans un même plan, de sorte que l'épaisseur constante qui sépare les plans des bases hexagonales des deux séries adossées est $2h$.

BOTANIQUE. — Recherches sur les organismes inférieurs.
VIII. — Sur la motilité des Flagellates,

par JEAN MASSART, membre de la Classe.

Pendant les années 1900 à 1902, j'ai eu l'occasion d'étudier de nombreux Flagellates du littoral. Les pêches les plus fructueuses ont été faites aux points suivants :

a) Le fossé d'eau saumâtre contournant l'« Ouvrage à cornes » des anciennes fortifications de Nieuport, sur la rive droite de l'Yser. C'est celui qui est connu des botanistes belges sous le nom de « Fossé aux *Ruppia* ». La densité de l'eau variait entre 1.015 et 1.025. Pendant la guerre, il a fait partie du système défensif de Nieuport : les plans l'appellent la « tranchée du Redan » ; il se continuait vers Lombartzyde par la « tranchée Dupuis ». Il communiquait avec les inondations tendues à l'ouest de la chaussée de Nieuport à Lombartzyde.

b) L'huître établie dans l'Ouvrage à cornes.

c) Les ruisselets d'eau saumâtre (densité environ 1.015) filtrant à travers la digue de la rive gauche de l'Yser, entre Nieuport-Ville et Nieuport-Bains.

d) Les mares et les fossés dans les polders de Coxyde ⁽¹⁾.

e) Les mares des dunes de Coxyde ⁽¹⁾.

Je remettais d'année en année la publication de mes observations, dans l'espoir de les compléter. Mais la guerre a tellement bouleversé cette région que je ne pourrai plus jamais retrouver les organismes étudiés. C'est pourquoi je me décide à publier mes recherches, malgré leurs imperfections. J'y ajoute quelques observations faites sur des espèces d'autre provenance.

⁽¹⁾ Voir dans *Recueil de l'Institut botanique Leo Errera*, t. VII, pp. 322 à 325 (1879), la composition chimique de l'eau des polders, des dunes et du fossé aux *Ruppia*.

Je m'attachais plutôt à la physiologie qu'à la morphologie. Néanmoins je dessinais les nombreuses espèces non encore décrites que je rencontrais ⁽¹⁾. Ce sont ces dessins, copiés par M. le docteur W. Conrad, qui sont représentés ici.

Toutes les figures sont au même grossissement (1 200/1), sauf indications contraires.

Les reproductions de pistes sont à un grossissement beaucoup moindre; elles sont marquées *P*. Le trait simple représente la natation libre; le trait coupé de petites barres, la natation fixée; le trait interrompu, le trajet suivi par un Flagellate qui se rejette brusquement en arrière; la croix marque un arrêt.

Toutes les cellules sont orientées avec le sens en mouvement vers le haut. Dans les coupes transversales, c'est la section de la moitié postérieure qu'on regarde.

- am*, amidon.
- b*, bouche.
- f*, fouet.
- gr*, globules graisseux.
- le*, leucosine.
- n*, noyau.
- pa*, paramylon.
- ph*, pharynx.
- pl*, plastide.
- py*, pyrénoloïde.
- s*, stigma.
- va*, vacuole alimentaire.
- vc*, vacuole contractile.
- Pf*, Piste de la natation fixée.
- Pl*, Piste de la natation libre.

1. TRANSITIONS ENTRE PSEUDOPODES ET FOUETS. — Un organisme trouvé dans une mare des dunes de Coxyde présente un état intermédiaire entre les Thécamébiens et les Flagellates (fig. 1). Le protoplasme, peu granuleux, remplit complètement une thèque transparente en forme de fève, fendue sur une face. La fente livre passage à des pseudopodes longs et minces, parfois ramifiés, ayant partout la même épaisseur; au lieu d'avoir les mouvements lents des pseudopodes de Rhizopodes, ceux-ci

(1) La description des nouvelles espèces sera donnée dans le *Recueil de l'Institut botanique Leo Errera*.

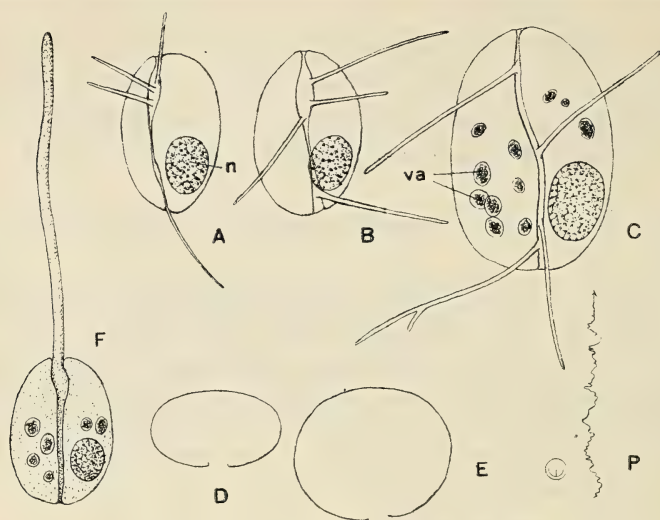


FIG. 1. — *Podomastix fabacea*, n. g., n. s. — A, B, C, individus nageants, vus par la face ventrale. — D, E, coupes transversales d'un petit et d'un gros individu. — F, individu rampant sur son unique pseudopode antérieur. — Dans une mare des dunes, à Coxyde. — Gr. 900/1.

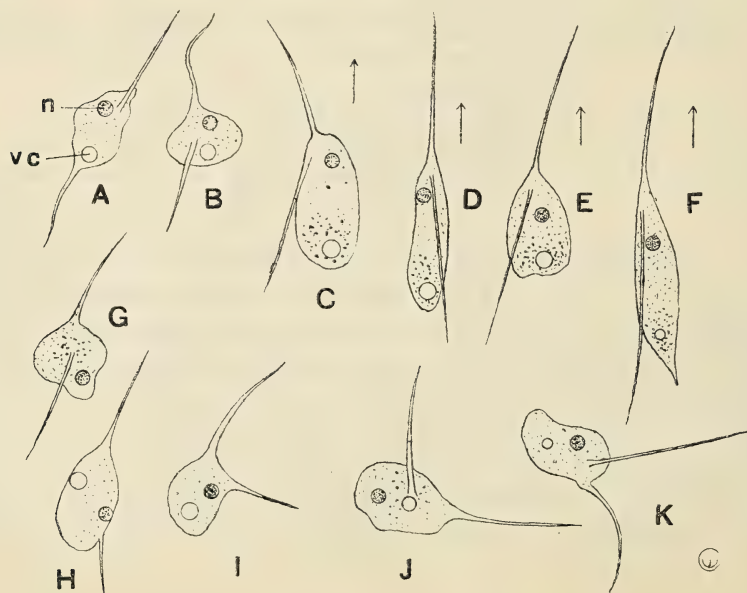


FIG. 2. — *Cercobodo primitiva*, n. s. — A, B, natation libre. — C à F, natation fixée. — G à K, reptation amiboïde : formes successives d'un même individu. — Dans une mare des dunes, à Coxyde.

battent l'eau à la façon de rames; ils ne se courbent pas, mais se plient tout contre la base. Leurs mouvements secouent l'organisme dans son ensemble et l'entraînent irrégulièrement à travers le liquide. Pendant la natation le bout opposé au noyau reste toujours en avant. Les pseudopodes n'ont qu'une existence temporaire; quand ils sont rétractés, ils ne s'épaississent pas, mais se fondent simplement par leur base dans la masse du cytoplasme.

Podomastix peut aussi s'attacher à un corps étranger; il rétracte alors tous ses pseudopodes, sauf un seul, qui est poussé tout droit en avant, et sur lequel l'organisme rampe en glissant.

Les fouets de *Cercobodo primitiva* (fig. 2) ont également de l'analogie avec des pseudopodes : ils constituent en définitive les prolongements effilés de pseudopodes, eux-mêmes déjà longs et fins, mais qui ne sont pourtant autre chose que des saillies du cytoplasme périphérique. Mais contrairement à ceux de *Podomastix*, ils sont permanents et occupent toujours la même place. Ils sont même différenciés en un fouet antérieur, servant à la natation, et un fouet postérieur, agissant comme gouvernail.

Lorsque *Cercobodo* nage librement, les deux fouets fonctionnent comme il vient d'être dit; en même temps le corps se déforme quelque peu. Mais l'organisme peut aussi avancer à l'aide de son fouet antérieur, en étant collé contre un objet étranger par le fouet postérieur et par une partie de son corps. Alors que la natation libre est accompagnée d'une rotation du corps autour de l'axe, la natation fixée se fait naturellement sans rotation.

Le même Flagellate possède encore un troisième mode de mouvement : il peut se fixer à un corps résistant par une large surface et exécuter des mouvements amiboïdes, des pseudopodes courts et gros se formant tantôt en un point, tantôt en un autre. Pendant cette reptation les fouets sont lancés dans toutes les directions.

Beaucoup de Flagellates possèdent les trois mêmes formes de mobilité : natation libre, natation fixée, reptation amiboïde.

2. NATATION LIBRE. — Chez la plupart des Flagellates la natation libre est accompagnée d'une *rotation* du corps autour de l'axe de translation.

Quand l'organisme est courbé pendant la natation, par exemple, *Menoidium pellucidum*, *M. incurvum* et *Astasia curvata* (fig. 31), la face convexe est toujours tournée vers l'extérieur de l'hélice décrite dans le liquide.

La plupart des *Cryptomonas* tournent sur eux-mêmes ; mais *C. caudata* (fig. 3) nage tout autrement. D'habitude il se déplace

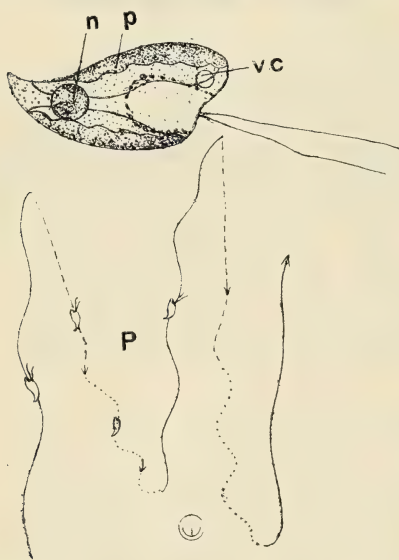


Fig. 3. — *Cryptomonas caudata*, n. s., nageant horizontalement. — Dans une mare des polders, à Coxyde.

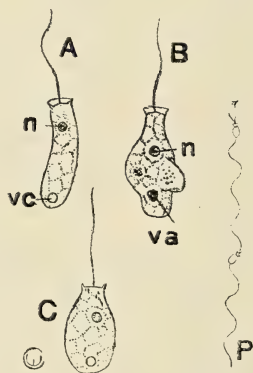


FIG. 4. — *Stephanomonas locellus* FROMENTEL. — Dans une fosse à purin à Francorchamps (province de Liège).

horizontalement ; il n'exécute alors aucune rotation, mais il bascule alternativement à droite et à gauche, autour d'un axe horizontal, ce qui se remarque le mieux à la queue. Puis brusquement il se jette en arrière, pour reprendre bientôt son mou-

vement balançant en avant. Quand il monte ou qu'il descend dans le liquide, il tourne à la façon normale.

Stephanomonas locellus (fig. 4) nage sans rotation avec de petits mouvements coniques : son extrémité postérieure décrit une ligne droite, tandis que le bout antérieur décrit une hélice, sans rotation autour de l'axe. Dans une portion basilaire de 3 à 4 μ , le fouet est absolument rigide.

Comment les colonies de Flagellates se conduisent-elles au point de vue de la rotation ? Presque toujours elles tournent régulièrement autour de l'axe longitudinal, et la même extrémité occupe constamment le pôle antérieur. D'ailleurs chez *Pandorina* et chez *Eudorina*, les cellules du bout antérieur ont un stigma beaucoup mieux marqué que celles du pôle postérieur. Dans les colonies de *Volvox*, les cellules de l'hémisphère postérieur sont même complètement aveugles. Les seize cellules de *Spondylomor-um quaternarium* (fig. 5) ont la même constitution dans chacun des quatre anneaux successifs. La colonie avance en hésitant, le plus souvent sans tourner, parfois en tournant, soit dans le sens direct (comme les aiguilles d'une montre), soit dans le sens inverse.

Synura Uvella est une Chrysomonadine coloniaire. Tantôt les individus sont tous aveugles, tantôt tous garnis de plusieurs petites taches rouges (stigmas?). Les unes et les autres sont phototaxiques. La natation est particulièrement hésitante : il n'y a jamais de rotation régulière autour de l'axe de progression, mais bien un roulement autour d'un axe perpendiculaire en oblique.

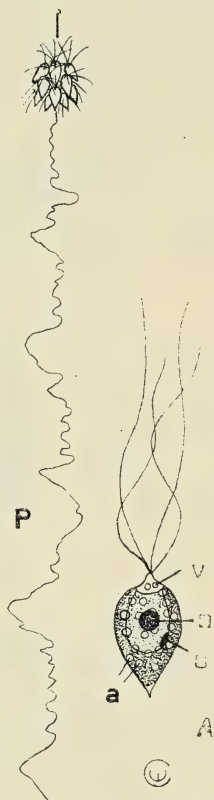


FIG. 5. — *Spondylomor-um quaternarium* EHRENB-
BERG. — A, l'un des 16
individus d'une colo-
nie. — Dans une mare
des polders, à Coxyde.

Presque tous les Flagellates nagent avec les fouets en avant. Il n'y a guère d'exception que pour *Oxyrrhis marina* (fig. 21), pour les Dinoflagellates (fig. 9, 12, 13, 22, 23) et pour les Choanoflagellates. Beaucoup de Flagellates, par exemple les *Cryptomonas* (fig. 3), ont l'habitude de se lancer de temps en temps en arrière, avec le bout postérieur en avant; ceux qui nagent avec les fouets en arrière n'opèrent jamais ces mouvements de recul.

Les espèces avec deux fouets dissemblables ont presque toujours un fouet antérieur, assurant la natation, et un fouet traînant, servant à la direction. Chez *Archaeobodo* (fig. 6.), l'un

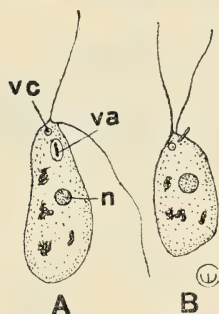


FIG. 6. — *Archaeobodo bacillivora*, n. g., n. s. — A, individu avec un fouet dirigé en avant et un dirigé en arrière. — va, une Bactérie qui vient d'être absorbée. — B, individu avec les deux fouets dirigés en avant, en train d'ingérer une Bactérie. — Dans une mare à Bergh (Brabant).

des fouets est toujours dirigé en avant, mais l'autre a une direction variable : tantôt il fonctionne de la même manière que le premier, tantôt il traîne comme un gouvernail.

Beaucoup de Flagellates nagent très mal. Ainsi *Petalomonas mediocanellata* et *P. Coxydensis* se bousculent péniblement à travers le liquide quand ils n'ont pas de point d'appui (fig. 11, Pl). Il en est même qui ne nagent jamais librement : citons *Scytomonas marina* (fig. 15), *Heteronema globuliferum* (fig. 17), *Anisonema acinus* (fig. 18), *Clautriavia mobilis* (fig. 7). Ce dernier semble même ne jamais nager d'aucune manière. Il rampe lentement sur le fond par les déformations métaboliques de son corps. Le plus souvent le fouet ondule d'une manière vague au milieu des détritits; à d'autres moments, il est comme aspiré dans une vaste poche qui occupe l'avant du corps.

Quelques rares espèces, par contre, ne présentent que la natation libre ; peut-être sont-elles privées de sensibilité tactile.

Diphylleia rotans (fig. 8) est remarquable par sa natation

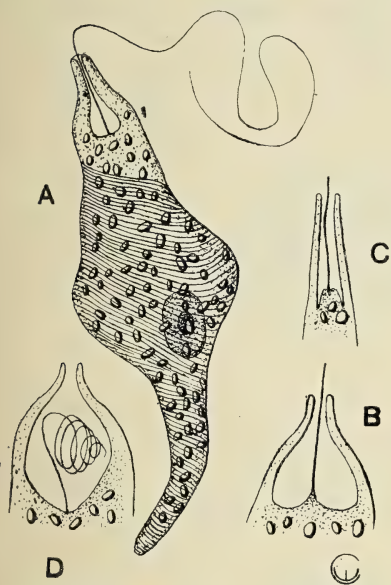


Fig. 7. — *Chasmostomum Nieupertense*, n. g., n. s. — A, individu allongé. — B, C, D, formes successives de l'extrémité antérieure d'un individu plus grand. — D, le fouet est rentré complètement dans la cavité. — Dans le fossé aux *Ruppia*, à Nieupert.

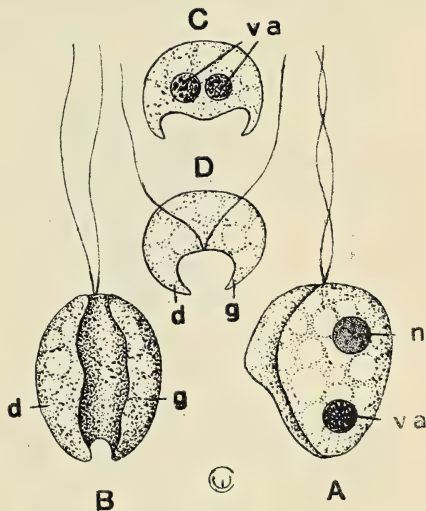


FIG. 8. — *Diphylleia rotans*, n. g., n. s. — A, côté gauche. — B, face ventrale. — C, coupe transversale. — D, pôle antérieur. — Dans une mare des dunes, à Coxyde.

lente, régulièrement tournoyante. La cellule, légèrement aplatie, porte sur une de ses faces deux expansions foliacées, tantôt de même taille, tantôt quelque peu différentes. Le cytoplasme est fortement vacuolisé, comme mousseux.

Heterocapsa quinquecaspidata (fig. 9) a la même allure calme et régulière. Il est caractérisé par sa caparace, qui n'est divisée en plaques que sur la face dorsale de sa moitié antérieure.

3. NATATION FIXÉE. — Un très grand nombre de Flagellates sont sensibles à la pression. Dès qu'ils touchent un objet étranger, ils s'y attachent; les uns s'y appuient par le fouet directeur ou par une partie du corps et continuent à nager; les autres se fixent à l'aide de leurs fouets, droits ou enroulés, et ne se déplacent plus ou presque plus.

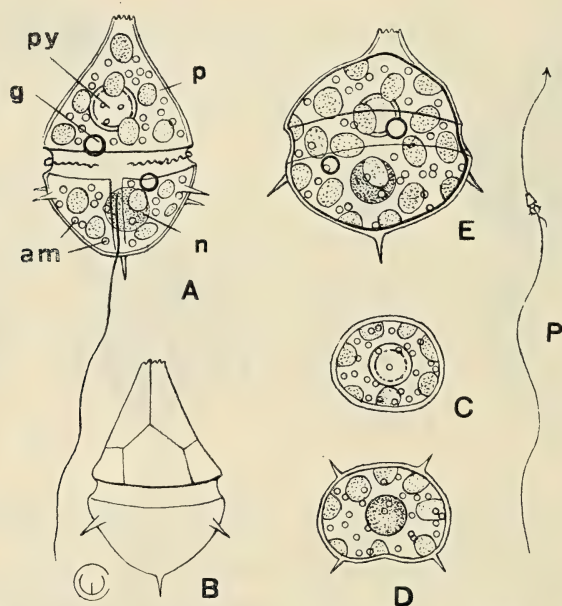


FIG. 9. — *Heterocapsa quinquecuspidata*, n. g., n. s. — A, face ventrale. — B, Carapace vide, vue par sa face dorsale. — C, D, coupes transversales de la moitié antérieure et de la moitié postérieure. — E, cyste. — Dans le bassin de la serre à Victoria, au Jardin botanique de Bruxelles.

Nous avons vu que *Cercobodo primitiva* s'appuie aux corps résistants par son fouet traînant et par une partie de sa surface et qu'il avance alors en ligne droite, sans rotation.

Quand il nage librement, *Mastigamoeba constans* (fig. 10) nage sans rotation, le fouet en avant; pendant la natation fixée ou la reptation, la vacuole conserve sa position.

Prismatomonas (fig. 11) est une Protomastigine voisine

d'*Ancyromonas*. Le fouet, inséré près de la pointe antérieure, se dirige vers l'arrière; il est collé, dans sa partie antérieure, à l'arête de la face ventrale du corps. La natation libre se fait

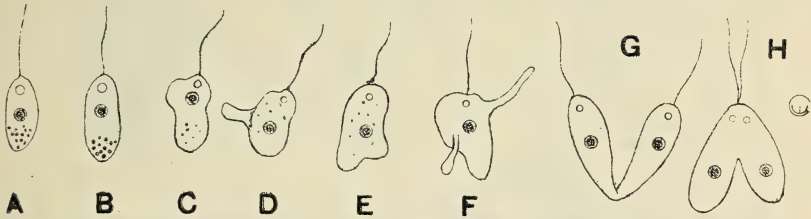


FIG. 10. — *Mastigamoeba constans*, n. s. — A, natation libre. — B, natation fixée. — C à F, reptation amiboïde. — G, H, division. — Dans une fosse à purin Schaerbeek (Brabant).

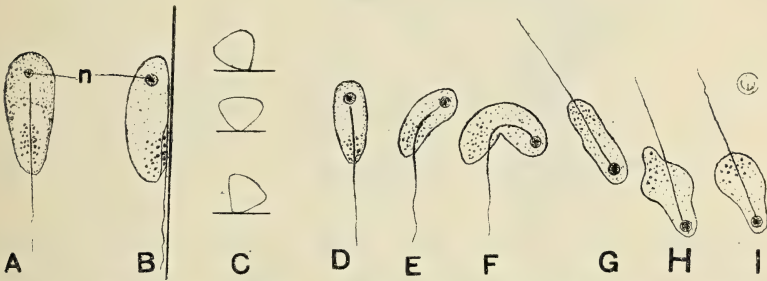


FIG. 11. — *Pristatomonas limax*, n. g., n. s. — A, individu nageant librement, vu de dos. — B, le même nageant fixé, vu de côté. — C, coupes transversales du même, faites à trois moments successifs. — D à I, individu attaché, changeant d'orientation. — Dans une fosse à purin à Schaerbeek (Brabant).

par secousses, sans rotation. Pendant la natation fixée, le corps s'applique contre la lamelle par l'arête ventrale; il bascule alternativement à droite et à gauche, de telle manière que les deux facettes latérales touchent l'une après l'autre. Lorsque la cellule change d'orientation elle se plie au point où le fouet se sépare du corps.

On a l'impression que *Pristatomonas* a perdu le fouet antérieur et ne possède plus que le fouet trainant, lequel sert de patin dans sa partie proximale et de godille dans sa partie distale.

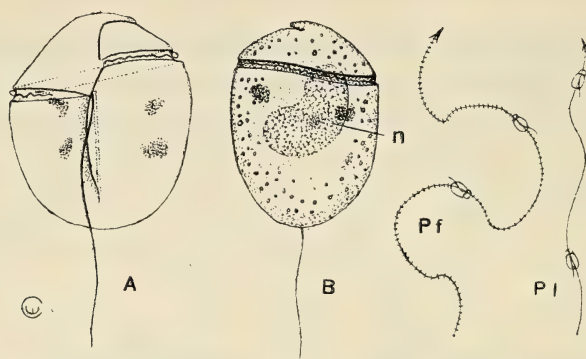


FIG. 12. — *Chilodinium cruciatum*, n. g, n. s. — A, face ventrale. — B, face dorsale. — Dans un ruisseaulet saumâtre, à Nieuport. — Gr. 900/1.

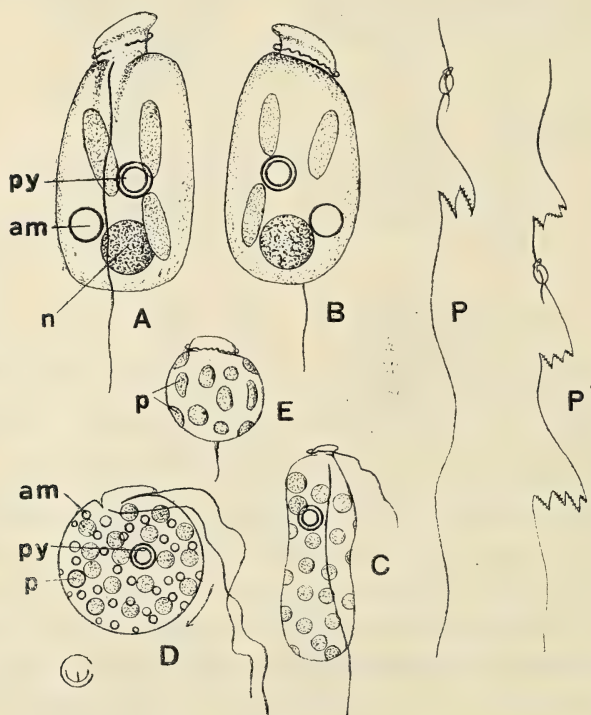


FIG. 13. — *Amphidinium operculatum*, CLAPARÈDE ET LACHMANN. — A, B, faces ventrale et dorsale d'un individu avec des plastides brunes. — C, individu métabolique, avec des plastides jaunâtres. — D, individu analogue qui s'est arrêté. — E, individu attaché à la lame par son fouet trainant; ses plastides sont vertes.

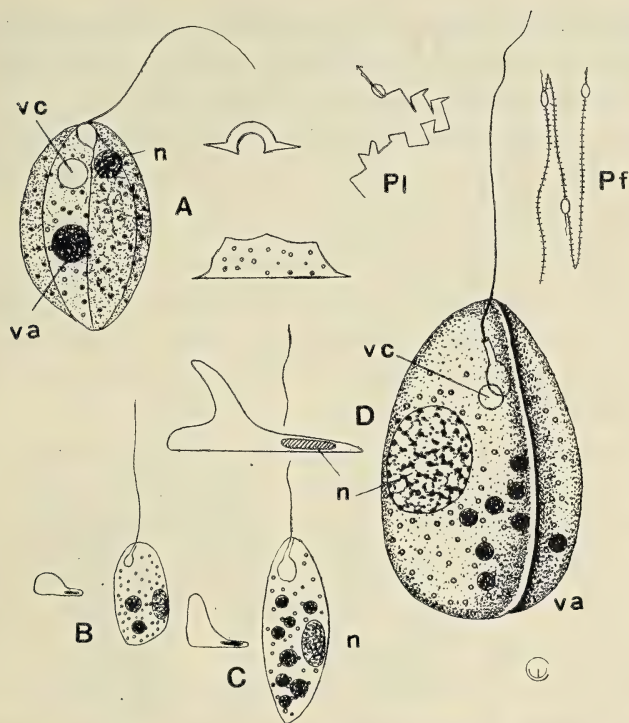


Fig. 14. — A, *Petalomonas abscissa*, STEIN; face ventrale, coupes transversales en avant et au milieu. — B, C, *P. Coxydensis*, n. s., face ventrale et coupe médiane. — D, face dorsale et coupe médiane d'un individu très grand. Pl et Pf, pistes de *P. Coxydensis*. — Dans une mare des polders, à Coxydé.

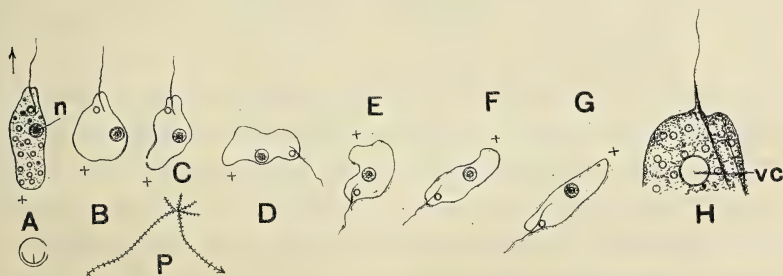


Fig. 15. — *Scytomonas marina*, n. s. — A, natation fixée. — B à F, changement de direction. — A, natation fixée dans la nouvelle direction. — H, détails de l'extrémité antérieure (gross. 3600/1). — Dans une flaque sur la plage, à Coxyde.

Chilodinium cruciatum (fig. 12) est une Gymnodiniée sans plastides, à corps très souple. Il nage en tournoyant, tantôt dans le sens direct, tantôt dans le sens inverse. Au contact de la lame ou de la lamelle, il s'attache par le fouet trainant, et il décrit alors une piste sinueuse, avec des inflexions brusques.

Contrairement à *Chilodinium*, qui ne se déforme que passivement, par exemple quand il se fraie un passage à travers un encombrement, *Amphidinium operculatum* (fig. 13) change activement son contour. Il peut se contracter au point d'être tout à fait rond; la partie antérieure se loge alors dans un creux de la partie postérieure.

La natation est rapide et accompagnée de rotation. De temps en temps l'organisme s'attache par le fouet trainant et saute quelque peu sur place; puis il repart brusquement. Il peut aussi s'arrêter complètement. Il se contracte alors en boule; les deux fouets sortent de leurs sillons et la cellule tourne lentement dans le sens direct.

Toutes les Péranemacées que j'ai étudiées, sauf un *Englenopsis*, nagent de préférence en contact avec un corps solide, et c'est toujours la même face de la cellule qui est tournée vers lui. Il y a donc chez ces Flagellates une dorsiventralité très nette.

Les *Petalomonas abscissa* et *P. coxydensis* (fig. 14) sont d'ailleurs aplatis sur la face ventrale. Leur natation libre est tremblotante. Au contraire, la natation fixée est des plus régulière: la cellule avance dans une direction presque rectiligne, puis elle s'arrête, et tout en restant accrochée par le bout de son fouet, elle se renverse et repart dans la nouvelle direction.

Scytomonas marina (fig. 15) ne nage jamais. On le voit avancer lentement, fixé contre la lamelle, le fouet en avant; puis il s'arrête, s'attache par le pôle postérieur de la cellule, se courbe, se tord dans tous les sens, s'étale, se raccourcit, s'aplatit, se contracte et s'allonge, puis se remet en marche.

Quand *Peronema trichophorum* (fig. 15) nage librement, il n'est presque pas métabolique et sa piste est peu onduleuse.

Dès qu'il se fixe, il se déforme de la façon la plus fantaisiste ; toutefois, même dans les moments où les contorsions sont à leur maximum, l'organisme garde en contact avec le corps étranger une petite portion antérieure de la face ventrale.

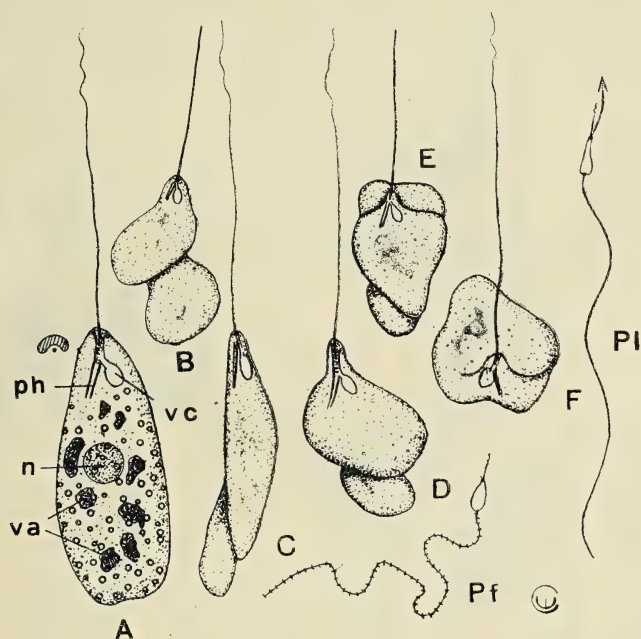


Fig. 16. — *Peronema trichophorum* STEIN. — A, nageant librement, face ventrale et coupe. — B à F, natation fixée; un même individu, vu par sa face centrale, à divers moments. — Dans un fossé des polders, à Coxyde.

Tous les genres qui ont un fouet trainant ont nécessairement une structure dorsiventrale, puisque le fouet est toujours appliqué contre la face attachée. (Voir *Cercobodo*, fig. 2, et *Prismatomonas*, fig. 11.)

Contrairement aux autres Péranémacées, *Heteronema globuliferum* a des mouvements extrêmement rapides pendant la natation fixée. Le corps, de forme à peu près constante pendant la natation libre, se déforme énergiquement lors de la natation fixée.

Anisonema acinus, var. *longifilum* (fig. 18), ne nage jamais librement. Son fouet antérieur bat dans toute sa longueur. L'extrémité du fouet trainant reste collée contre un corps étran-

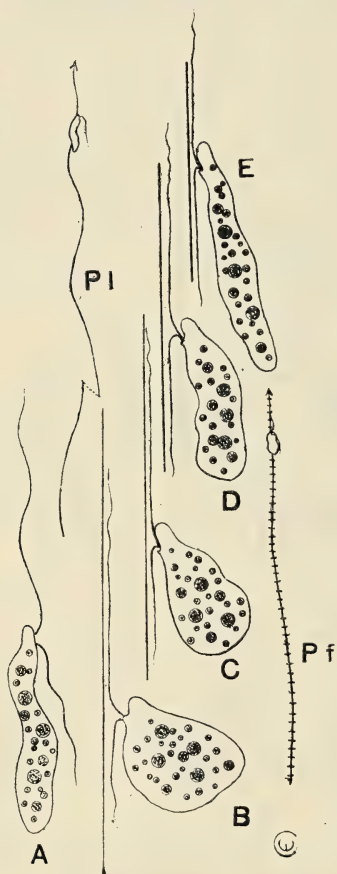


Fig. 17. — *Heteronema globuliferum* STEIN. — A, natation libre. — B à E, natation fixée. — Dans un ruisseau saumâtre, à Nieuport.

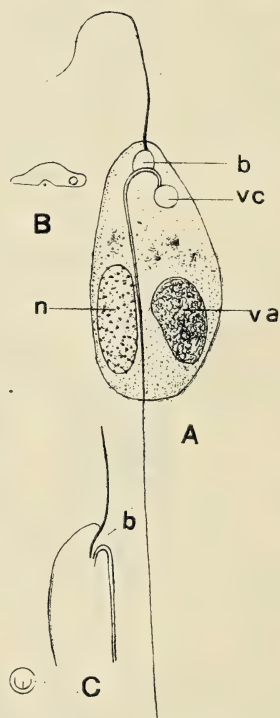


Fig. 18. — *Anisonema acinus* DUJARDIN, var. *longifilum*, n. v. — A, vue ventrale. — B, coupe transversale au niveau de la vacuole contractile. — C, coupe longitudinale. — Dans un bassin de la grotte de Rochefort (prov. de Namur).

ger et la cellule se déplace irrégulièrement, tantôt avançant, tantôt se jetant de côté par un brusque sursaut du fouet postérieur, tantôt tournant autour de l'axe longitudinal sans que le fouet lâche prise.

Metanema variable (fig. 19) présente une particularité curieuse. Alors que le fouet directeur est partout ailleurs parallèle à la direction du mouvement, il est ici dirigé obliquement vers la gauche ; il reste raide et semble attaché sur presque toute sa longueur.

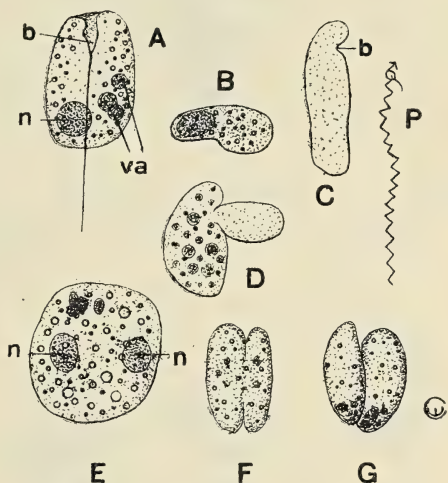
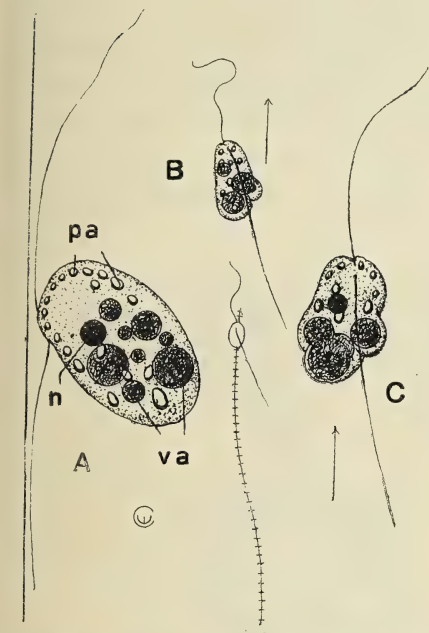


Fig. 20. — *Clautriavia mobilis* MASSART. — A, face ventrale. — B, C, coupes transversale et longitudinale, — D, succion d'une cellule de *Chlamydomonas*. — E, F, G, division. — Dans un ruisseaulet saumâtre, à Nieuport.

L'un des Flagellates les plus intéressants que j'aie rencontrés est *Clautriavia mobilis* (fig. 20). Il n'a qu'un seul fouet, qui sort de la fente antérieure de la cellule et se dirige vers l'arrière. L'organisme ne nage jamais librement. Il s'appuie contre un objet extérieur par son fouet et se pousse en avant, en obliquant alternativement à droite et à gauche, comme un batelier faisant avancer sa barquette à l'aide d'une perche. Lors de la division

longitudinale, la bouche primitive s'efface et une nouvelle bouche naît sur chacune des cellules filles, le long du plan de division. L'orientation de la dorsiventralité se déplace donc de 90° à chaque bipartition.

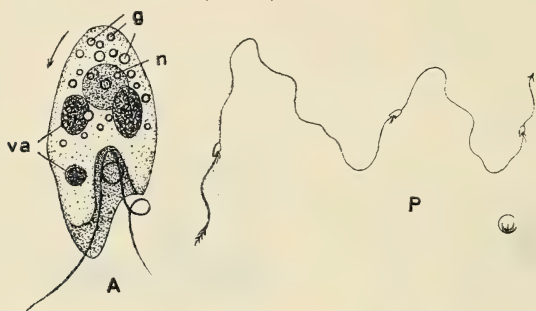


FIG. 21. — *Oxyrrhis marina* FROMENTEL, vu par la face ventrale. Il est attaché à la lamelle par la boucle basilaire du fouet long. — Dans le fossé aux *Ruppia*, à Nieuport.

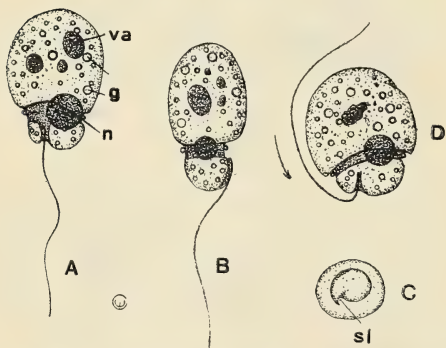


FIG. 22. — *Gymnodinium asymmetricum*, n. s.
— A, face ventrale. — B, côté droit. — C, pôle postérieur. — D, individu arrêté.
— Dans le fossé aux *Ruppia*, à Nieuport.

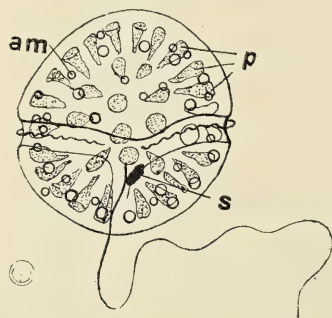


FIG. 23. — *Glenodinium marinum*, n. s. — Dans un ruisseau saumâtre, à Nieuport.

4. FIXATION IMMOBILE. Il y a aussi pas mal d'espèces qui cessent de nager dès qu'elles se fixent par les fouets. Ainsi *Oxyrrhis marina* (fig. 21) s'attache par le fouet le plus long, qui forme une boucle près de sa base. Dans cette position, l'organisme

reste immobile, sauf qu'il exécute de temps en temps une rotation d'un quart de cercle environ, dans le sens inverse.

Plusieurs Dinoflagellates ont également la faculté de s'arrêter, en se fixant par le fouet trainant. *Gymnodinium pusillum* Schilling ne s'attache qu'un instant, puis repart. *G. asymmetricum* (fig. 22) s'arrête plus longtemps.

Le fouet transversal reste alors immobile; quant au fouet longitudinal, il se courbe autour du bord gauche du corps et se colle dans toute sa longueur à un objet résistant. Tout comme *Oxyrrhis* : il effectue de temps en temps une rotation d'un quart de cercle dans le sens inverse.

Glenodinium marinum (fig. 23) s'attache de même, mais son

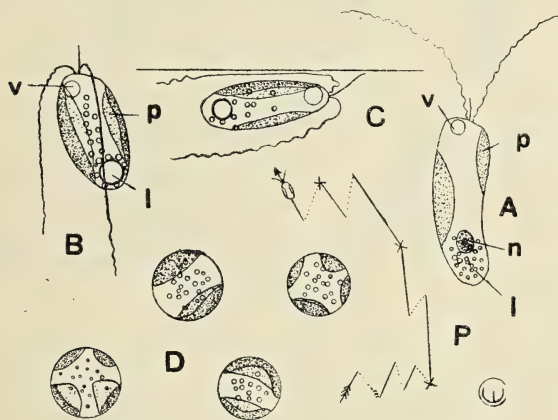


FIG. 24 — *Prymnium saltans*, n. g., n. s. — A, nageant librement. — B, fixé, vu de face. — C, fixé, vu de côté. — D, individus en division. — Dans le fossé aux *Ruppia*, à Nieuport.

fouet décrit alors une courbe très onduleuse, qui est toujours la même pour tous les individus. La cellule n'exécute pas de mouvement de rotation.

Parmi les Chrysomonadines, le genre *Prymnium* (fig. 24) mérite une mention toute spéciale : il possède un fouet uniquement dévolu à la fixation. Son allure est particulièrement sau-

tillante : il se lance en avant de quelques longueurs en tournoyant, puis se rejette brusquement en arrière, pour nager ensuite de nouveau en avant ; cette suite de gambades est interrompue de temps en temps par un arrêt plus ou moins long. La cellule possède deux longs fouets égaux et un fouet court, raide, qui n'intervient pas dans la natation et sert uniquement d'amarre. Quand la cellule s'arrête, elle s'attache en outre par l'un des fouets longs ; celui-ci continue à battre à ses extrémités proximale et distale, tandis que la portion moyenne, fixée, reste raide et immobile.

La plupart des Phycoflagellates unicellulaires ont aussi des alternances de mouvement et de repos. Les *Chlamydomonas* et les *Polytoma* se fixent à l'aide d'une boucle que fait chacun de

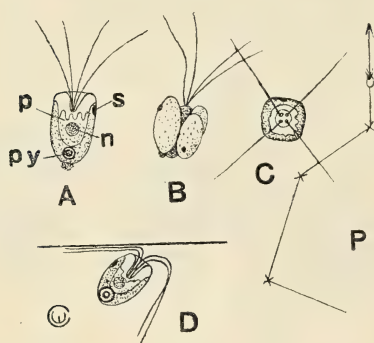


FIG 25. — *Carteria excavata* n. s. — A, nageant librement. — B, division en quatre, pendant la natation. — C, attaché par ses quatre fouets. — D, attaché obliquement par deux fouets. — Dans le fossé aux *Ruppia*, à Nieuport.

leurs deux fouets près de sa base ; pendant qu'ils sont ainsi suspendus à un objet solide ou à la surface libre du liquide, ils se balancent sans cesse.

Carteria excavata (fig. 25) a des mouvements très vifs. Il passe comme un éclair à travers le liquide, puis s'arrête brusquement ; tantôt il s'attache par ses quatre fouets, auquel cas il est normal à la surface ; tantôt il se place obliquement, fixé par deux fouets.

Pteromonas alata (fig. 26) a également des mouvements très vifs. Quand il s'arrête, il s'attache par la partie moyenne de ses deux fouets.

5. REPTATION AMIBOÏDE. — Beaucoup de Flagellates sont rigides. Les uns ont une carapace, comme *Pteromonas* (fig. 26), *Glenodinium* (fig. 23), *Heterocapsa* (fig. 9); d'autres sont enfermés dans une membrane résistante, par exemple *Carteria* (fig. 25) et *Cryptomonas* (fig. 3); d'autres encore ont simplement la couche périphérique du cytoplasme quelque peu durcie et indéformable, tels que *Oxyrrhis* (fig. 21), *Diphyllia* (fig. 8) et *Petalomonas* (fig. 14).

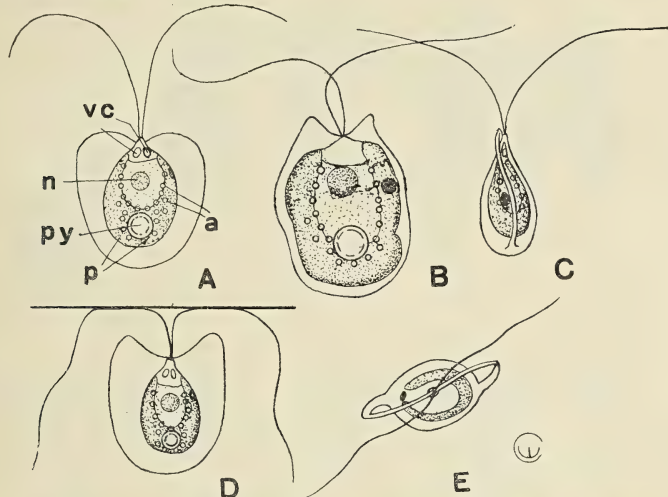


FIG. 26. — *Pteromonas alata* SELIGO. — A, nageant librement, vu de face. — B, id., sur le point de se diviser. — C, nageant, vu de profil. — D, fixé, vu de face. — E, fixé, vu par le pôle antérieur. — Dans un canal, à Bruges.

Nous verrons aussi (p. 138) que beaucoup de Flagellates ont le cytoplasme entouré d'une pellicule suffisamment souple pour subir les déformations les plus étendues.

Enfin, il en est dont le cytoplasme est nu et pousse des pseudopodes dans tous les sens : *Mastigamoeba* (fig. 10), *Podomastix* (fig. 1) et *Archaeobodo* (fig. 6). C'est surtout pendant la natation fixée que se forment les pseudopodes; voir, par exemple, *Cercobodo* (fig. 2) et *Prismatomonas* (fig. 11). Pourtant il en est aussi qui poussent des pseudopodes tout en nageant, par exemple *Stephanomonas* (fig. 4).

Quelques Flagellates peuvent aussi se déplacer exclusivement par l'intermédiaire des pseudopodes sans que les fouets prennent aucune part au mouvement. Nous avons déjà vu des exemples de cette reptation amiboïde chez *Podomastix* (fig. 1, F) et chez *Cercobodo* (fig. 2, G à K).

Dimastigamoeba (fig. 27) produit des pseudopodes aussi bien quand il nage librement que lorsqu'il rampe. Dans cette dernière

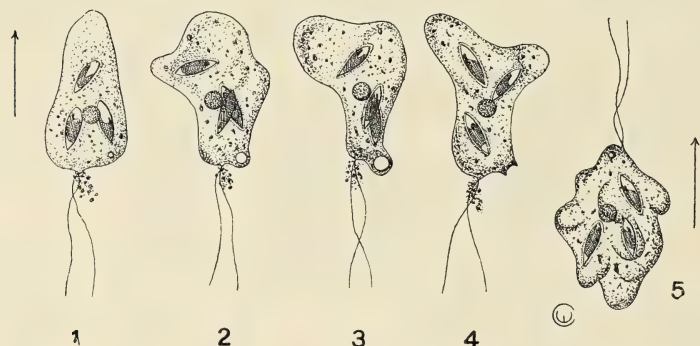


FIG. 27. — *Dimastigamoeba vorax*, n. g., n. s. — 1 à 4, phases successives de la reptation; trois individus de *Chlorogonium* viennent d'être englobés; évacuation d'excréments; éclatement de la vacuole contractile. — 5, le même individu nageant. — Dans une fosse à purin, à Furnes.

position, les pseudopodes naissent au pôle opposé aux fouets, c'est-à-dire que la cellule traîne ses fouets derrière elle. Ce sont les pseudopodes qui saisissent les proies et les englobent dans des vacuoles. Lorsque les *ingesta* ont été digérés et les produits de la digestion absorbés, les résidus non digestibles sont expulsés à l'autre bout, donc près des fouets, et ce sont les mouvements de ceux-ci qui dispersent les excréments dans le liquide.

On suit aussi très nettement chez ce Flagellate le mécanisme de la vacuole contractile. Une petite cavité naît tout contre la surface de la cellule, non loin de la base des fouets, en un point qui n'est pas absolument constant. En grandissant, la vacuole fait une saillie de plus en plus prononcée; puis tout d'un coup,

la mince paroi qui la limite vers le dehors se rompt et son contenu est déchargé dans le liquide extérieur; enfin le rebord annulaire de cytoplasme laissé par l'éclatement de la vacuole s'efface et une nouvelle cavité naît dans le cytoplasme.

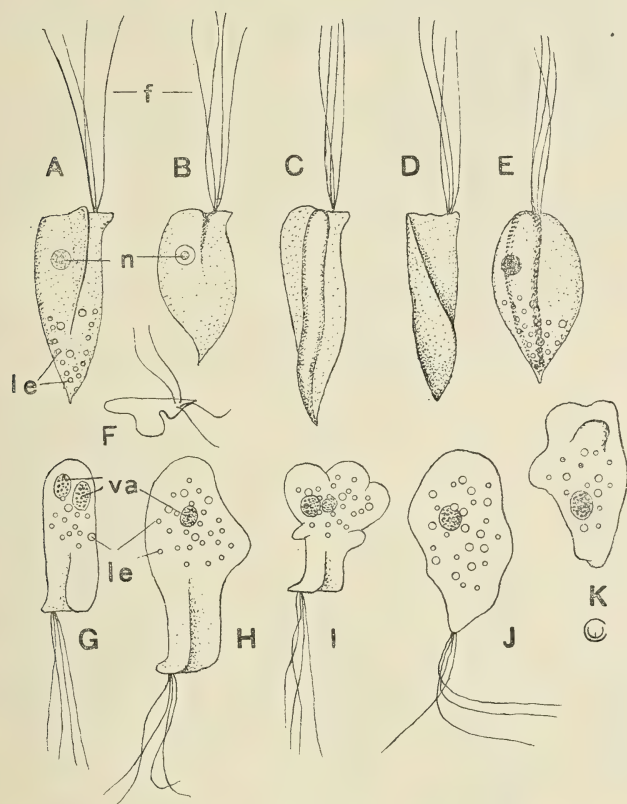


FIG. 28. — *Tetramitus rostratus* PERTY. — A, B, C, D, E, individus nageant sans changer de forme. — F, vue polaire antérieure. — G, H, I, J, K, individus rampants; ils ont englobé des Thiobactéries à l'aide de leurs pseudopodes. — Dans une fosse à purin, à Nieuport.

Un autre cas intéressant est celui de *Tetramitus rostratus* (fig. 28). Pendant la natation libre, les cellules ont des formes assez diverses; le contour se modifie-t-il ou bien est-il constant?

Il serait difficile de le dire. Pendant cet état, les Flagellates nagent rapidement, les fouets en avant. Malgré la présence d'une fente buccale non douteuse (fig. F), ils n'absorbent jamais de nourriture solide, car on n'y voit jamais de vacuoles alimentaires. Cette espèce ne vit d'ailleurs que dans des milieux riches en nourriture organique, par exemple dans les fosses à purin.

Fréquemment des individus cessent de nager et se mettent à ramper. C'est tout d'abord l'extrémité pointue postérieure qui s'émousse et qui pousse des pseudopodes. En même temps, la cellule s'est retournée et elle rampe maintenant avec les fouets à l'arrière; ceux-ci ne cessent pas de battre, mais leurs mouvements sont désordonnés et lents. Peu à peu la déformation de la surface progresse vers les fouets, jusqu'à ce que toute la cellule soit amiboïde; alors les fouets disparaissent.

6. MÉTABOLIE. — Nous avons déjà noté le contraste entre *Chilodinium* (fig. 12), assez souple pour se déformer passivement, et *Amphidinium* (fig. 13), qui modifie activement sa configuration. Le changement actif de la forme de la cellule, appelé par Klebs, en 1883, métabolie, est rare chez les Dinoflagellates, mais très fréquent chez les Eugléninées. Remarquons que cette propriété est particulière aux Flagellates chez lesquels le cytoplasme ne se détache pas de la pellicule par la plasmolyse.

La nature chimique du milieu joue un grand rôle dans la métabolie des Eugléninées. Quand le liquide a une réaction neutre, les cellules sont le plus souvent nageantes et à peu près rigides, avec de courts intervalles d'arrêt et de métabolisme. Dans un liquide légèrement acide, par exemple par 1 % d'acide acétique, les cellules ne cessent pas de nager en état d'extension, sans modifier leur contour. Il suffit de rendre le milieu alcalin, par exemple par 1 % de carbonate de potassium, pour que tous les Flagellatés se défigurent avec animation; même des espèces qui, en milieu normal, ont une forme tout à fait constante, la

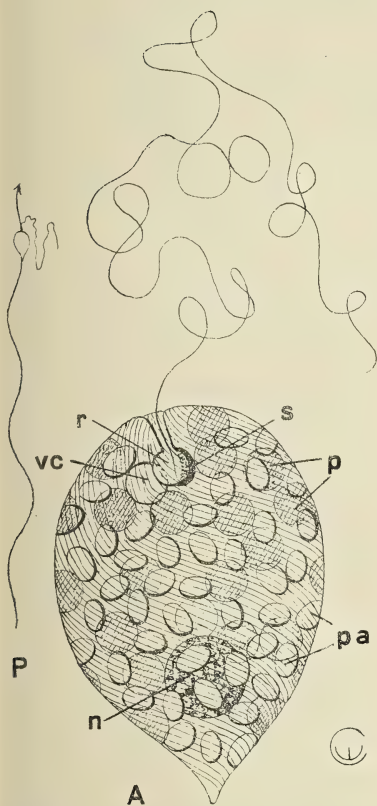


FIG. 29. — *Euglena inflata*, n. s. — *r*, réservoir de la vacuole contractile. L'individu est à l'état d'extension maximum; il peut se raccourcir en forme de boule. — Dans une mare à Diepenbeek (province de Limbourg).

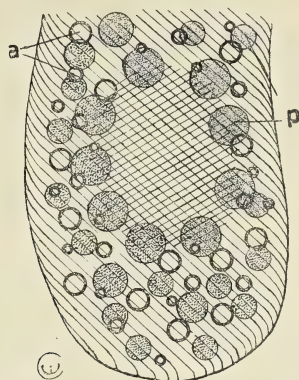


FIG. 30. — Extrémité postérieure d'une cellule d'*Euglena Ehrenbergii*, KLEBS. — En un point la cellule s'est tellement contractée latéralement que les deux faces se touchent (on voit la striation de toutes les deux); les grains de paramylon ont été chassés et les plastides sont écrasés. — Dans une mare des polders, à Coxyde.

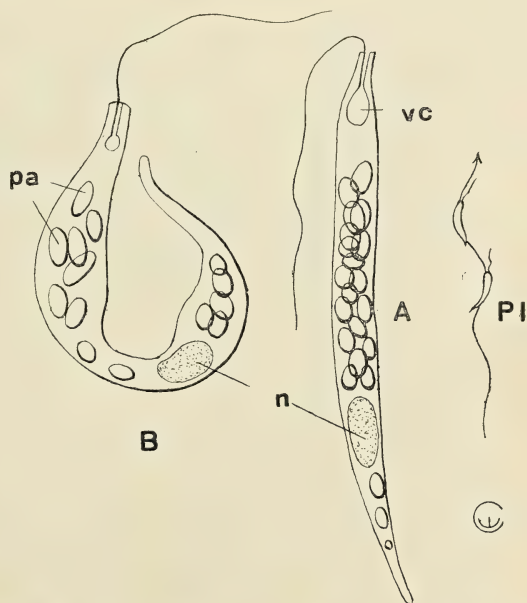


FIG. 31. — *Astartia curvata* KLEBS. — A, nageant. — B, arrêté par CO_2K_2 à 1/200. — Dans une mare à Bergh (Brabant).

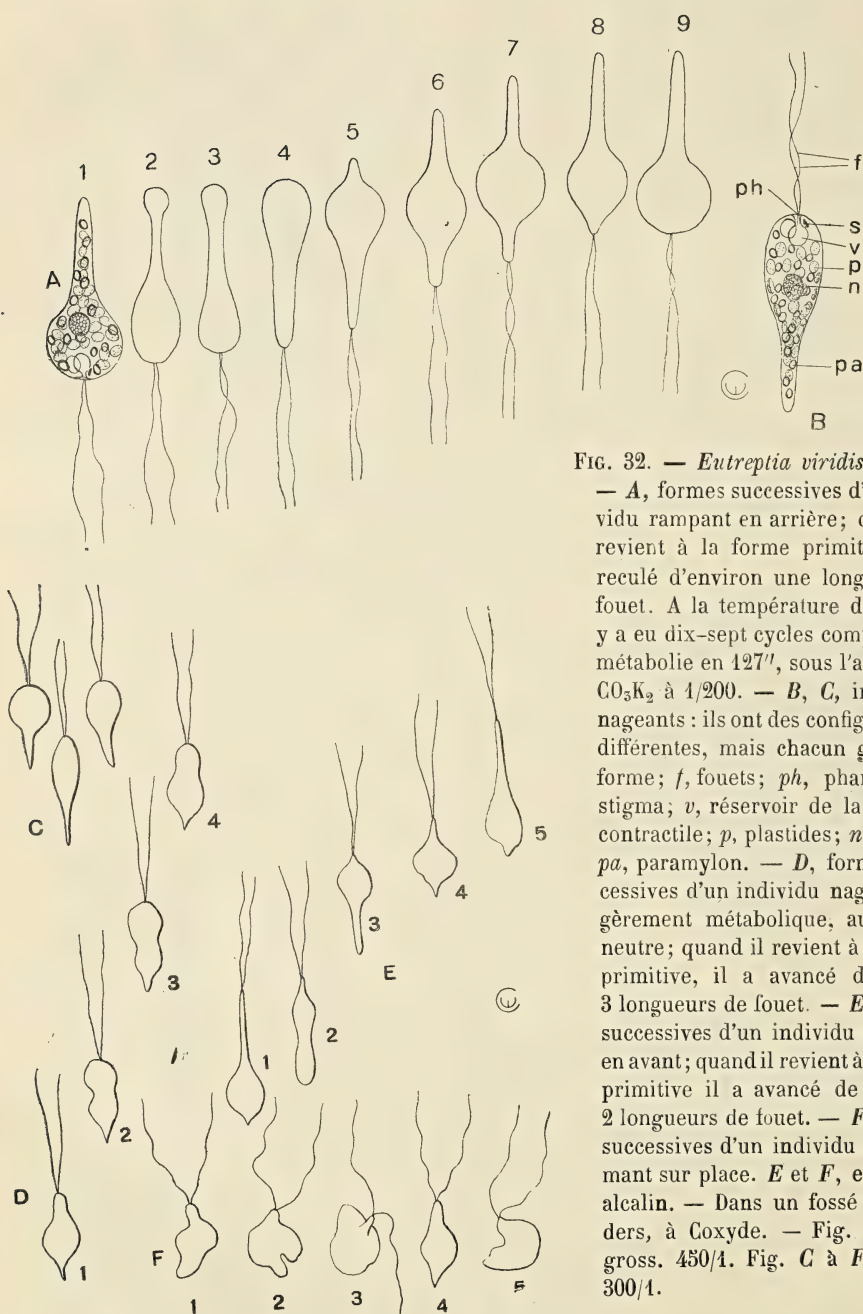


FIG. 32. — *Eutreptia viridis* PERTY.
— A, formes successives d'un individu rampant en arrière; quand il revient à la forme primitive il a reculé d'environ une longueur de fouet. A la température de 15°, il y a eu dix-sept cycles complets de métabolie en 127'', sous l'action de CO_2K_2 à 1/200. — B, C, individus nageants : ils ont des configurations différentes, mais chacun garde sa forme; f, fouets; ph, pharynx; s, stigma; v, réservoir de la vacuole contractile; p, plastides; n, noyau; pa, paramylon. — D, formes successives d'un individu nageant, légèrement métabolique, au milieu neutre; quand il revient à la forme primitive, il a avancé d'environ 3 longueurs de fouet. — E, formes successives d'un individu rampant en avant; quand il revient à la forme primitive il a avancé de presque 2 longueurs de fouet. — F, formes successives d'un individu se déformant sur place. E et F, en milieu alcalin. — Dans un fossé des polders, à Coxyde. — Fig. A et B, gross. 450/1. Fig. C à F, gross. 300/1.

changent en milieu alcalin, par exemple *Euglena Acus*. Un même individu transporté successivement dans un liquide acide et dans un liquide alcalin est rigide et nageant dans le premier milieu, métabolique et arrêté dans le second. L'expérience peut être répétée plusieurs fois de suite avec un résultat invariable.

La métabolie se manifeste de quatre façons :

Courbure de l'axe : *Euglena Acus*.

Raccourcissement régulier et égal de l'axe : *Amphidinium* (fig. 13), *Euglena inflata* (fig. 29).

Charriage du protoplasme à l'intérieur de la membrane. Le déplacement peut être longitudinal : *Eutreptia* (fig. 32, A, D, E) ou transversal : *Euglena Ehrenbergii* (fig. 30).

Le plus souvent les quatre mouvements s'effectuent en même temps; les figures 7, 16 et 17 donnent une idée de la plasticité du corps de certains Flagellates et des déformations imprévues qu'il peut subir. Un autre exemple est fourni par *Astasia curvata* (fig. 31).

L'espèce qui présente la métabolie la plus variée et la plus étendue est sans doute *Eutreptia viridis*. La figure 32 montre la diversité des formes que peut revêtir une cellule suivant les circonstances. En milieu acide, les cellules nagent sans se déformer (B, C). En milieu neutre, elles se raccourcissent et s'allongent légèrement (D). En milieu alcalin, elles rampent en avant (E), en arrière (A) ou sur place (F).

**GÉOLOGIE. — L'âge relatif de quelques modifications
des terrains paléozoïques de la Belgique,**

par P. FOURMARIER, correspondant de la Classe.

Les roches sédimentaires de la grande série paléozoïque ⁽¹⁾ belge ont subi, postérieurement à leur dépôt, des modifications de diverses natures.

Les unes portent sur l'allure des couches; ce sont les plis, les failles, les charriages. D'autres consistent en déformations plus intimes de la matière; elles sont de plusieurs types, mais je ne considérerai, dans cette étude, que le clivage schisteux; d'autres enfin portent sur la constitution lithologique même des sédiments, soit que leurs éléments aient été réunis par un ciment de manière à transformer une roche meuble en une roche compacte, soit que des éléments minéralogiques nouveaux non détritiques aient pris naissance amenant en fin de compte la cristallisation complète du sédiment.

Je voudrais, dans cette étude, rechercher si ces trois types de modifications se sont produits en même temps, ou s'ils marquent des stades différents de l'évolution de nos formations primaires.

Je laisserai toutefois de côté les roches métamorphiques si spéciales de la région de Bastogne.

Il semble bien établi que dans la grande série concordante du dévonien et du carboniférien de Belgique les transformations portant sur la constitution lithologique des sédiments sont plus intenses à la base qu'au sommet : les schistes houillers sont relativement peu modifiés et, dans la zone la plus élevée de ce terrain, ils sont à peine durcis; les schistes dévoniens, au contraire, s'écartent bien davantage du sédiment originel; on ne

(1) J'aurai surtout en vue dans ce travail la série concordante du dévonien et du carboniférien; le siluro-cambrien n'affleure, en effet, que sur une surface très restreinte comparativement aux autres formations paléozoïques.

peut s'empêcher de voir dans cette différence une conséquence des conditions dans lesquelles chacun de ces terrains se trouvait au moment du plissement de l'Ardenne : les roches de la base du dévonien avaient à supporter une masse considérable de sédiments, tandis que les roches houillères étaient soumises à une charge beaucoup moindre.

La différence se marque mieux encore quand on considère le dévonien du sud de la Belgique ; la transformation est ici beaucoup plus complète : les grès sont souvent devenus des quartzites et les schistes des phyllades ; ces roches ont une structure plus ou moins cristalline et renferment des minéraux qui n'existaient pas primitivement, tout au moins sous forme d'éléments à contours cristallins.

Cette différence dans le même horizon géologique pris au voisinage de la crête du Condroz d'une part, près de l'anticlinal de l'Ardenne d'autre part, tient essentiellement à une variation de la charge ; il est bien établi aujourd'hui que l'épaisseur des sédiments dévoniens et carbonifériens augmente considérablement du nord vers le sud.

Les modifications dans la constitution lithologique de nos terrains primaires sont donc, avant tout, en relation avec la charge de sédiments qu'un même niveau géologique avait à supporter et avec l'augmentation de température qui en est la conséquence. On expliquerait difficilement dans une autre hypothèse la transition insensible que l'on observe entre les divers états que montrent les roches. C'est pourquoi M. Lohest a pu proposer pour ces modifications le nom de métamorphisme de profondeur ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ *Annales Société Géol. de Belgique*, t. XXXVII, *Bull.*, p. 340. — Il ne convient pas de discuter ici si le terme métamorphisme doit être employé avec le sens restreint qu'on lui donne généralement à l'étranger en ne l'appliquant qu'aux roches renfermant des éléments cristallins postérieurs à la sédimentation, ou s'il faut étendre sa signification à toutes les transformations que les roches ont subies, même au simple durcissement des roches meubles.

On doit admettre que les modifications lithologiques des terrains, ou, pour employer une expression plus simple, leur métamorphisme, sont la première manifestation des efforts de compression qui se sont manifestés au début du plissement. La preuve de ce fait n'apparaît peut-être pas *a priori* lorsqu'on étudie l'ensemble des terrains primaires belges; cependant, les roches dévoniennes qui surmontent la faille du Midi dans le Hainaut et la faille eifélienne à Liège sont incontestablement plus distantes du sédiment originel que les schistes houillers qui s'enfoncent sous cet accident ou que l'on voit affleurer à son voisinage immédiat.

On peut donc admettre que les roches de notre série primaire avaient atteint leur état actuel au moment où se sont produits les grands phénomènes de charriage qui ont refoulé toute la masse des terrains anciens du sud sur le bassin houiller de Sambre-Meuse.

Mais nous pouvons serrer la question de plus près. Le terrain houiller nous donne à ce sujet des indications précieuses. Les constituants principaux, c'est-à-dire les roches argileuses et arénacées, ne montrent pas de différences très notables dans les modifications qu'elles ont subies postérieurement à leur dépôt, bien que les schistes de la base du terrain houiller soient plus durs, plus compacts, que ceux du sommet de la formation.

Mais, dans le terrain houiller, les couches de combustible sont des éléments bien plus sensibles que les autres; plus un charbon s'écarte de son état originel de dépôt, plus il est pauvre en matières volatiles et plus la proportion de carbone augmente. Or, dans tous les bassins houillers, si l'on considère une épaisseur suffisante de terrain, la teneur en matières volatiles des charbons va en diminuant au fur et à mesure que l'on descend la série stratigraphique des couches sur une même verticale. Comme cette règle est identique à celle qui régit les modifications subies par les roches dans une série sédimentaire plus importante, on ne peut s'empêcher de croire que les deux phénomènes ont

la même cause. Les conclusions que l'on peut tirer de l'étude du houiller ont donc chance d'être vraies pour les autres terrains sédimentaires.

La règle générale de variation dans la teneur en matières volatiles des charbons est vraie pour un faisceau disposé en couches peu inclinées, restées dans l'ordre normal de leur dépôt; c'est le cas, par exemple, en Belgique pour le bassin de la Campine ou le versant nord du bassin de Sambre-Meuse.

Dans un faisceau disposé en couches renversées, où la plus ancienne de la série occupe donc la plus faible profondeur par rapport à la surface du sol, cette règle reste vraie; mais dans ce cas, un sondage rencontrerait successivement en descendant des couches de plus en plus riches en matières volatiles.

Nous en concluons que la composition actuelle des charbons était pratiquement acquise lorsque les efforts orogéniques ont plissé les couches et les ont renversées; les modifications ultérieures ont certainement été peu importantes ⁽¹⁾.

Dans le bassin du Hainaut, les couches fortement renversées, telles les veines en dressant de la concession de Fontaine-l'Évêque, appartiennent à une lame charriée recouvrant les failles d'Ormont et du Carabinier; ces couches à haute teneur en matières volatiles viennent brusquement en contact avec des charbons plus pauvres en ces mêmes matières. Cette observation confirme les conclusions tirées de la différence d'aspect lithologique entre les schistes houillers et les schistes du dévonien inférieur, à savoir que cette différence était nettement marquée lorsque se sont produits les charriages. L'étude des charbons nous permet cependant d'aller plus loin, puisque nous pouvons dire que les modifications des roches étaient faites lorsque le plissement a pris sa structure actuelle.

(1) Les efforts de plissement ont eu pour effet de faire naître la pholélite dans le terrain houiller; ce minéral, qui est un produit de vrai dynamométamorphisme, est donc plus récent que les modifications subies par l'ensemble de la formation; il est, d'ailleurs, très localisé.

J'ai montré dans un autre travail ⁽¹⁾ que les grandes failles du houiller du Hainaut se sont produites au moins à deux époques différentes. Les unes sont en relation directe avec les plis secondaires dont elles sont en somme l'accentuation; on les voit, en effet, se former progressivement par étirement du flanc médian d'un pli en S. Les autres ne sont pas en relation directe avec les plis secondaires dont elles coupent les deux flancs. Ces dernières sont postérieures au plissement; tel est le cas pour la grande faille du Midi ou faille eifélienne qui limite au sud la bande houillère de Sambre-Meuse et pour les failles qui s'y rattachent intimement et qui intéressent le bassin houiller lui-même et sa bordure méridionale.

Si nous examinons ce qui se passe au voisinage des failles du premier type, c'est-à-dire les plus anciennes, nous remarquons qu'elles se sont produites après que les couches de houille avaient pris la qualité qu'elles ont aujourd'hui, en ce qui concerne notamment la teneur en matières volatiles du charbon. Un bel exemple de ce fait nous est donné par les failles du Centre et du Placard dans le bassin de Charleroi. Au nord de la faille du Placard, on exploite, dans la concession de Mariemont, un faisceau dont la couche inférieure, dite Veine-au-Gros, a 12 % de matières volatiles, tandis que les plus élevées ont une teneur de 17 %; la faille du Placard leur a superposé un autre faisceau dont les couches inférieures, voisines de la Veine-au-Gros, ont une teneur en matières volatiles analogue à celle des couches inférieures de la série sous-jacente. Il semble donc incontestable que les variations dans la qualité des charbons existaient lors de la production des failles les plus anciennes du bassin.

Il résulte de ces considérations que les modifications dans la nature lithologique des sédiments sont la toute première mani-

(1) P. FOURMARIER, *La tectonique du bassin houiller du Hainaut. Les failles des districts de Charleroi et du Centre.* (ANN. SOC. GÉOL. DE BELGIQUE, t. XLII. Mém. Liège, 1920.)

festation des phénomènes orogéniques; elles correspondent vraisemblablement au premier effort de poussée qui s'est manifesté et qui a eu pour effet de rapprocher les particules des roches et de faciliter ainsi la soudure des éléments originels et les réactions chimiques, en tenant compte de la température à laquelle les roches sont soumises en profondeur et de la charge qu'elles supportent.

Le clivage schisteux qui affecte la plupart des roches argileuses de notre série paléozoïque est, comme le métamorphisme, un phénomène de profondeur. La preuve en est facile; il suffit d'examiner la façon dont se comportent à ce point de vue les schistes dans les étages successifs des terrains primaires belges; dans le houiller, on n'observe pas de clivage schisteux proprement dit; les schistes houillers se débitent bien en feuillets parallèles à la stratification et ce débitage est souvent facilité par la présence de débris de végétaux, mais ils ne présentent pas le feuilletage oblique à la stratification qui constitue le véritable clivage schisteux, postérieur à la sédimentation.

Dans la partie tout à fait inférieure du houiller, on voit parfois une apparence de clivage schisteux mal indiqué; par contre, les bancs de schiste charbonneux très tendre, comme il en existe au contact des couches de houille ou en intercalation entre les lits de charbon, montrent un clivage schisteux très net, oblique à la stratification. L'étude du terrain houiller seul laisse déjà entrevoir que le clivage est un phénomène de profondeur et qu'il est en relation avec la plasticité des roches.

Quand on descend la série des formations primaires, on voit le clivage schisteux devenir de plus en plus net jusqu'à donner naissance au feuilletage parfait des ardoises dans les roches argileuses du dévonien inférieur.

J'ai fait observer que les schistes du dévonien inférieur montrent un métamorphisme plus marqué dans le sud de la Belgique et qu'il y a une relation évidente entre ce fait et l'aug-

mentation d'épaisseur des formations géologiques du nord vers le sud, les modifications dans les roches s'étant faites sous une charge d'autant plus forte que l'on considère une région plus méridionale de notre pays.

Le clivage des schistes du dévonien supérieur est plus marqué dans le sud du bassin de Dinant que dans le bassin de Namur; le clivage des schistes du dévonien inférieur suit exactement la même règle et j'en conclus qu'il y a une relation entre le clivage schisteux et la grandeur de la charge supportée par les roches lors du plissement.

Le clivage est provoqué par la tendance à l'écoulement de la matière sous charge; plus la charge est considérable plus le clivage est parfait.

Il y a donc en Belgique une relation apparente entre le développement du métamorphisme et le développement du clivage schisteux. Cette relation tient à ce que les deux phénomènes dépendent des mêmes causes. Cependant, le clivage exige une condition supplémentaire: il faut que la masse ait une tendance à fluer. Et c'est ainsi qu'en Ardenne, dans la zone de Paliseul, on observe des schistes compacts, aimantifères, où le métamorphisme est bien développé et qui ne montrent pas le clivage ou ne sont affectés que par un clivage imparfait.

Les bancs de schiste qui montrent cette exception à la règle générale sont presque horizontaux, à peine ondulés parce que situés au sommet d'une large voûte; par suite de cette disposition même, la matière n'a pas flué, ne s'est pas écoulée et le clivage n'y a pas pris naissance. C'est, à mon avis, la meilleure façon d'expliquer cette exception à la règle générale que suit la répartition du clivage schisteux dans les roches anciennes de la Belgique.

Puisqu'il y a une si grande analogie entre l'origine du clivage schisteux et celle du métamorphisme, on pourrait croire que ces deux phénomènes ont pris naissance en même temps. L'étude détaillée du clivage ne permet pas de le croire; elle

montre, au contraire, que le clivage est postérieur au métamorphisme.

Il est certain que le clivage schisteux est en relation directe avec les poussées orogéniques; en Belgique la période paléozoïque est marquée par l'existence de deux plissements successifs: l'un après le dépôt du silurien, l'autre après le westphalien; à chacune de ces périodes, l'allure générale du plissement est caractérisée par sa forme en arc largement ouvert vers le nord; dans l'Est de la Belgique, l'effort se manifeste suivant la direction SE.-NW., dans l'Ouest suivant la direction S.-N.

Il est intéressant de remarquer que le clivage décrit en direction une courbe parallèle à celle du plissement lui-même. Chaque période de déformations orogéniques a produit un clivage schisteux, et chacun d'eux répond à la même règle. Il est donc incontestable que le clivage est en relation directe avec la poussée qui a déformé les couches.

Il existe en Belgique de nombreux exemples où l'on voit le clivage garder une allure constante, bien que les couches qu'il traverse soient affectées de plis secondaires; le fait est exact non seulement pour l'inclinaison, mais surtout pour la direction du clivage; dans des plis secondaires à ennoyage très marqué, où, par conséquent, la direction des deux flancs peut être très différente, le clivage schisteux garde une direction parfaitement constante. D'une façon générale, les modifications locales dans l'allure du clivage schisteux peuvent s'expliquer par la présence de bancs ou de massifs plus durs qui ont dévié localement le déplacement de la matière; on peut admettre que le clivage schisteux est provoqué par la tendance de la matière à fluer dans la direction où elle rencontre le moins de résistance.

J'ai rappelé tout à l'heure qu'il existe dans le terrain houiller des bancs très tendres qui montrent le clivage schisteux; j'ai eu l'occasion de les observer en plusieurs endroits et spécialement au nord du bassin de Sambre-Meuse; il est intéressant de noter que l'allure de ces joints est identique à celle des failles dues à

l'accentuation d'un pli en S par étirement de son flanc médian.

En présence de cette constatation, on ne peut s'empêcher de penser qu'il y a une relation évidente entre les failles de ce type et le clivage schisteux et que les deux phénomènes peuvent être regardés comme contemporains.

On sait que les terrains dévono-carbonifères de la Belgique se répartissent actuellement entre quelques grands plis de premier ordre, affectés eux-mêmes par de nombreux plis secondaires. Parmi ces plis de premier ordre, les deux principaux, au point de vue plissement, sont, sans contredit, le synclinal de l'Eifel et le synclinal de Dinant. Dans des travaux antérieurs, j'ai montré que là où ces grands plis ont la plus grande extension transversale, leurs deux flancs montrent une tendance très nette au déversement vers la ligne axiale du pli principal. Je fais abstraction du bassin de la Campine, où les couches sont à peine inclinées, et du bassin de Namur avec la bande houillère de Sambre-Meuse, où les plis secondaires ont été déversés vers le nord comme prélude du charriage de la région méridionale.

On observe que le flanc sud de ces deux grands plis synclinaux de Dinant et de l'Eifel est affecté par un clivage schisteux inclinant au midi ; le flanc nord, par contre, montre un clivage à pente beaucoup plus forte et avec pendage nord là où les plis secondaires sont déversés au midi. Dans la partie centrale des plis principaux les deux flancs des plis secondaires sont redressés et le clivage est voisin de la verticale ; tel est le cas, par exemple, pour les schistes de Wiltz du centre du bassin de l'Eifel dans le grand-duché de Luxembourg.

On admettra que le plissement de l'Ardenne, tel que nous le voyons, s'est fait progressivement en passant par une suite de stades successifs ; on peut supposer, avec beaucoup de raison, que chacun de ces stades a été caractérisé par une allure particulière du clivage dans les couches profondes. Le clivage, tel que nous l'observons, correspond évidemment au flux de la matière schisteuse dans le dernier stade du plissement.

Un point reste à examiner :

J'ai montré que le clivage est en relation avec certaines failles d'accentuation du plissement, dernier stade également de l'effort qui a plissé les roches; mais il y a des failles plus récentes qui sont les grands charriages et l'on peut se demander si le clivage est antérieur ou postérieur à ceux-ci.

Les observations de part et d'autre de la faille du Midi vont nous permettre de préciser.

Dans le Hainaut, comme dans la province de Liège, cette grande fracture est surmontée de dévonien inférieur dont les schistes montrent un clivage très net, oblique à la stratification et répondant à la règle indiquée ci-dessus. Par contre, le terrain houiller situé sous la faille ne montre pas cette déformation intime de la matière.

Puisque le clivage schisteux est un phénomène de profondeur, il est certain que s'il s'était manifesté dans les schistes du dévonien après le refoulement de ces roches sur le terrain houiller, celui-ci devrait montrer un clivage schisteux au moins aussi net que celui du dévonien, puisqu'il se trouve sous ce dernier.

Si donc le clivage schisteux est contemporain du dernier stade du plissement qui a donné aux couches leur allure actuelle, il est antérieur aux grands charriages qui, sans changer sensiblement l'allure générale des plis secondaires, ont refoulé l'un sur l'autre les grands massifs de terrains.

Il résulte de cette étude que l'on peut distinguer plusieurs époques dans les modifications subies par les roches des terrains paléozoïques belges : dès le début des efforts géodynamiques, les sédiments se sont modifiés pour prendre à peu près l'aspect lithologique que nous leur voyons aujourd'hui.

Puis le plissement proprement dit s'est effectué avec ses grands plis de premier ordre compliqués par des mouvements plus petits; certains plis secondaires se sont accentués en failles

en même temps que la tendance au flux de la matière y a fait naître le clivage schisteux; enfin, comme dernier épisode du phénomène, se sont produits les grands charriages qui ont refoulé vers le Nord tout le grand massif méridional, sans apporter de modification sensible à l'allure des plis secondaires, sauf au voisinage immédiat du charriage, sans accentuer le métamorphisme et sans changer la disposition générale du clivage schisteux.

BOTANIQUE. — Quelques expériences de régénération de bourgeons chez les racines de Chicorées,

par Mme J. SCHOUTEDEN-WÉRY (1).

La plupart des organes végétaux sectionnés manifestent dans leurs régénérations d'organes des phénomènes de « polarité », leurs deux extrémités ne se comportant pas de même dans la réaction régénératrice. Un fragment de rameau de Saule, par exemple, mis en bouture, donne toujours des racines vers le bout proximal, — celui qui était dirigé vers la base du Saule dont on l'a cueilli; — c'est le *pôle radicaire*. Par contre l'extrémité opposée, la région distale, donne exclusivement des bourgeons; c'est le *pôle gemmaire*.

Des recherches fort curieuses ont été entreprises déjà sur cette polarité des organes végétaux, notamment par Morgan, Kny, Janse, Winkler, etc., mais surtout par Nemec, Goebel et Vöchting, elles ont été bien résumées et analysées par Goebel dans son *Experimentelle Morphologie der Pflanzen*.

Mais il n'en est pas moins vrai que le problème, s'il est posé, est loin d'être éclairci. Toutes les plantes possèdent-elles ainsi

(1) Présenté par M. Massart.

dans leurs organes cette double polarité? Est-elle immuable? Et surtout en quoi consiste-t-elle essentiellement?

M. J. Massart a démontré ⁽¹⁾ expérimentalement que tandis que certaines plantes révèlent dans leurs tiges une parfaite et double polarité, d'autres n'en possèdent qu'une seule, soit gemmaire, soit radiculaire. Autrement dit, chez certaines tiges les racines adventives peuvent se former indifféremment en des endroits quelconques, tandis que les bourgeons ne se forment jamais que dans la région distale (polarité gemmaire); chez d'autres, au contraire, à polarité radiculaire, les racines ne se forment qu'au bout proximal, tandis que les bourgeons peuvent se former partout. Enfin, ses expériences ont révélé aussi que certains organes végétaux à pouvoir régénérateur sont dépourvus de toute polarité : on peut amener certaines tiges à produire racines ou bourgeons indifféremment à l'un ou l'autre pôle, suivant les conditions réalisées dans l'expérience.

Le Prof^r Massart avait observé, il y a longtemps déjà, que les facteurs externes peuvent entrer en conflit avec la polarité innée d'un organe et l'influencer profondément (chez le Caféier).

Or, c'est ici que le problème devient intéressant au point de vue de la morphologie expérimentale, puisqu'il s'agit de vérifier l'action des facteurs externes sur le déterminisme des formes organiques.

Si la voie est ouverte dans ce domaine d'investigation, il faut à présent multiplier les recherches et les expériences, en utilisant des matériaux variés, en précisant les conditions d'expériences et en les faisant varier le plus possible pour analyser avec exactitude les causes agissantes.

C'est pourquoi M. Massart m'a conseillé d'entreprendre une série de recherches sur cette question. Il m'a aidée de ses conseils et c'est à sa suggestion que j'ai utilisé comme matériel les

⁽¹⁾ J. MASSART, *Sur la polarité des organes végétaux*. (BULLETIN BIOLOG. DE FRANCE ET DE BELGIQUE, t. LI, fasc. 4, avril 1918.)

racines tuberculeuses de Chicorées si abondamment cultivées dans les environs de Bruxelles, pour donner par le forçage d'hiver le légume réputé dit « chicorée de Bruxelles » ou « witloof ».

Ces racines, qui n'avaient pas encore été employées pour les expériences de polarité, se sont révélées un matériel de tout premier ordre : elles régénèrent admirablement bourgeons et racines ; elles possèdent d'abondantes réserves qui permettent leur culture en simple atmosphère humide, et elles répondent aux questions que leur pose l'expérimentateur avec une promptitude, une docilité et une netteté surprenantes.

LE PROBLÈME DE LA POLARITÉ.

Avant d'exposer les expériences faites et les conclusions que je crois pouvoir en déduire, il me paraît utile d'analyser ce problème de la polarité comme j'ai été amené à le faire par l'observation de mes sujets d'expériences :

a) Il faut s'entendre d'abord sur la valeur des termes et les préciser. C'est ainsi que le terme « polarité » doit être réservé uniquement à la tendance interne, innée, que possède un organe à réagir différemment à ses deux pôles. Et il faut en distinguer les facteurs étrangers externes qui pourraient intervenir dans ces réactions.

La polarité apparaît donc simplement comme le facteur interne, inné, de la différenciation dans la faculté de régénération des organes blessés ;

b) Cette faculté de régénération est d'ailleurs éminemment complexe et il faut lui appliquer la remarque générale faite par Buffon dès 1753 déjà : « Dans la nature, la plupart des effets dépendent de plusieurs causes différemment combinées » ... « et il faut pour que nous puissions mesurer une cause qu'elle soit *simple*, qu'elle soit *toujours la même*, que son action soit *constante* ou, ce qui revient au même, qu'elle ne soit variable que suivant une loi exactement connue ».

Or, toute régénération d'organes comporte deux phénomènes consécutifs et connexes :

1° Des divisions cellulaires anormales ; j'entends par là qu'elles se produisent en des points où normalement elles ne se seraient pas produites sans l'intervention de la blessure qui joue un rôle d'excitant à la division cellulaire.

2° Une différenciation des cellules ainsi obtenues conduisant à la formation de l'un ou l'autre organe. Or, la différenciation cellulaire peut être influencée par d'autres facteurs que la division cellulaire. Et certains facteurs actifs dans la division cellulaire pourraient être indifférents ou même inhibiteurs dans la différenciation organique.

La régénération d'un organe doit donc être étudiée comme la résultante de l'action de facteurs provoquant, d'une part, les proliférations cellulaires et, d'autre part, leur différenciation.

c) Il faut tenir compte aussi des possibilités organiques. Exemple : la présence de feuilles à l'une des extrémités d'une tige ou d'une racine détermine immédiatement dans cet organe un appel d'eau dans cette direction. Or, supposons qu'une racine ait produit des proliférations à ses deux pôles et que pour l'une ou l'autre raison la réaction ait été plus rapide au pôle *a* qu'au pôle *b*, que des bourgeons se différencient plus rapidement en *a* qu'en *b*, les feuilles se développant en *a* vont attirer vers elles toute l'eau puisée par les racines, et les ébauches de bourgeons qui auraient pu s'être formées en *b* s'en trouvent du coup arrêtées dans leur développement. Faudra-t-il conclure à la polarité gemmaire de l'extrémité *a*? Évidemment non. Le cas s'est présenté plusieurs fois dans mes expériences. Il ne faut donc considérer comme réaction « valable » que l'apparition des tout jeunes bourgeons et considérer l'expérience comme close aussitôt que des feuilles se sont épanouies.

d) Enfin, faisons remarquer, pour terminer ce préambule, que dans une expérience sur la recherche des facteurs agissant dans la régénération d'organes, il faut provoquer toujours une véri-

table *naissance* d'organes nouveaux et non un développement d'organes préexistants. Dans mes expériences sur les Chicorées, j'ai obtenu d'innombrables apparitions de racines, mais à cause de leur origine endogène, il me serait difficile à présent de préciser s'il s'agissait de simples développements ou de véritables naissances d'organes. Dans ce travail-ci, j'abandonnerai donc toute discussion sur la polarité radiculaire, car il va de soi que s'il ne s'agit que d'organes déjà ébauchés dans les tissus avant l'expérience, les conditions extérieures sont toutes-puissantes sur leur développement, mais qu'on ne peut le moins du monde conclure dans ce cas à leur action formatrice sur ces organes, ni à leur pouvoir inhibiteur ou modificateur de la polarité d'un fragment végétal.

CONDITIONS D'EXPÉRIMENTATION.

Les expériences ont été faites dans une chambre thermostatique de l'Institut botanique Léo Errera. La *température* s'y est maintenue *constante*, oscillant à peine entre 16 et 17° centigrades. Une ampoule électrique de 400 bougies y maintenait une *lumière continue* et suffisante. Ces conditions se sont montrées tout à fait favorables au développement des Chicorées mises en expérience de la fin novembre 1919 à la fin janvier 1920. Les racines, prises avant la mise au forçage, ont été choisies saines, régulières et bien gorgées de réserves. Leur extrémité distale (la plus éloignée du collet), leur bourgeon et toutes leurs racines latérales ont été soigneusement sectionnés. Elles ont été placées soit isolément, soit par deux ou trois dans des récipients de verre bien transparents, contenant dans leur fond une couche d'eau ou bien un peu d'ouate ou de papier à filtrer imbibé d'eau. Ces récipients, recouverts d'une plaque de verre, renferment donc un air saturé d'humidité. Malgré cela on évite assez bien le développement des Champignons et des Bactéries si l'on a eu soin de laver et de rincer longuement les verres et si les Chicorées ont été soigneusement brossées et rincées dans l'eau courante.

Pour les expériences à l'obscurité continue, le dispositif est le même, mais un épais papier noir recouvre parfaitement les récipients, qui, pour plus de sûreté, sont placés dans les coins sombres de la chambre.

Une centaine de carottes de *Chicorées* ont été mises en expérience. Chaque expérience a été renouvelée au moins deux fois. Nous ne résumons ici que les expériences les plus significatives. Nous désignons sous le nom de *pôle proximal* celui qui était le plus rapproché du collet de la plante et sous le nom de *pôle distal*, celui qui en était le plus éloigné.

RÉSUMÉ DES EXPÉRIENCES.

1° Toutes les *Chicorées* dont on a sectionné bourgeons, racines latérales ou fragment quelconque cicatrisent rapidement leurs blessures. Le latex ne s'écoule que pendant peu de temps. Partout où elle a été entamée la région cambiale présente au bout de quelques jours de fortes proliférations qui gagnent de proche en proche les surfaces des tissus voisins mis à nu par la section; une sorte de gros cal irrégulier se forme ainsi qui recouvre bientôt toute la surface blessée.

La blessure, particulièrement celle de la région cambiale, est donc un vigoureux excitant à la division cellulaire.

2° A la lumière continue ces proliférations verdissent; à l'obscurité continue elles restent blanches. A remarquer que ces proliférations se forment plus rapidement et sont toujours plus fortes à la lumière qu'à l'obscurité.

La lumière se montre donc aussi un excitant actif de la division cellulaire.

3° Une racine étant disposée comme elle le serait dans le sol (dressée, la région proximale vers le haut et éclairée, la région distale vers le bas et dans l'obscurité), seules les proliférations

de la section proximale se différencient de manière à donner des bourgeons adventifs nombreux et serrés les uns contre les autres (fig. 1). Du cal formé à la section distale sortent quelques racines, mais il en sort aussi sur toute la longueur de la racine.

La polarité semble donc parfaite et particulièrement nette pour le pôle gemmaire. Mais y a-t-il bien ici polarité et les facteurs externes n'interviennent-ils pas dans cette localisation des bourgeons vers le pôle le plus élevé et éclairé? Si c'est le facteur interne polarité qui régit souverainement cette locali-

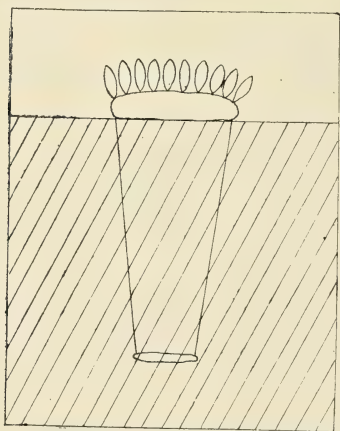


FIG. 1.

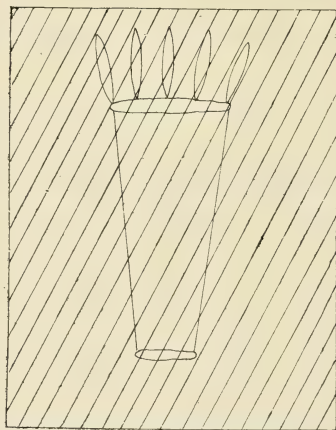


FIG. 2.

sation, nous n'obtiendrons de bourgeons qu'à cette extrémité proximale, quelles que soient la position et les conditions dans lesquelles nous plaçons la racine.

4° Chez des racines mises tout entières à l'obscurité et dressées, la polarité semble encore fort nette : les bourgeons se forment exclusivement à la section proximale (fig. 2). Ils sont jaunâtres, étiolés, moins nombreux et moins rapidement formés à l'obscurité qu'à la lumière ; mais ceci est en rapport avec le 2°.

L'obscurité n'empêche donc pas la formation de bourgeons.

Il ne se forme pas de racines à la section proximale. Faisons remarquer tout de suite que jamais nous n'avons obtenu de racines sur la section proximale, tandis que partout ailleurs il en apparaît toujours.

5° Chez des racines mises tout entières à la lumière et dressées, la polarité semble moins nette : les bourgeons se forment nombreux à la section proximale, mais il en naît aussi çà et là sur la longueur de la carotte en des endroits où des racines latérales avaient été coupées (fig. 3).

La lumière semble donc favoriser ici la formation de bourgeons adventifs.

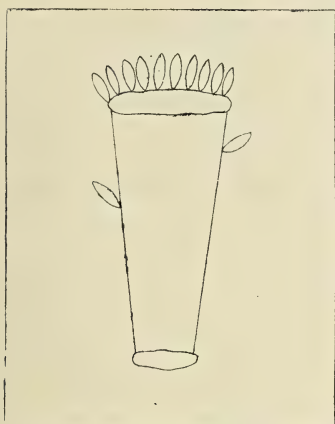


FIG. 3.

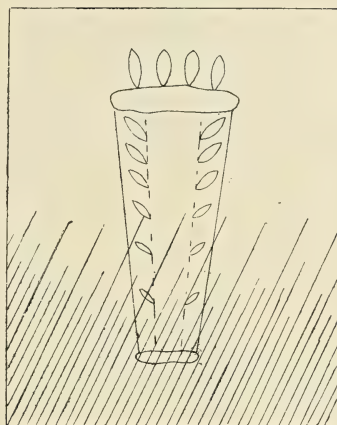


FIG. 4.

Des racines apparaissent partout sauf à la section proximale. La lumière n'empêche donc pas le développement des racines.

6° Une racine est coupée en deux longitudinalement. Les deux moitiés sont dressées et, le récipient étant obscurci vers le bas, la lumière arrive par dégradations successives de la région proximale (supérieure), à la région distale (inférieure), qui est tout à fait dans l'ombre.

De belles proliférations se forment tout le long des deux lignes cambiales mais plus abondantes et plus vertes vers le haut que vers le bas. Des bourgeons s'y différencient bientôt dans toute la longueur de la racine mais plus nombreux vers le haut que vers le bas (fig. 4).

Des bourgeons peuvent donc se former à partir d'un méristème secondaire de racine dans toute la longueur de cette dernière, mais leur formation est nettement favorisée dans la région proximale, plus élevée et mieux éclairée.

7° Racines dressées, région proximale obscurcie par une cache noire sur le récipient, région distale à la lumière continue.

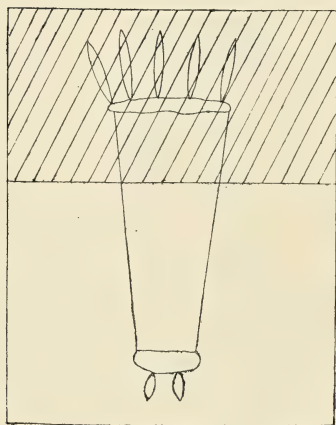


FIG. 5.

Cette expérience, très importante, fut renouvelée plusieurs fois. Toujours de belles proliférations vertes se forment à l'extrémité distale. Dans la plupart des cas ce sont les proliférations blanches de la section proximale qui seules ont formé des bourgeons ; mais sur deux exemplaires le cal distal a donné naissance à de petits bourgeons à feuilles bien vertes. Dans

ces deux cas le développement des bourgeons de la région proximale avait été plus lent (voir remarque c de la p. 4) (fig. 5).

Ici donc *la lumière a nettement combattu la polarité.*

8° Dans tous les cas précédents les racines étaient dressées, et c'est la pesanteur peut-être qui déterminait l'apparente polarité.

Une racine éclairée totalement et continûment mais *retournée* de haut en bas donne des bourgeons sur la prolifération proxi-

male, — située cette fois vers le bas, — mais en donne également, quoique plus rares et plus petits, sur la prolifération distale — vers le haut — (fig. 6).

La lumière agissant également sur les deux pôles, la PESANTEUR a influencé la polarité sans toutefois l'invertir.

9° La même expérience à l'obscurité complète et continue donne le même résultat.

10° Une racine retournée, comme au 8° et au 9°, mais dont la région distale est éclairée, la région proximale obscurcie, donne à ses deux pôles de beaux bourgeons qui ne diffèrent que par leur étiolement au pôle proximal obscurci (fig. 7).

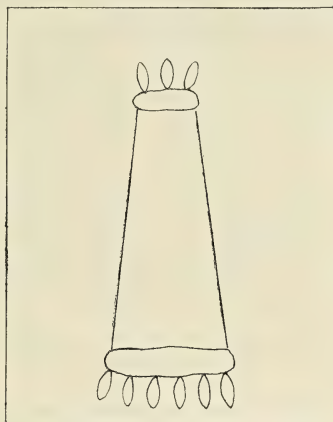


FIG. 6.

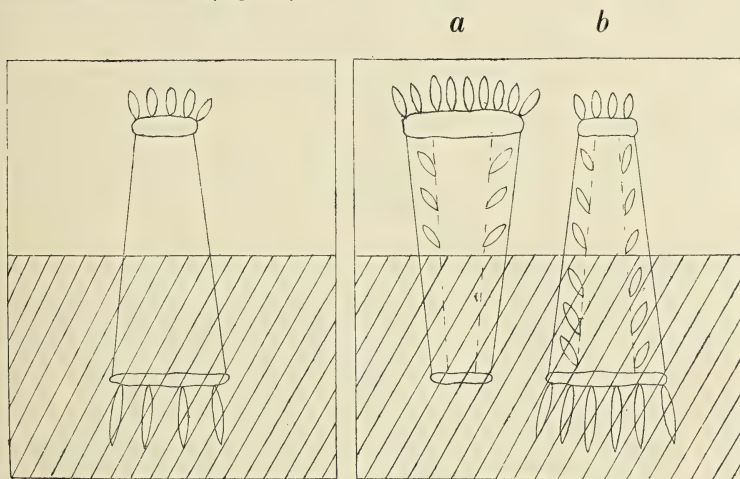


FIG. 7.

FIG. 8.

Les facteurs externes, LUMIÈRE et PESANTEUR associés ici, ne réussissent pas à invertir la polarité gemmaire, mais ils la COMBATTENT et la REMPLACENT.

11° Ce résultat est plus manifeste sur une racine coupée longitudinalement. Les deux moitiés sont verticales, mais l'une *a* dressée normalement, l'autre *b* retournée; la moitié supérieure du vase est éclairée, la moitié inférieure obscurcie.

D'abondantes proliférations sur les lignes cambiales donnent : pour la moitié *a* des bourgeons dans la région proximale éclairée, aucun dans la région distale obscurcie; pour la moitié *b* des bourgeons sur toute la longueur des proliférations (fig. 8).

Obscurité et renversement n'ont pu supprimer dans la région proximale la tendance à donner des bourgeons, mais la lumière et la position élevée ont déterminé dans les proliférations de la région distale la formation de bourgeons.

12° Les expériences précédentes m'avaient amené à me demander si la tendance à donner des bourgeons n'était pas, non une question de polarité réelle, mais une propriété organique mieux développée dans les tissus de la région proximale et s'atténuant progressivement vers la région distale. Une expérience faite avec un fragment proche du collet d'une forte racine

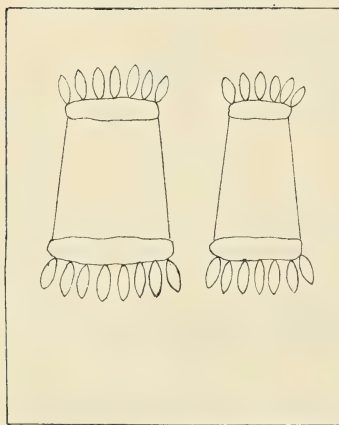


FIG. 9.

aurait pu me le faire supposer, tant j'avais obtenu de beaux bourgeons sur ces sections distales, le fragment étant *retourné*, éclairé totalement et continûment.

13° Pour vérifier ce fait, une Chicorée est coupée en deux transversalement; les deux moitiés sont placées verticalement mais *retournées et totalement éclairées*. Les deux moitiés ont donné chacune à leurs deux pôles un gros cal bien vert et des bourgeons. Les bourgeons étaient plus vigoureux sur la moitié supérieure, la plus grosse, donc plus riche en réserves sans doute (fig. 9).

14° Les expériences suivantes sont faites dans le même but :

a) Une Chicorée est découpée transversalement en plusieurs tronçons posés, tous *dressés* normalement, les uns à côté des autres dans un même récipient et exposés à la lumière continue.

Tous les tronçons ont également bien bourgeonné sur les sections proximales, sans qu'aucun bourgeon se soit formé sur les sections distales (fig. 10a).

La propriété de produire des bourgeons ne s'atténue pas dans les tissus de la racine du collet vers l'extrémité, mais chaque tronçon possède une polarité gemmaire très nette.

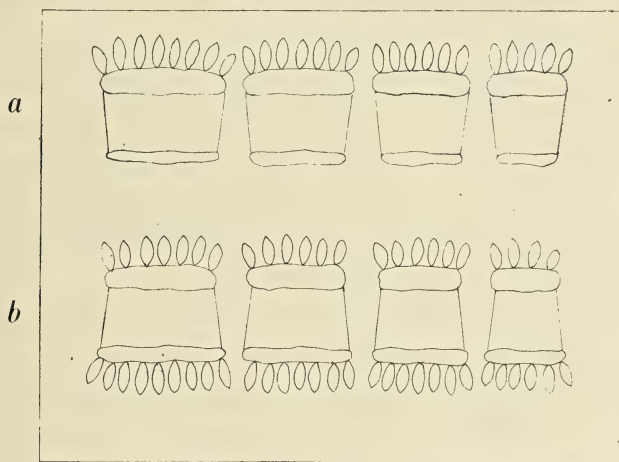


FIG. 10.

b) Une racine est taillée comme en *a*, mais les tronçons sont retournés, la face distale vers le haut.

Tous les tronçons ont bourgeonné sur leurs deux surfaces de section, un peu plus vigoureusement à la face proximale qu'à la face distale. Mais il n'y a entre les divers tronçons aucune différence dans la manière de réagir, sauf évidemment que la surface de réaction est plus grande chez les uns que chez les autres (fig. 10b).

La polarité gemmaire de la section proximale se maintient partout; mais ici les surfaces distales, se trouvant vers le haut

et non vers le bas, subissent autrement l'action de la pesanteur et de la lumière, ce qui suffit à provoquer le développement de bourgeons sur leurs proliférations.

15° Mêmes expériences qu'au 14° *a* et *b* mais à l'obscurité continue. Résultats absolument comparables, mais les bourgeons sont moins nombreux et moins vigoureux.

16° Disposées *horizontalement* et totalement éclairées ou totalement obscurcies, des racines manifestent une polarité gemmaire au pôle proximal (fig. 11).

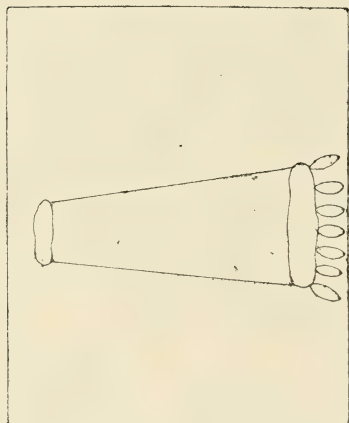


FIG. 11.

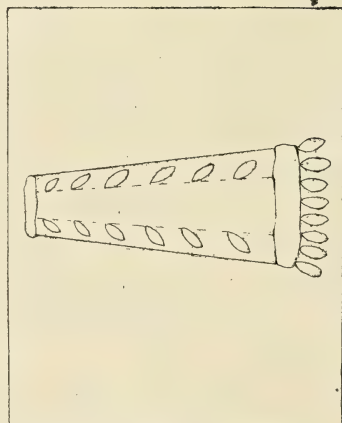


FIG. 12.

17° Mais une racine coupée longitudinalement en deux, les surfaces de sections disposées *horizontalement vers le haut*, forme des bourgeons au bout proximal sans doute, mais aussi dans les proliférations formées sur toute la longueur des lignes cambiales (fig. 12).

Blessure cambiale, lumière et position la plus élevée favorisent ici les divisions cellulaires et leur différenciation en bourgeons, sur les sections longitudinales, malgré la polarité gemmaire, non effacée d'ailleurs.

18° Une racine est coupée longitudinalement en deux; les deux moitiés sont disposées horizontalement (les surfaces de section vers le haut) dans un récipient divisé par une cloison de carton en deux compartiments, l'un éclairé, l'autre obscurci. La moitié *a* a sa région proximale dans la partie éclairée. Pour la moitié *b* c'est le contraire.

Pour *a* comme pour *b* les proliférations cambiales sont plus belles dans la région éclairée et elles y donnent des bourgeons, très nombreux pour *a*, qui y a sa région proximale, moins nombreux et plus faibles pour *b*, qui y a sa région distale.

Dans la partie obscure, les proliférations cambiales de la région distale de *a* n'ont donné aucun bourgeon; la région proximale de *b* a donné *plusieurs* bourgeons (fig. 13).

Cette expérience est la plus significative. Toutes les proliférations y occupent la même situation quant à la pesanteur; toutes se trouvent aussi à la même distance du fond mouillé de la boîte de verre; seules interviennent donc la lumière et les tendances internes des organes régénérateurs. Or, la lumière a pu déterminer le bourgeonnement dans la région distale; au contraire, l'absence de lumière a pu ralentir et atténuer mais non empêcher la formation de bourgeons sur la région proximale.

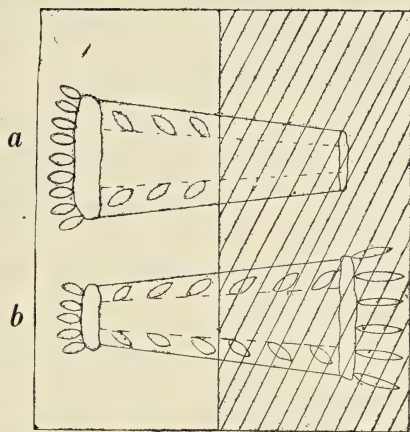


FIG. 13.

Toute une série d'autres expériences avaient encore été amorcées, notamment au clinostat, de manière à mettre mieux en évidence le rôle de la lumière et de la pesanteur dans la régénération de bourgeons chez les racines de Chicorées; malheu-

reusement j'ai dû les interrompre fin janvier, parce qu'à cette époque il ne m'a plus été possible de me procurer des racines n'ayant pas commencé déjà à subir le forçage en culture.

Je me propose de poursuivre une autre année ces expériences et d'en grouper alors les résultats.

*
* *

CONCLUSIONS qui se dégagent des expériences faites jusqu'à présent :

1. Les racines de Chicorées manifestent toujours une polarité gemmaire fort nette : en toutes positions la région proximale produit des bourgeons ;

2. Cette polarité gemmaire peut être non invertie mais combattue cependant par les facteurs externes, *pesanteur* et *lumière*, qui interviennent dans la production de bourgeons au pôle opposé. Ces facteurs externes peuvent donc suppléer au facteur interne et produire les mêmes effets que lui.

BIBLIOGRAPHIE.

1. GOEBEL, K., *Experimentelle Morphologie des Pflanzen*. B.-G. Teubner, Leipzig, 1908.
2. JANSE, *Polarität und Organbildung bei Caulerpa*. (PRINGSHEIM JAHRB., Bd. XLII, p. 394.)
3. KNY, *Umkehrversuche mit Ampelopsis und Hedera*. (BER. D. BOT. GES., Bd. VII, p. 201.)
4. MASSART, J., *Sur la polarité des organes végétaux*. (BULL. BIOLOG. FRANCE ET BELG., t. LI, fasc. 4.)
5. MORGAN, *Polarity and Regeneration in Plants*. (BULL. TORREY BOT. CLUB., vol. XXXI, 1904, p. 227.)
6. NEMEC, *Einige Regenerationsversuche an Taraxacum Wurzeln*, 1907.
7. NEMEC, *Weitere Untersuchungen über Polarität*. (BULLETIN INTERN. ACAD. SC. DE BOHÈME, mars 1907.)
8. VÖCHTING, *Über Organbildung im Pflanzenreich*. Bonn, 1878.
9. VÖCHTING, *Über Regeneration und Polarität bei höheren Pflanzen*. (BOT. ZEIT., 1906.)
10. WINKLER, *Über Polarität, Regeneration und Heteromorphosen bei Bryopsis*. (JAHRB. F. WISSENSCH. BOT., Bd XXXV [1900].)

BOTANIQUE. — Contributions à l'étude
des Chrysomonadines,

par W. CONRAD, docteur en sciences,
professeur à l'Athénée et au Lycée de Saint-Gilles (Bruxelles) (1).

I. — SYNURA UVELLA Ehr.

Synura uvela Ehr. est une des Chrysomonadines les plus jolies et les plus communes. Le filet à plancton en ramène souvent et il n'est pas rare de la rencontrer en si grande quantité dans les fossés, les abreuvoirs et les mares que l'eau en est colorée en brun foncé.

Comme nous l'avons déjà dit ailleurs (2), cette Chrysomonadine est loin de nous avoir révélé tous ses secrets. Les études que nous poursuivons depuis plus de dix ans sur les organismes inférieurs nous ont mis très souvent en présence de ce flagellé intéressant; la présente note constitue une étude synthétique de nos connaissances actuelles sur *Synura*, dans laquelle nous intercalerons plusieurs observations personnelles et nouvelles. Si nous ne traitons point le chapitre si intéressant de la formation des zoospores, des stades amiboïdes et des stades palmellaires, c'est que ces données se trouvent condensées dans le beau travail de PASCHER (10) auquel nous renvoyons.

DESCRIPTION DE LA CELLULE. — La cellule est ovoïde ou piri-forme. L'extrémité antérieure est largement arrondie, tandis que la postérieure s'atténue ou s'étire en une « queue » plus

(1) Présenté par M. J. MASSART.

ou moins développée (fig. 1, *a*). Notre figure 1, *b* représente des cellules d'une forme que les naturalistes semblent n'avoir pas encore observée : elles sont régulièrement elliptiques et très allongées.

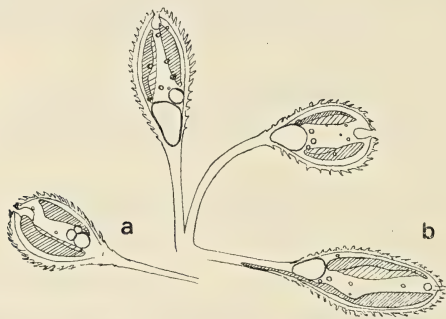


FIG. 1. — *Synura urella*.
a. Cellule de forme typique ;
b. Cellules particulièrement allongées.

Le corps atteint une longueur de 20 à 40 μ et une largeur de 8 à 17 μ .

Il présente deux grands *chromatophores* pariétaux, en forme de calottes ou de verres de montre. Ils sont très nets. Leur couleur varie du jaune verdâtre pâle au jaune d'or et au brun foncé. Cette variabilité dans la nuance semble caractéristique des *Chrysomonadines*. Elle a déjà été signalée chez plusieurs formes, notamment chez *Chromulina*, *Chrysococcus*, *Mallomonas* et surtout chez *Dinobryon*. Dans les eaux riches en substances organiques, les plastides sont franchement verdâtres.

A la partie antérieure de la cellule (le plus souvent largement arrondie), s'insèrent deux *fouets* égaux et assez robustes qui mesurent une à deux fois la longueur de l'individu. Ils se voient nettement sur le matériel vivant ; ils battent avec lenteur. Ils s'observent mieux encore sur le matériel fixé par l'acide osmique ou par l'iode ioduré aqueux — ce dernier les colore en jaune — ou chez les individus colorés par le violet de gentiane ou la fuchsine phéniquée.

A la base de la cellule se trouvent deux ou trois *vacuoles pulsatiles* contiguës, dont le fonctionnement est difficile à observer. Dans quelques cas, pourtant, il nous a été possible de voir qu'elles battaient alternativement, à peu de secondes d'intervalle. Sont-elles réunies, comme chez *Mallomonas*, en un véritable système pulsatile? C'est probable, mais ce système est des plus simples : une sorte de vacuole collectrice faisant, croyons-nous, défaut. A l'avant du corps s'observe parfois une vacuole supplémentaire.

La cellule n'offre jamais de vrai *stigma*. Par contre, à l'avant du corps, se remarquent souvent des corpuscules rouges, en nombre extrêmement variable. Tantôt on en compte deux ou trois, tantôt une douzaine. (AWERINZEW a même créé une *var. punctata* pour des *Synura* portant un petit nombre de ces corpuscules.)

Ces corpuscules ont été décrits par différents auteurs sous le nom de stigmas. Mais comme ils ne se réunissent jamais en une masse rouge d'aspect homogène, comme ils ne sont jamais supportés par une trame de protoplasme différencié, je pense, avec PASCHER et d'autres naturalistes, qu'on ne peut pas les considérer comme des taches oculaires ou comme faisant partie d'un stigma. Ces gouttelettes présentent les réactions chimiques suivantes : elles se colorent en bleu-vert foncé par l'iode et le chlorure ferrique; elles sont donc, semble-t-il, constituées par cette huile rouge étudiée par COHN (dans son travail sur l'*Haematococcus*), ROSTAFINSKI, CZAPEK et d'autres, et connue sous le nom d'hématochrome ou de carotine. (C'est celle-ci qui produit, on le sait, la coloration rouge de l'*Euglena sanguinea* et du stigma des zoospores d'algues.) Comme ces gouttelettes rouges manquent souvent dans les cellules de *Synura*, il n'y a pas lieu, croyons-nous, de les considérer comme un stigma non encore différencié.

Parfois nous avons rencontré quelques gouttelettes très réfringentes éparpillées dans le protoplasme. Elles sont formées d'huile, car les vapeurs d'acide osmique les colorent en noirâtre

et le Soudan III (en solution dans l'alcool absolu), en rouge brillant.

L'arrière du corps offre un ou plusieurs globules volumineux de *leucosine*, produit caractéristique des *Chrysomonadines* et que celles-ci sont seules à posséder. Cette leucosine peut remplir tout le fond de la cellule. Elle se présente sous l'aspect d'une masse très réfringente, à reflet bleuâtre et gras. Sa nature est inconnue : extrêmement fugace, la leucosine disparaît après la mort de l'organisme et ne résiste à aucun réactif.

Le *noyau* est central. Il est sphérique et relativement gros : il mesure 2 à 3 μ de diamètre. Il se colore par le rouge de magdala en un beau rouge brillant, et en violet par le violet de gentiane (en solution aqueuse faible). Le rouge de ruthénium et l'hématoxyline donnent également de belles préparations. La structure du noyau n'a pas pu être découverte.

*
* * *

Pendant la plus grande partie de leur existence, les cellules de *Synura* sont incluses dans une *loge* étroitement appliquée sur le protoplasme. La cellule épouse la forme de cette enveloppe. Elle s'atténue plus ou moins brusquement en un prolongement hyalin, une sorte de « queue », et l'ensemble est alors piriforme. Souvent aussi — et cette observation est nouvelle — la loge s'atténue graduellement en un pédoncule qui peut être très développé, et il en résulte une sorte de massue à manche très allongé (fig. 1b; 8a).

La nature de cette enveloppe si caractéristique pour les *Synura* est incomplètement connue.

Ici elle est très mince; là elle s'épaissit notablement et se colore en brunâtre, comme les coques des *Chrysococcus*, par l'accumulation d'oxyde de fer.

L'enveloppe des *Synura* se colore en brunâtre par l'iode ioduré aqueux. Mais l'iode sulfurique, le chlorure de zinc iodé, l'acide phosphorique iodé ne produisent pas la réaction de la

cellulose. Par contre, dans plusieurs cas, le bleu de naphtylène « R en cristaux », le rouge de ruthénium, le rouge de magdala ont fourni la réaction des matières pectiques de MANGIN. La safranine et le violet de gentiane (aqueux), si précieux dans l'étude des gelées ou des membranes gélifiables (voir plus loin), donnent de belles préparations.

*
* * *

La loge est rarement lisse. Généralement elle est rehaussée d'ornements variés, représentés le plus souvent par des aiguillons dirigés vers l'avant.

Chez *S. reticulata* LEMMERM. (*Arch. f. Botan.*, t. II, 2, p. 119), ces soies sont très courtes et ressemblent plutôt à des mamelons plus ou moins pointus reliés entre eux par de fines côtes.

S. verrucosa PASCHER (11, p. 51) — décrite d'abord sous le nom de *S. reticulata* LEMMERM., var. *verrucosa* PASCHER (13) — offre une enveloppe nue ou bien ornée de mamelons réunis par des côtes très nettes.

Nous sommes convaincu qu'il ne s'agit pas là de trois espèces distinctes, car — les auteurs qui les ont décrites signalent déjà ce point — ces ornements sont soumis à d'importantes fluctuations. Dans une même pêche nous avons rencontré tous les stades de transition entre les loges nues (*S. verrucosa*), les loges à mamelons réunis par des côtes difficiles à distinguer (*S. reticulata*), celles à mamelons réunis par des côtes nettes (*S. verrucosa*) et celles, enfin, avec des soies caractéristiques qui, elles aussi, étaient tantôt très peu, tantôt très fort développées. Comme le dit PASCHER (11, p. 51), la forme générale de ces trois espèces est identique, sauf, et il insiste sur ce point, que *S. reticulata* (découvert une seule fois en Suède et retrouvé par nous en abondance, dans la mare à *Ceratium*, à Hoboken, a toujours des cellules plus elliptiques. AWERINZEW (1, p. 7, fig. A) a observé à sec des *Synura uvella* typiques : il y a découvert la même mosaïque que dans *S. reticulata* et *verrucosa* ; les soies

naissent au point de contact des facettes. Nous décrirons plus loin des formes identiques, ainsi que d'autres, non encore signalées ailleurs, qui, par leurs soies, sont des *S. uvella* typiques ⁽¹⁾.

L'étude attentive et poursuivie de la structure cellulaire nous dévoilera un jour s'il s'agit là réellement de trois espèces distinctes. Entretemps nous sommes convaincu qu'une seule forme, *S. uvella* EHR., a été observée, mais qu'elle est fort sujette à varier au point de vue du contour général et, surtout, des enveloppes.

*
+ * *

DIVISION DE LA CELLULE. — La division chez les Chrysomonadines semble être toujours *longitudinale*. Jusqu'à présent elle a été observée chez une vingtaine d'espèces que nous avons énumérées ailleurs (4, p. 83). Toutes les données sur la division transversale (*Stylopyxis*) ou l'oblique (*Epipyxis*, *Chrysallis*, *Dinobryon utriculus*) demandent à être vérifiées avec soin.

C'est aux recherches de KLEBS, LEMMERMANN, SCHERFFEL, IWANOFF, PASCHER, que nous devons le peu que nous savons sur la division cellulaire des Chrysomonadines.

Nous avons rencontré beaucoup de cellules qui en coupe transversale offraient l'aspect d'une ellipse, d'un biscuit, même d'une haltère, ce qui pose comme certaine la *division longitudinale*

(fig. 2). D'autant plus que dans des cas très isolés, l'action des colorants nous a fait découvrir des cellules portant deux noyaux situés l'un à côté de l'autre.

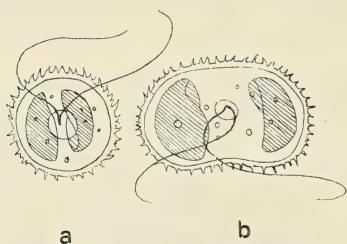


FIG. 2. — *Synura uvella*.

- a. Cellule normale, vue par le pôle flagellé ;
- b. Cellule en division, vue par le pôle flagellé.

(1) E. LEMMERMANN a décrit (*Forschungsber.* Plön, Teil 7, 1899, p. 410) une forme (*Synura Klebsiana*, LEMM.) dont l'enveloppe est composée de paillettes pourvues d'aiguilles siliceuses. Ce flagellé, qui représente une remarquable convergence vers *Mallomonas*, a été insuffisamment étudié; s'agit-il réellement d'une espèce distincte ?

Mais nous n'avons aucune indication sur la part prise à la division par les chromatophores, les fouets, les vacuoles, la loge extérieure.

Tout ce que nous savons, c'est que la division est longitudinale et que l'une des cellules filles ne quitte pas nécessairement la loge naturelle, à l'état de zoospore nue. Chez *Synura*, les cellules filles, chacune entourée de sa loge, restent réunies par leur pédoncule, ce qui donne lieu à la constitution de colonies.

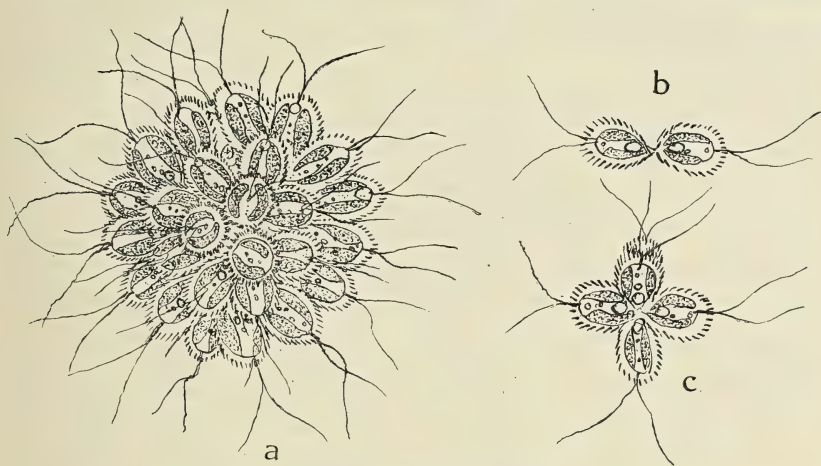


FIG. 3. — *Synura wella*.

a. Colonie sphérique; b. Colonie à deux individus; c. Colonie à quatre individus.

LA COLONIE. — La division cellulaire est donc le point de départ d'une *colonie* dont la forme, loin d'être aussi immuable que tous les auteurs l'ont admis jusqu'à présent, peut présenter des aspects assez différents résultant du manque absolu de rapports intimes, morphologiques ou physiologiques, entre les constituants.

Nous avons observé, à plusieurs reprises, des colonies réduites à leur plus simple expression, c'est-à-dire formées de deux cellules seulement, dont la partie basale se touchait par l'intermédiaire d'un pédoncule plus ou moins développé (fig. 3, b). Ces très jeunes colonies se meuvent d'une façon

caractéristique : l'axe longitudinal unique, commun aux deux individus, est toujours à peu près perpendiculaire à la direction suivie et décrit, de part et d'autre de celle-ci (axe de direction), un cône de révolution.

*
* *

Le nombre des constituants d'une colonie dépend principalement de son âge. On rencontre des associations formées d'un petit nombre de cellules; d'autres, qui en portent une vingtaine. Des divisions répétées amènent de la constitution de colonies *sphériques* (fig. 3, a), comprenant souvent beaucoup plus de 50 individus; ces colonies seules ont été décrites et figurées jusqu'ici. On y voit les cellules ovoïdes, insérées autour d'un point central par l'intermédiaire de leur pédoncule; la partie apicale, les soies, les fouets sont tournés vers le dehors. C'est sous cette forme classique que *Synura* se rencontre le plus souvent dans les pêches. Elle est parfois tellement abondante que l'eau en est colorée en brun foncé. Les colonies roulent dans le liquide d'un mouvement plus ou moins désordonné; jamais on ne découvre que la rotation se fait autour d'un axe déterminé,

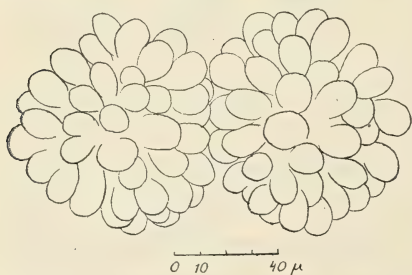


FIG. 4. — *Synura uvella*.
Colonie sphérique en division.

comme cela a lieu chez les colonies sphériques des Volvocées supérieures (CONRAD, 3, p. 321).

La colonie sphérique subit fréquemment la division. On la voit s'allonger et les cellules constitutantes se grouper autour de deux centres distincts (fig. 4). Pendant un certain

temps, les deux colonies filles adhèrent encore l'une à l'autre et se déplacent côte à côte. Bientôt la séparation se fait et les deux masses sphériques poursuivent chacune leur chemin.

*
* *

Ce n'est pourtant pas toujours sous la forme sphérique que se présentent les colonies de *Synura*.

Nous avons décrit (2) des colonies filamenteuses du même Flagellé, colonies qui font songer au bizarre *Chlorodesmus* de PHILIPPS.

Tous les individus (2, p. 127, fig. 1) sont insérés, en disposition très serrée, non autour d'un point central, mais autour d'un filament gélatineux, sur toute sa longueur, et constituent un ensemble pouvant atteindre 300 μ de longueur. Le nombre des cellules, dans ce cordon, est considérable : il dépasse généralement la centaine.

Cette forme nouvelle n'est pas à confondre avec l'amas plus ou moins allongé que représente, à certains moments, la colonie *ronde* en division. Ici, les cellules sont insérées autour de deux centres distincts appartenant aux deux nouvelles colonies ; dans la forme *filamenteuse*, par contre, elles sont disposées perpendiculairement à toute la longueur du fil de gelée.

Dans les pêches faites à Vieux-Dieu, du 10 février au 28 mars 1912, nous en avons remarqué la présence d'une façon constante, à côté des colonies typiques. Une pêche (5 mars) contenait quarante-deux colonies filamenteuses sur cent cinquante-six colonies sphériques, soit environ 27 %; une autre (9 mars) comptait trente-neuf colonies filamenteuses sur cent soixante-deux sphériques, soit environ 24 %.

Le filament de gelée qui réunit les divers individus se distingue nettement, d'autant plus qu'il offre, parfois, la même teinte brunâtre que l'enveloppe de la cellule. Il se colore bien par le rouge congo et la vésuvine. Comme nous le disions dans le travail précité (2, p. 4), ce filament n'est pas une matière gélatineuse étrangère aux *Synura*. Il offre la même transparence granuleuse, la même réfringence, la même électivité pour certains réactifs que le pédoncule de l'enveloppe. L'extrémité de celui-ci se gélifie facilement dans l'eau, ce qui maintient réunies les cellules filles. Cette gélification peut être si forte — le

tiraillement dû aux mouvements non coordonnés des individus aidants — que la gelée s'étire en un véritable fil. Ainsi s'explique l'origine de ces bizarres colonies boudinées. Elles ont été retrouvées depuis lors par PASCHER, et plusieurs fois par moi-même, en différents endroits de la Belgique.

Il faut généralement exercer une pression assez forte sur la lamelle pour dissocier la colonie.

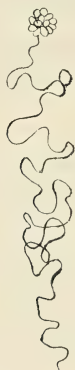


FIG. 5. — *Synura uvella*.

Piste suivie par une colonie sphérique.

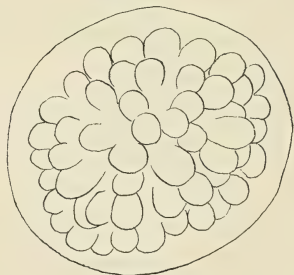


FIG. 6. — *Synura uvella*.

Colonie sphérique gélatineuse.

Alors que les colonies sphériques n'offrent aucune polarité, nous avons pu remarquer que les filamenteuses se déplacent (2, p. 9) en tournant autour de leur axe longitudinal.

*
* * *

Au cours de nos pêches, nous avons rencontré des colonies gélatineuses de *Synura uvella*, dans la mare de Hoboken, dont il a été question plus haut. Ces colonies n'ont jamais été signalées jusqu'ici.

Ces associations sont arrondies et entourées d'une couche de gelée périphérique épaisse de 5 à 10 μ , dans laquelle les cellules, associées comme dans les colonies sphériques typiques, mais moins régulièrement, sont complètement noyées. Chaque cellule garde sa coque individuelle et ses fouets (fig. 6).

Le bleu de méthylène, en solution aqueuse faible, donne de très belles préparations : les loges individuelles se colorent en un beau bleu intense, alors que la gelée prenait une teinte plus pâle, franchement violacée.

Ces colonies sphériques ont été rencontrées souvent ; elles offrent une certaine résistance à l'écrasement et à la dissociation ; elles doivent résulter, croyons-nous, de la gélification des loges et surtout de la partie basale de celles-ci. Elles ressemblent, à première vue, aux colonies sphériques d'*Uroglenopsis* et d'*Uroglena*. L'observation attentive les distingue pourtant sans difficulté. *Uroglena* et *Uroglenopsis* possèdent deux fouets très inégaux, un stigma très net et sont dépourvus de loge. En outre les cellules sont irrégulièrement distribuées dans la gelée chez *Uroglenopsis* et portées par des filaments gélatineux ramifiés dichotomiquement chez *Uroglena*, tous caractères qui manquent absolument à *Synura*. Par contre, la ressemblance avec *Syncrypta volvox* Ehr. est plus marquée. Mais chez *Syncrypta* les cellules sont dépourvues de loge et la gelée commune inclut de petits corps allongés en bâtonnets.

Une des questions les plus intéressantes que se pose l'étude des organismes inférieurs, c'est l'origine et la constitution des colonies.

Ce point est presque parfaitement connu pour les Volvocacées, grâce aux travaux de GÖBEL, PRINGSHEIM, HIERONYMUS et d'autres. Nous l'avons réétudié chez *Eudorina* (3, p. 331), chez *Gonium*, *Pandorina*, *Eudorina* et *Volvox* (je ne cite que les principales Volvocacées indigènes) ; les associations ne représentent pas des colonies du type primitif qui doivent sûrement s'être rencontrées un jour dans la nature, ou s'y rencontrent encore : ce sont des colonies déjà hautement évoluées.

De ces colonies vraiment primitives, offertes par les Flagellés proprement dits, nous ne saurions absolument rien sans le travail (8) de PASCHER. Et c'est précisément aux Chrysomonadines, qui témoignent une tendance si nette à la constitution de

cénobes, que se rapporte l'observation de colonies très primitives. Qu'il nous soit permis de résumer ici les données de PASCHER (8) :

Chez *Chrysopsis fenestrata* PASCHER (*Oesterr. Bot. Zeitschr.*, 1910, p. 4) et *Pyramidochrysis modesta* PASCHER (8, pl. IX, fig. 1, 2), les cellules, après la division, restent incluses dans une gelée commune. Tous les fouets battent en harmonie, d'un mouvement synchrone. Ces réunions sont très fugaces et se dissocient bientôt.

Chez *Ochromonas sociata* PASCHER et *Chromulina Hokeana* PASCHER, il y a aussi constitution de colonies fugaces, formées par les cellules filles résultant de deux, même de trois divisions successives. Ces réunions sont irrégulières ou rubanées.

Chez *Ochromonas botrys* PASCHER (8, pl. IX, fig. 11, 12), les cellules sont réunies en grand nombre dans une gelée molle, non déliquescence, à l'intérieur de laquelle elles se meuvent encore librement les unes par rapport aux autres, et la dissociation peut ne pas s'effectuer.

Dans un type beaucoup moins simple, les cellules sont rassemblées à la périphérie d'une gelée sphérique et consistante : c'est le cas chez *Uroglenopsis*. Ailleurs elles se touchent par leur base et rayonnent autour d'un centre commun : c'est ce qui s'observe chez les *Syncrypta* et les *Synura*.

Chez ces trois derniers genres de Chrysomonadines, nous observons donc des colonies relativement parfaites, dans lesquelles les individus constituants occupent une place déterminée qu'ils ne quittent guère. Il en résulte une association de forme caractéristique.

Ce fait s'accroît d'étrange façon chez les Volvocacées, notamment chez *Eudorina* et *Volvox*. Par deux cloisonnements en croix, la cellule mère se divise en quatre cellules subtriangulaires et celles-ci fonctionnent comme cellules initiales de quatre quadrants. Ainsi s'obtient, après d'autres divisions encore, une lame formée d'une seule assise de seize cellules.

C'est à ce stade *plakéa* (JANET) que s'arrête la division chez *Gonium*. Chez *Eudorina*, la division continue et la colonie, d'abord tabulaire, se creuse bientôt en cupule : le contour extérieur de la plakéa se replie, se rétrécit, et l'ensemble constitue finalement une sphère creuse (*phialéa*, JANET) à une assise de cellules. De tout cela il ressort un fait important, c'est que, dès la première segmentation en croix de la cellule d'*Eudorina*, la place qu'occuperont les cinq anneaux de cellules qui naîtront est parfaitement et immuablement fixée. Le centre de figure de la colonie gonioïde devient le pôle antérieur dans le mouvement de rotation, tant chez *Pandorina* que chez *Eudorina*.

Rien d'aussi parfait chez les Chrysomonadines. Nulle part on n'observe ce plan arrêté d'avance, nulle part non plus la moindre polarité physiologique. La colonie de *Synura* ne tourne autour d'aucun axe de rotation : elle roule littéralement au sein de l'eau, comme une bille roule sur un plan incliné irrégulier.

Ce qui est remarquable, c'est que la colonie de *Synura* à deux individus offre déjà une polarité nette que nous avons signalée plus haut. Le synchronisme des fouets, la rotation autour d'un axe plus ou moins perpendiculaire à l'axe longitudinal des deux cellules, cette polarité, en un mot, se perd complètement lorsque le nombre des cellules de la colonie augmente.

*
* *

Il est encore un fait qui montre clairement que les colonies de *Synura* sont bien peu évoluées : les cellules de cette Chrysomonadine peuvent vivre isolées.

Dans les récoltes faites à Hoboken, en janvier et février 1914, nous avons rencontré un grand nombre de cellules qui se distinguaient immédiatement, non seulement par leur forme très allongée, très régulièrement ellipsoïde, mais encore et surtout par le développement excessif qu'offrait leur pédoncule.

Il pouvait atteindre 30 à 40 μ , même 50 μ de longueur et mesurait 1 à 3 μ d'épaisseur (fig. 7, a, b). Le chromatophore y pénétrait souvent. Il en résultait une sorte de massue très longuement emmanchée.

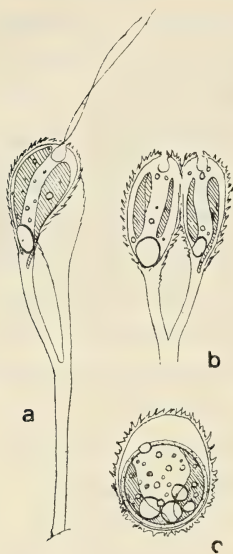


FIG. 7. — *Synura uvella*.

a. Deux cellules fixées au moyen d'un pédoncule fourchu et extrêmement allongé; b. Id., en division longitudinale; c. Un cyste.

Ces *Synura* bizarres, que PASCHER a déjà entrevus (10, note p. 173; pl. 9, fig. 28-29), se rencontraient en abondance dans les récoltes précitées. Au lieu de se fixer les uns aux autres, ils adhéraient à un substrat quelconque, et leur pédoncule avait pris un développement inusité. Plusieurs de ces *Synura* étaient fixés à des Rotifères du genre *Asplanchna*. Nous avons même pu observer la division des individus à long pédoncule : il en résultait un arbuscule à deux branches égales, terminées chacune par une cellule-fille (fig. 7). L'ensemble ressemblait absolument aux *Uroglena* figurés par PASCHER (9, pl. III, fig. 10 et 11), mais s'en distinguait, évidemment, non seulement

par la présence d'une loge à aiguillons, mais encore par les deux fouets égaux.

II. — *Thallochrysis* PASCHERI Conrad, nov. gen., nov. sp.

Type d'une famille nouvelle (*Thallochrysidaceae* nob.) de Chrysomonadines (1).

Vers la fin de décembre 1913 (2), nous avons rencontré, à Nieupoort, dans le « fossé aux *Ruppia* » (connu de tous les botanistes belges), une Chrysomonadine nouvelle très intéres-

(1) Un résumé de ce travail a paru dans les *Annales de Biologie lacustre*, t. VII, 1914-1915, p. 153.

(2) Lors d'un séjour au laboratoire de M. le Prof. J. MASSART, à Coxyde-sur-Mer.

sante, que nous allons décrire ici-même. L'eau de ce fossé est saumâtre.

L'organisme forme de petites masses floconneuses, mesurant quelques fractions de millimètre. Elles flottent, le plus souvent, parmi les touffes d'algues et les plantes aquatiques; parfois elles sont appliquées contre ces dernières.

Au microscope, elles se montrent constituées par des agrégats thalloïdes irrégulièrement découpés et ramifiés, ou bien aussi développés selon les trois dimensions de l'espace. Le premier de ces aspects est rendu par notre figure 8.

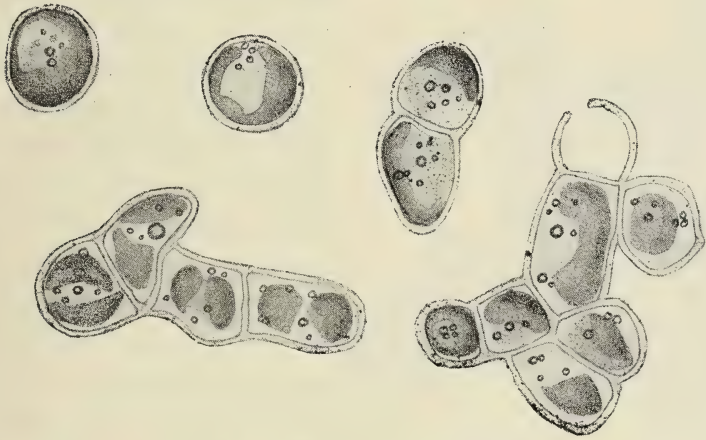


FIG. 8. — *Thallochrysis Pascheri*.

Cellules isolées et agrégats pluricellulaires; l'une des cellules s'est vidée pour donner naissance à une zoospore.

Les cellules ont une forme variable; elles sont généralement rectangulaires ou polygonales, parfois plus ou moins arrondies. La longueur varie de 10 à 18 μ ; la largeur, de 7 à 15 μ . Chaque cellule est entourée d'une membrane propre, très distinctement visible à cause de son épaisseur relativement grande et de son contour bien net et très défini. Les cellules se cloisonnent continuellement et constituent ainsi de vrais thalles plurisériés, représentés dans nos figures 8 et 9.

La membrane se colore fortement par le bleu de méthylène; le chlorure de zinc iodé ne donne pas toujours une réaction bien nette; aussi n'oserions-nous affirmer que les enveloppes cellulaires sont de nature cellulosique.

Chaque cellule porte un chromatophore d'un beau brun diatomine. Cette teinte passe au vert franc dans les cellules mortes depuis peu de temps. Les cellules renfermant deux plastides sont celles en voie de division. Le chromatophore est bien développé et tapisse plus ou moins régulièrement la cellule; il constitue soit une plaque à bords souvent repliés en dedans, soit une cloche ou cupule, tapissant alors presque tout l'intérieur de la membrane cellulaire; à travers l'orifice de la cloche plastidienne on remarque un assez grand nombre de gouttelettes réfringentes constituées par de l'huile et par de la leucosine.

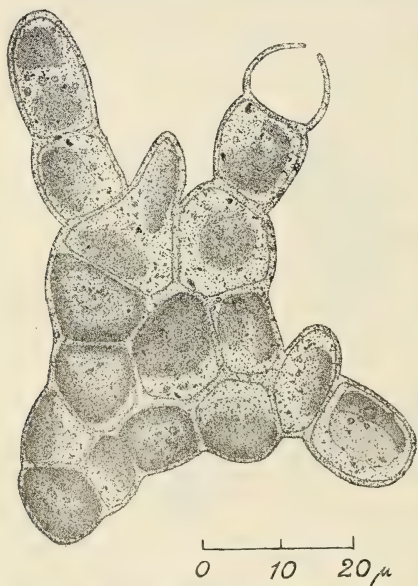


FIG. 9. — *Thallochrysis Pascheri*.
Agrégaat pleurococcoïde. (Une des cellules
a zoosporulé.)

divisent et constituent les agrégats pleurococcoïdes représentés par la figure 9.

L'organisme s'est maintenu vivant, dans le bocal qui contenait la pêche avec les plantes aquatiques, durant près d'une semaine. Nous avons ainsi, par des observations suivies, journalières, pu observer la plus grande partie du développement de cette curieuse Chrysomonadine thalloïde.

Nous avons vu naître des cellules du thalle, par rupture de la

membrane cellulaire, les zoospores chromulinoïdes de la figure 10.

Ces zoospores forment des cellules régulières, ovales, à cuticule extrêmement mince, et portent un beau chromatophore brun qui occupe une grande partie de la cellule. A l'avant de celle-ci se remarquent un stigma brillant et un fouet apical unique, dont la longueur vaut deux à trois fois celle de la cellule.

La mise en liberté des zoospores a pu être observée deux ou trois fois : la zoosporulation se produisait dans les cellules terminales ou périphériques du thalle.

Ces zoospores, à un moment donné, s'immobilisent, perdent leur fouet, s'arrondissent et s'entourent de gelée. Nous avons observé ce fait plusieurs fois et avons trouvé souvent des amas de ces palmelles inclus dans une gelée commune. A l'état palmelloïde les cellules conservent leur stigma. Il a été observé, en outre, un ou deux cas de division à l'état palmella : elle était longitudinale. Le développement ultérieur des palmelles ne nous est pas connu.



FIG. 10. — *Thallochrysis Pascheri*.
Zoospores chromulinoïdes.

* * *

Dans ces derniers temps, la systématique et le développement des Chrysomonadines ont été très consciencieusement étudiés par divers auteurs ⁽¹⁾ et principalement par PASCHER, aux principaux travaux de qui je renvoie.

Les Chrysomonadines semblent pouvoir, en principe, passer

(1) SCHERFFEL, LAUTERBORN, LEMMERMANN et d'autres savants.

facultativement et temporairement à l'état amiboïde ou rhizopodial et à l'état palmellaire. Chez les unes, le stade flagellé est l'état normal de la vie; chez d'autres, le stade amiboïde ou rhizopodial est tout à fait dominant et caractérise, en somme, l'espèce : ce sont les *Rhizochrysidinae* PASCHER; le dernier groupe enfin se présente presque exclusivement sous la forme palmellaire : ce sont les *Chrysocapsinae* PASCHER. Chez ces deux groupes, le stade flagellé n'est que facultatif et passager.

Dans un beau travail paru récemment (12), PASCHER décrit une série de Chrysomonadines nouvelles, dont la découverte est d'une importance très grande au point de vue de la systématique de ce groupe de Flagellés.

Ce savant a trouvé notamment une Chrysomonadine formant des agrégats cellulaires, donnant naissance à des zoospores chromulinoïdes : *Chrysosphaera nitens* PASCHER (12, p. 159). Il en fait le type de la famille nouvelle des *Chrysosphaerellaceae*.

Il a découvert, en outre, une Chrysomonadine filamenteuse, non ramifiée, fixée au substrat, et composée de cellules cylindriques empilées les unes sur les autres. La multiplication se fait par segmentation des cellules et par la mise en liberté de zoospores ochromonoïdes; celles-ci, venues au repos, se transforment en une cellule qui se divise rapidement : *Chrysothrix sessilis*. C'est le type d'une famille nouvelle, les *Chrysothrichiaceae*.

*
* *
*

Thallochrysis Pascheri (1), l'organisme que nous venons de décrire, doit être considéré comme le type d'une autre nouvelle famille de Chrysomonadines, celle des *Thallochrysidaceae* NOV.,

(1) C'est en l'honneur de M. le Prof. A. PASCHER que nous avons nommé ce Flagellé *Th. Pascheri*.

caractérisée par des thalles irrégulièrement divisés (généralement non fixés) et par leurs zoospores chromulinoïdes ⁽¹⁾.

Nos *Thallochrysidaceae* rentrent, avec les *Chrysotrichiaceae* PASCHER, dans le groupe des *Chrysotrichales* PASCHER, comme l'a d'ailleurs déjà fait cet auteur (à qui j'avais fait part de la découverte du *Thallochrysis*), dans le travail susnommé, sur le remarquable intérêt duquel nous ne pouvons insister dans la présente note.

Qu'il me soit seulement permis de reproduire ici le tableau qu'établit PASCHER sur la Systématique des Chrysomonadines :

CHRY SOPHYCEAE.

Chrysomonadales.

Chrysomonadinae : stade flagellé dominant.

Rhizochrysidinae : stade amiboïde ou rhizopodial dominant.

Chrysocapsales : agrégats de cellules palmellaires incluses dans une gelée commune.

Chrysocapsaceae : agrégats informes avec croissance généralisée.

Hydruraceae : agrégats définis avec croissance apicale spécialisée.

Chrysosphaerales : agrégats de cellules libres non incluses dans une gelée commune.

Chrysosphaeraceae. (*Chrysosphaera* PASCHER, l. c.).

Chrysotrichales : thalles uni- ou plurisériés.

Thallochrysidaceae CONRAD : thalles irrégulièrement ramifiés, à zoospores chromulinoïdes (*Thallochrysis* CONR.). Généralement non fixés.

Chrysotrichiaceae PASCHER : Chrysomonadines filamenteuses fixées, à zoospores ochromonoïdes (*Chrysotrix* PASCHER, l. c.).

Coxyde-sur-Mer, décembre 1913.

⁽¹⁾ Le pendant de nos *Thallochrysidaceae* existe chez les Cryptomonadines. (OLGA REINISCH, *Eine neue Phaeocapsacee*. Ber. d. d. Bot. Ges., p. 77, pl. V.)

III. — CHRYSAPSIS SPHAGNORUM Conrad, nov. spec.,
ET LES CHRYSAPSIS INDIGÈNES.

Les **Chrysapsidacées** (PASCHER) représentent une famille de minuscules Chromulinales, intéressantes par la structure bizarre de leur *chromatophore*. Il est très peu différencié : au lieu de représenter un disque, un verre de montre ou une cloche, il constitue simplement un réseau à mailles plus ou moins lâches.

Dans les récoltes que nous avons effectuées, en 1914, dans les belles tourbières des environs de Wuestwezel (Campine anversoise), nous avons rencontré de grandes quantités d'une espèce nouvelle que nous décrirons ici-même (fig. 11). Elle fut observée, en abondance, à l'intérieur des « cellules poreuses » des feuilles pourrissantes de *Sphagnum*.

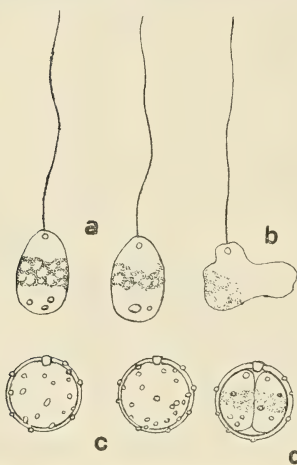


FIG. 11. — *Chrysopsis sphagnum*.

a. Deux cellules nageant librement; b. Cellule en voie de métabolisme; c. Cystes; d. Cyste renfermant deux cellules filles.

La cellule (fig. 11, a, b) est très métabolique et plus ou moins ellipsoïde ou ovoïde. La cuticule est extrêmement mince. Le chromatophore, dont les mailles sont assez serrées, occupe la zone équatoriale de la cellule. Pas de stigma. Fouet atteignant trois fois la longueur du corps et dirigé en avant pendant la natation. Grosse masse de leucosine

à la base. Globules d'huile éparpillés. Le corps ne mesure que 2 à 4 μ de longueur et 1 à 3 μ de largeur. Une à trois minuscules vacuoles antérieures.

L'organisme se déplace soit en nageant d'un mouvement tremblotant (fig. 11, a), soit en rampant pendant que son corps se déforme continuellement (fig. 11, b). Il se divise longitudinalement pendant la natation.

Nous avons observé plusieurs cystes ⁽¹⁾ sphériques ornés de perles (fig. 11, c, d). Un petit nombre d'entre eux renfermaient deux individus; la division se fait donc également à l'état de repos, après encystement (fig. 11, d).

Nous n'avons pas observé de stades palmellaires.

*
* *

Chrysapsis sphagnum rappelle un autre habitant des *Sphagnum*, connu depuis longtemps : *Chromulina Rosanoffii* BÜTSCHLI (*Chromophyton* R. WORONIN [15]). Il s'en distingue nettement comme le montre le tableau suivant :

Chromulina Rosanoffii.	Chrysapsis sphagnum.
Chromatophore très net, antérieur. Fouet de la longueur du corps.	Chromatophore équatorial, à mailles. Fouet atteignant trois fois la longueur du corps.
Cellule mesurant $\frac{8-9}{4-6}$ μ .	Cellule mesurant $\frac{2-4}{1-3}$ μ .
Métabolie peu accusée.	Métabolie prononcée.

Pour faciliter la détermination des quatre espèces de *Chrysapsis* actuellement connues, nous donnerons la table dichotomique suivante :

- I. Cellules peu métaboliques. Fouet aussi long que le corps. Chromatophore plus ou moins pariétal. Stigma. Longueur : 12-15 μ .
Chr. fenestrata PASCHER
- II. Cellules très métaboliques. Pas de stigma.
 1. Le chromatophore occupe la moitié postérieure de la cellule.
Fouet atteignant cinq fois la longueur du corps. Celui-ci mesure 3-5 μ .
Chr. agilis PASCHER.
 2. Chromatophore de même. Fouet atteignant trois fois la longueur du corps. Celui-ci mesure 7-13 μ .
Chr. sagene PASCHER.
 3. Le chromatophore offre une disposition équatoriale. Fouet atteignant trois fois la longueur du corps. Celui-ci mesure 2 à 4 μ . Cellules vivant généralement dans les « cellules poreuses » des *Sphagnums*.
Chr. sphagnum CONRAD.

(1) Les cystes de l'espèce *Chr. fenestrata* PASCHER (9, p. 11, pl. I, fig. 53, 54 et 55) seule étaient connus jusqu'à présent.

Chr. fenestrata et *Chr. sphagnorum* (l'espèce nouvelle) ont seuls été rencontrés jusqu'ici en Belgique. Le premier était assez commun dans une pêche de plancton faite, en 1913, dans le « Vieil Escaut », à Bornhem.

H. KUFFERATH, dans ses *Contributions à l'étude de la flore algologique du Luxembourg méridional, II* (ANN. DE BIOL. LAC., t. VII, p. 261), signale un *Chr. fenestrata* qui n'est pas identique à l'espèce de PASCHER. Le flagellé de KUFFERATH est dépourvu de stigma et de vacuoles. Le fouet mesure 25 à 30 μ et la cellule est concavé sur l'une de ses faces, convexe sur l'autre. La figure 14 montre très nettement que le fouet, très épais, ne s'insère pas apicalement. Il ne s'agit donc sûrement pas d'une Chromulinale, probablement pas même d'une Chrysomonadine. Le « *Chrysopsis fenestrata* » de KUFFERATH ressemble assez bien au *Pleuromastix* de SCHERFFEL; et celui-ci pourrait bien être une Cryptomonadine primitive.

BIBLIOGRAPHIE.

1. AWERINZEW, S., *Beiträge zur Kenntniss der Protozoen. II.* (ARCH. F. PROTISTENK., Bd XXV, Heft 1, 1912, pp. 1-8.)
2. CONRAD, W., *Note sur un état filamenteux du Synura uvella* EHR. (BULL. SOC. ROY. DE BOT. DE BELG., t. XLIX, pp. 126-133.)
3. CONRAD, W., *Observations sur Eudorina elegans* EHR. (REC. INST. BOT. LEO ERRERA, t. IX, 1913, pp. 321-343.)
4. CONRAD, W., *Contributions à l'étude des Flagellates. I : 1)* Stades amiboïdes et palmellaires chez *Mallomonas mirabilis* n. sp., avec un court aperçu sur la multiplication des Chrysomonadines; *2)* *Mallomonas calva* MASS. n. sp. (ARCH. F. PROTISTENK., Bd XXXIV, 1914, pp. 79-94, pl. 4.)
5. IWANOFF, *Beitrag zur Kenntniss der Chrysomonaden.* (BULL. ACAD. IMPÉR. DES SC. DE PÉTERSBOURG, 5^e série, t. XI, n^o 4.)
6. KLEBS, G., *Flagellatenstudien.* (ZEITSCHR. F. WISS. ZOOL., Bd. LV, Heft 2 et 3.)
7. LEMMERMANN, E., *Kryptogamenflora der Mark Brandenburg.* Leipzig (Bornträger), Bd III, 1910.
8. PASCHER, A., *Ueber einige Fälle vorübergehender Koloniebildung bei Flagellaten.* (BER. D. D. BOT. GES., Bd. XXVIII, 1910, pp. 339-350.)
9. PASCHER, A., *Chrysomonaden des Hirschberger Grossteiches.* Leipzig (Klinkhardt), 1910.

10. PASCHER, A., *Ueber Rhizopoden- und Palmellastadien bei Flagellaten (Chrysomonaden), etc.* (ARCH. F. PROTISTENK., Bd XXV, Heft 2, 1912, pp. 153-200, pl. 9.)
 11. PASCHER, A., *Flagellatae*, II; dans SÜSSWASSERFLORA DEUTSCHLANDS, OESTERREICHS UND DER SCHWEIZ. Jena (Fischer), 1913.
 12. PASCHER, A., *Ueber Flagellaten und Algen.* (BER. D. D. BOT. GES., Bd XXXII, Heft 2, 1914, p. 136.)
 13. PASCHER, A., *Ein Kleiner Beitrag zur Kenntniss der Chrysomonaden Böhmens.* Lotos, Prag, t. LXV, Heft 5.
 14. SCHERFFEL, *Beitrag zur Kenntniss der Chrysomonaden.* (ARCH. F. PROTISTENK., Bd XXII, 1911.)
 15. WARONIN, *Chromophyton Rosanoffii.* (BOT. ZEITG., 1880, n° 37, pp. 625 et 644, pl. 9.)
-

Séance du mardi 4 mai 1920.

M. G. CESÀRO, vice-directeur, occupe le fauteuil.

M. PAUL PELSENEER, secrétaire perpétuel.

Sont présents : MM. A. Gilkinet, C. le Paige, J. Deruyts, Léon Fredericq, J. Neuberg, A. Lameere, Ch.-J. de la Vallée Poussin, Max. Lohest, Fr. Swarts, Jean Massart, A. Demoulin, A. Rutot, A. de Hemptinne, Victor Willem, P. Stroobant, Ch. Julin, J. Verschaffelt, G. Lecointe, Émile Marchal, *membres*; Paul Fourmarier, O. Van der Stricht, Th. De Donder, *correspondants*.

Absence motivée : M. Gravis, directeur.

La Classe félicite M. Cesàro, nommé par Sa Majesté le Roi, professeur de mathématiques de S. A. R. Monseigneur le Duc de Brabant.

CORRESPONDANCE.

MM. les Ministres des Sciences et des Arts, des Affaires Économiques et de l'Agriculture promettent d'examiner avec bienveillance le vœu que la Classe leur a exprimé à la demande de M. Massart (séance du 10 avril).

— M. le Haut Commissaire du Littoral annonce qu'il a ordonné l'installation de deux baraques aux endroits désignés par M. Massart.

— Le Comité de la Commémoration Édouard van Beneden, confirmant la demande verbale faite par M. Nolf, prie la Classe de se faire représenter officiellement, le lundi 24 mai, à 11 heures, à l'inauguration de la statue d'Édouard van Beneden, à Liège. M. Lameere accepte de prendre la parole à cette cérémonie, au nom de l'Académie.

— Le Secrétaire général de l'Union internationale de la Chimie pure et appliquée annonce que toutes les communications relatives à la prochaine session de cette Union seront désormais adressées directement à l'Académie. Il demande si celle-ci a l'intention de proposer certaines questions spéciales à l'étude de cette conférence.

— M. Dupont adresse une nouvelle formule de π . Renvoi à M. Demoulin.

HOMMAGES D'OUVRAGES.

Note sur la résistance de l'air dans le cas de projectiles ogivaux, par A. Errera.

— *La technique du bassin houiller du Hainaut*. — *Observations de géographie physique dans la région du Tanganyika*. — *Observations sur le prolongement oriental de la faille du Carabinier*. — *Observations sur les grès tertiaires des environs de Liège*, par Paul Fourmarier.

— Remerciements.

COMITÉ SECRET.

La Classe arrête la liste définitive de candidatures présentées pour l'élection du mois de juin.

FONDATION AGATHON DE POTTER.

La Commission propose d'accorder à M. Poma 4,000 francs, pour faire des recherches botaniques au Congo; à la Société zoologique de Belgique (M. de Selys, secrétaire-trésorier) 500 francs, pour l'aider à préparer et publier la table des 50 premières années de ses publications. — Adopté.

Election du délégué de la Classe auprès de la Commission administrative : M. Rutot est réélu.

CONSEIL INTERNATIONAL DE RECHERCHES.

Élection des délégués de l'Académie, avec voix délibérative en matière administrative, auprès du Conseil international et des Unions internationales de Recherches :

Conseil international de Recherches : Paul Pelseneer.

Union astronomique : G. Lecointe.

Union géodésique : P. Stroobant.

Union de la Chimie pure et appliquée : F. Swarts.

Union de Physique : A. de Hemptinne.

Union des Mathématiciens : Ch.-J. de la Vallée Poussin.

Union des Sciences biologiques : Aug. Lameere.

Union géographique : P. Fourmarier.

Union géologique : Max Lohest.

Union pour la bibliographie et la documentation : J. Massart.

La Classe décide qu'il n'y aura aucune incompatibilité entre ces fonctions, purement administratives, et celles de délégués de la Classe auprès des Conseil et Comités nationaux de Recherches.

A la demande de la Commission administrative, la Classe décide que les Mémoires couronnés de M. Lecat ne seront pas imprimés aux frais de l'Académie.

ANALYSE MATHÉMATIQUE ET GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE.
Sur les équations de Moutard à solutions quadratiques,

par A. DEMOULIN, membre de l'Académie.

I.

1. Rappelons d'abord les formules relatives à la transformation de Moutard.

Soit ω une solution quelconque de l'équation de Moutard :

$$(e) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = kz.$$

A toute solution z de cette équation, les égalités

$$\begin{aligned} \frac{\partial z'}{\partial u} \omega + z' \frac{\partial \omega}{\partial u} &= z \frac{\partial \omega}{\partial u} - \omega \frac{\partial z}{\partial u}, \\ \frac{\partial z'}{\partial v} \omega + z' \frac{\partial \omega}{\partial v} &= -z \frac{\partial \omega}{\partial v} + \omega \frac{\partial z}{\partial v} \end{aligned}$$

font correspondre une solution z' de l'équation

$$(e') \quad \frac{\partial^2 z'}{\partial u \partial v} = \omega \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} z'.$$

En particulier, si $z_1, z_2, \dots, z_p$ sont des solutions de l'équation (e), les solutions $z'_1, z'_2, \dots, z'_p$ de l'équation (e') qui leur correspondent sont données par les formules

$$(1) \quad \frac{\partial z'_i}{\partial u} \omega + z'_i \frac{\partial \omega}{\partial u} = z_i \frac{\partial \omega}{\partial u} - \omega \frac{\partial z_i}{\partial u},$$

$$(2) \quad \frac{\partial z'_i}{\partial v} \omega + z'_i \frac{\partial \omega}{\partial v} = -z_i \frac{\partial \omega}{\partial v} + \omega \frac{\partial z_i}{\partial v},$$

$$i = 1, 2, \dots, p.$$

2. Cela posé, cherchons à quelles conditions on aura

$$(3) \quad \sum_i^{1...p} z_i'^2 = \sum_i^{1...p} z_i^2 + \frac{C}{\omega^2},$$

C désignant une constante.

Multiplions (symboliquement) l'équation (1) par $\sum_i^{1...p} z_i'$, puis par $\sum_i^{1...p} z_i$; il viendra

$$\begin{aligned} \omega \sum_i^{1...p} z_i' \frac{\partial z_i'}{\partial u} + \frac{\partial \omega}{\partial u} \sum_i^{1...p} z_i'^2 &= \frac{\partial \omega}{\partial u} \sum_i^{1...p} z_i' z_i - \omega \sum_i^{1...p} z_i' \frac{\partial z_i}{\partial u}, \\ \omega \sum_i^{1...p} z_i \frac{\partial z_i'}{\partial u} + \frac{\partial \omega}{\partial u} \sum_i^{1...p} z_i' z_i &= \frac{\partial \omega}{\partial u} \sum_i^{1...p} z_i^2 - \omega \sum_i^{1...p} z_i \frac{\partial z_i}{\partial u}. \end{aligned}$$

Ajoutant ces deux égalités et tenant compte de (3), on trouve

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[\sum_i^{1...p} (z_i' + z_i)^2 - \frac{C}{\omega^2} \right] = 0;$$

d'où

$$(4) \quad \sum_i^{1...p} (z_i' + z_i)^2 = 4V + \frac{C}{\omega^2} + 2m,$$

V désignant une fonction de v et m une constante.

Si l'on multiplie l'équation (2) par $\sum_i^{1...p} z_i'$, puis par $\sum_i^{1...p} z_i$, il vient

$$\begin{aligned} \omega \sum_i^{1...p} z_i' \frac{\partial z_i'}{\partial v} + \frac{\partial \omega}{\partial v} \sum_i^{1...p} z_i'^2 &= - \frac{\partial \omega}{\partial v} \sum_i^{1...p} z_i' z_i + \omega \sum_i^{1...p} z_i' \frac{\partial z_i}{\partial v}, \\ \omega \sum_i^{1...p} z_i \frac{\partial z_i'}{\partial v} + \frac{\partial \omega}{\partial v} \sum_i^{1...p} z_i' z_i &= - \frac{\partial \omega}{\partial v} \sum_i^{1...p} z_i^2 + \omega \sum_i^{1...p} z_i \frac{\partial z_i}{\partial v}; \end{aligned}$$

d'où, par soustraction,

$$\frac{\partial}{\partial v} \left[\sum_i^{1...p} (z_i' - z_i)^2 - \frac{C}{\omega^2} \right] = 0,$$

et par suite

$$(5) \quad \sum_i^{1...p} (z_i' - z_i)^2 = 4U + \frac{C}{\omega^2} - 2m,$$

U désignant une fonction de u .

Des relations (4) et (5), on déduit, par addition et soustraction,

$$(6) \quad \sum_i^{1..p} z_i'^2 + \sum_i^{1..p} z_i^2 = 2U + 2V + \frac{C}{\omega^2},$$

$$(7) \quad \sum_i^{1..p} z_i' z_i = V - U + m.$$

L'égalité (6) donne, à cause de (3),

$$(8) \quad \sum_i^{1..p} z_i^2 = U + V.$$

Donc, pour que l'égalité (3) ait lieu, il faut que les solutions $z_1, z_2, \dots, z_p$ soient liées par une relation de la forme (8). Si cette condition est vérifiée, nous dirons, avec M. Guichard (*), que les solutions $z_1, z_2, \dots, z_p$ sont quadratiques.

3. Nous allons démontrer que la condition (8) est suffisante. Les solutions z_i' , si elles existent, satisfont aux équations (1), (2), (7) et à la relation

$$(9) \quad \sum_i^{1..p} z_i'^2 = U + V + \frac{C}{\omega^2},$$

conséquence des égalités (3) et (8).

Si l'on pose

$$(10) \quad \omega z_i' = H_i,$$

les équations (1), (2), (7) s'écrivent

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H_i}{\partial u} = z_i \frac{\partial \omega}{\partial u} - \omega \frac{\partial z_i}{\partial u}, \\ \frac{\partial H_i}{\partial v} = -z_i \frac{\partial \omega}{\partial v} + \omega \frac{\partial z_i}{\partial v}, \end{array} \right.$$

$$(12) \quad \sum_i^{1..p} z_i H_i = (V - U + m) \omega.$$

(*) GUICHARD, *Sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques*. (ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, 1903.)

On déduit de (12), si $V - U + m$ est $\neq 0$,

$$(13) \quad \omega = \frac{1}{V - U + m} \sum_i^{1\dots p} z_i H_i.$$

Par suite, en vertu de (10),

$$(14) \quad z'_i = \frac{V - U + m}{\sum_i^{1\dots p} z_i H_i} H_i.$$

Si l'on dérive l'égalité (13) par rapport à u , puis par rapport à v , et qu'on tienne compte des égalités (11) et (8), on trouve

$$(15) \quad \frac{\partial \omega}{\partial u} = -\frac{U'}{2(2U - m)} \omega - \frac{1}{2U - m} \sum_i^{1\dots p} \frac{\partial z_i}{\partial u} H_i,$$

$$(16) \quad \frac{\partial \omega}{\partial v} = -\frac{V'}{2(2V + m)} \omega + \frac{1}{2V + m} \sum_i^{1\dots p} \frac{\partial z_i}{\partial v} H_i.$$

Remplaçons, dans les seconds membres de ces égalités, ω par sa valeur (13); il viendra

$$(17) \quad \frac{\partial \omega}{\partial u} = -\frac{U'}{2(2U - m)(V - U + m)} \sum_i^{1\dots p} z_i H_i - \frac{1}{2U - m} \sum_i^{1\dots p} \frac{\partial z_i}{\partial u} H_i,$$

$$(18) \quad \frac{\partial \omega}{\partial v} = -\frac{V'}{2(2V + m)(V - U + m)} \sum_i^{1\dots p} z_i H_i + \frac{1}{2V + m} \sum_i^{1\dots p} \frac{\partial z_i}{\partial v} H_i.$$

Portons, dans les égalités (11), les valeurs (13), (17), (18) de ω , $\frac{\partial \omega}{\partial u}$, $\frac{\partial \omega}{\partial v}$; nous obtiendrons le système suivant, de $2p$ équations linéaires aux inconnues $H_1, H_2, \dots, H_p$:

$$(19) \quad \begin{cases} \frac{\partial H_i}{\partial u} = -\frac{U' z_i + 2(2U - m) \frac{\partial z_i}{\partial u}}{2(2U - m)(V - U + m)} \sum_k^{1\dots p} z_k H_k - \frac{z_i}{2U - m} \sum_k^{1\dots p} \frac{\partial z_k}{\partial u} H_k, \\ \frac{\partial H_i}{\partial v} = -\frac{V' z_i + 2(2V + m) \frac{\partial z_i}{\partial v}}{2(2V + m)(V - U + m)} \sum_k^{1\dots p} z_k H_k - \frac{z_i}{2V + m} \sum_k^{1\dots p} \frac{\partial z_k}{\partial v} H_k. \end{cases}$$

Nous l'écrivons, en abrégé,

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H_i}{\partial u} = \sum_k^{1\dots p} \alpha_{ik} H_k, \\ \frac{\partial H_i}{\partial v} = \sum_k^{1\dots p} \beta_{ik} H_k, \end{array} \right.$$

étant posé

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{ik} = -\frac{U'}{2(2U-m)(V-U+m)} z_i z_k - \frac{1}{2U-m} z_i \frac{\partial z_k}{\partial u} - \frac{1}{V-U+m} z_k \frac{\partial z_i}{\partial u}, \\ \beta_{ik} = \frac{V'}{2(2V+m)(V-U+m)} z_i z_k - \frac{1}{2V+m} z_i \frac{\partial z_k}{\partial v} + \frac{1}{V-U+m} z_k \frac{\partial z_i}{\partial v}. \end{array} \right.$$

Le système (19) est complètement intégrable. Si $(H_1, H_2, \dots, H_p)$ est une solution de ce système, 1° les fonctions z'_i définies par les égalités (14) satisfont aux relations (1), (2), (7), ω étant donnée par l'égalité (13); 2° ω satisfait à l'équation (e).

On établit le 1° comme il suit : En dérivant l'équation (13) par rapport à u , puis par rapport à v , et en tenant compte du système (19), on obtient les égalités (17) et (18). Or, c'est en portant dans les égalités (11) les valeurs (13), (17), (18) de ω , $\frac{\partial \omega}{\partial u}$, $\frac{\partial \omega}{\partial v}$ qu'on a obtenu le système (19); par suite, en opérant en sens inverse du système (19) et des égalités (13), (17), (18), on déduira les égalités (11), et de celles-ci, en tenant compte de (10), conséquence de (13) et de (14), on remontera aux égalités (1) et (2).

On obtiendra l'égalité (7) en portant dans (13) la valeur (10) de H_i .

Pour établir le 2°, égalons les deux valeurs de $\frac{\partial^2 H_i}{\partial u \partial v}$ tirées des équations (11); il viendra

$$\frac{\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v}}{\omega} = \frac{\frac{\partial^2 z_i}{\partial u \partial v}}{z_i}.$$

z_i étant solution de l'équation (e), le second membre de cette égalité est égal à k ; il en est donc de même du premier. C. Q. F. D.

Le système (19) admet l'intégrale

$$(22) \quad \sum_i^{1..p} H_i^2 - (U + V)\omega^2 = C,$$

qui peut s'écrire, en remplaçant ω par sa valeur (13),

$$(23) \quad \sum_i^{1..p} H_i^2 - \frac{U + V}{(V - U + m)^2} \left(\sum_i^{1..p} z_i H_i \right)^2 = C.$$

En remplaçant, dans (22), les H_i par leurs valeurs (10), on obtient l'égalité (9). La réciproque est donc démontrée.

Si l'on veut que les z'_i satisfassent à la relation

$$(24) \quad \sum_i^{1..p} z_i'^2 = U + V,$$

déduite de (9) en y faisant $C = 0$, il faudra choisir les valeurs des H_i , pour un système de valeurs u_0, v_0 de u, v , de manière que la constante qui figure dans l'intégrale (23) soit nulle.

M. Bianchi (*) a établi que la condition (8) est nécessaire et suffisante, dans le cas où l'on a $C = 0$, $\sum_i^{1..p} z_i^2 \neq 0$.

4. Lorsque $C = 0$, la relation (23) est homogène par rapport aux H_i ; d'autre part, l'expression (14) des z'_i est homogène et de degré zéro par rapport aux mêmes quantités. Il suit de là que, m étant donné, les solutions $z'_1, z'_2, \dots, z'_p$ dépendent de $p - 2$ constantes arbitraires. Nous désignerons par T_m une quelconque des ∞^{p-2} transformations de Moutard correspondantes.

(*) BIANCHI, *Sulle varietà a tre dimensioni deformabili entro lo spazio euclideo a quattro dimensioni*. (MEMORIE DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE, 3^e série, tome XIII; 1903.)

5. Reprenons le cas où C est $\neq 0$. $\frac{\sqrt{-C}}{\omega}$ est une solution de l'équation (e'). Si l'on pose

$$(25) \quad z'_{p+1} = \frac{\sqrt{-C}}{\omega},$$

l'équation (9) devient

$$(26) \quad \sum_i^{1..p} z_i'^2 + z_{p+1}'^2 = U + V.$$

L'équation (e') admet donc $p + 1$ solutions quadratiques.

Dans le cas présent, les H_i ne sont assujetties à aucune condition supplémentaire. D'autre part, l'expression (14) des z_i' est homogène et de degré zéro par rapport à ces quantités et il en est de même de celle, (25), de z'_{p+1} ; pour le reconnaître, il suffit de remplacer dans (25) C par sa valeur (23) et ω par sa valeur (13). Par suite, les solutions $z'_1, z'_2, \dots, z_p, z'_{p+1}$ dépendent de $p - 1$ constantes arbitraires. Nous désignerons par Θ_m une quelconque des ∞^{p-1} transformations de Moutard correspondantes (*).

6. Soient $(H_1^{(1)}, \dots, H_6^{(1)}), (H_1^{(2)}, \dots, H_6^{(2)})$ deux solutions du système (19). La formule (13) donne les expressions des solutions correspondantes ω_1, ω_2 de l'équation (e) :

$$(27) \quad \omega_1 = \frac{1}{V - U + m} \sum_i^{1..p} z_i H_i^{(1)}, \quad \omega_2 = \frac{1}{V - U + m} \sum_i^{1..p} z_i H_i^{(2)},$$

et l'on a, en vertu de (22),

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_i^{1..p} (H_i^{(1)})^2 - (U + V) \omega_1^2 = \text{const.}, \\ \sum_i^{1..p} (H_i^{(2)})^2 - (U + V) \omega_2^2 = \text{const.} \end{array} \right.$$

(*) Les transformations Θ_m sont les transformations T_m de l'équation (e), celle-ci étant considérée comme admettant les $p + 1$ solutions quadratiques $z_1, z_2, \dots, z_p, 0$.

ρ , désignant une constante, $(H_1^{(1)} + \rho H_1^{(2)}, \dots, H_6^{(1)} + \rho H_6^{(2)})$ est une solution du système (19). La solution ω de (e) qui lui correspond a pour expression

$$\omega = \omega_1 + \rho \omega_2.$$

La formule (22) donne

$$\sum_i^{1\dots p} (H_i^{(1)} + \rho H_i^{(2)})^2 - (U + V)(\omega_1 + \rho \omega_2)^2 = \text{const.};$$

d'où, en tenant compte de (28),

$$(29) \quad \sum_i^{1\dots p} H_i^{(1)} H_i^{(2)} - (U + V) \omega_1 \omega_2 = \text{const.}$$

II.

7. Plaçons-nous dans le cas où les z'_i satisfont à la relation (24). Additionnons les équations (1) après les avoir élevées au carré; il viendra, en tenant compte de (24),

$$\omega^2 \sum_i^{1\dots p} \left(\frac{\partial z'_i}{\partial u} \right)^2 + 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial u} \sum_i^{1\dots p} z'_i \frac{\partial z'_i}{\partial u} = \omega^2 \sum_i^{1\dots p} \left(\frac{\partial z_i}{\partial u} \right)^2 - 2\omega \frac{\partial \omega}{\partial u} \sum_i^{1\dots p} z_i \frac{\partial z_i}{\partial u}.$$

On déduit de là que, si $\sum_i^{1\dots p} z_i^2$ est une fonction de v seule,

$$(30) \quad \sum_i^{1\dots p} \left(\frac{\partial z'_i}{\partial u} \right)^2 = \sum_i^{1\dots p} \left(\frac{\partial z_i}{\partial u} \right)^2.$$

Supposons que l'on ait

$$(31) \quad \sum_i^{1\dots p} z_i^2 = 0, \quad \sum_i^{1\dots p} \left(\frac{\partial z_i}{\partial u} \right)^2 = 0;$$

d'où, en vertu de (24) et de (30),

$$(32) \quad \sum_i^{1\dots p} z_i'^2 = 0, \quad \sum_i^{1\dots p} \left(\frac{\partial z'_i}{\partial u} \right)^2 = 0.$$

Nous allons démontrer que l'on a

$$(33) \quad \sum_i^{1\dots p} \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{z}'_i}{\partial u^2} \right)^2 = \sum_i^{1\dots p} \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{z}_i}{\partial u^2} \right)^2.$$

Dérivons l'équation (1) par rapport à u ; il viendra

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{z}'_i}{\partial u^2} \omega + 2 \frac{\partial \mathfrak{z}'_i}{\partial u} \frac{\partial \omega}{\partial u} + \mathfrak{z}'_i \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} = \mathfrak{z}_i \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} \omega \frac{\partial^2 \mathfrak{z}_i}{\partial u^2}.$$

Si l'on additionne ces équations après les avoir élevées au carré, et qu'on tienne compte des relations (31) et (32), on est conduit à l'égalité (33).

On démontrera de même, en se servant des égalités (2), que, si $\sum_i^{1\dots p} \mathfrak{z}_i^2$ est fonction de u seule,

$$(34) \quad \sum_i^{1\dots p} \left(\frac{\partial \mathfrak{z}'_i}{\partial v} \right)^2 = \sum_i^{1\dots p} \left(\frac{\partial \mathfrak{z}_i}{\partial v} \right)^2,$$

et que, si l'on a

$$\sum_i^{1\dots p} \mathfrak{z}_i^2 = 0, \quad \sum_i^{1\dots p} \left(\frac{\partial \mathfrak{z}_i}{\partial v} \right)^2 = 0;$$

d'où, en vertu de (24) et de (34),

$$\sum_i^{1\dots p} \mathfrak{z}_i'^2 = 0, \quad \sum_i^{1\dots p} \left(\frac{\partial \mathfrak{z}'_i}{\partial v} \right)^2 = 0;$$

on a aussi

$$\sum_i^{1\dots p} \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{z}'_i}{\partial v^2} \right)^2 = \sum_i^{1\dots p} \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{z}_i}{\partial v^2} \right)^2.$$

III.

8. Dans le système (19), donnons successivement à m , n valeurs distinctes $m_1, m_2, \dots, m_n$. Nous obtiendrons ainsi n systèmes que nous désignerons par $(19)_1, (19)_2, \dots, (19)_n$. Soit

$(H_1^{(i)}, H_2^{(i)}, \dots, H_p^{(i)})$ une solution quelconque du système (19)_i ($i = 1, 2, \dots, n$) et ω_i la valeur correspondante de ω ; celle-ci est donnée par la relation suivante, déduite de (13) :

$$(35) \quad \omega_i = \frac{1}{V - U + m_i} \sum_j^{1 \dots p} z_j H_j^{(i)}.$$

On a, d'autre part, les n relations

$$(36) \quad \sum_j^{1 \dots p} (H_j^{(i)})^2 - (U + V) \omega_i^2 = C_i,$$

que fournit l'égalité (22). Les fonctions $H_1^{(i)}, H_2^{(i)}, \dots, H_p^{(i)}$ définissent une transformation Θ_{m_i} qui fait correspondre aux solutions $z_1, z_2, \dots, z_p$ de (e) des solutions $z_1^{(i)}, z_2^{(i)}, \dots, z_p^{(i)}$ d'une équation de Moutard (e)_i, et l'on a, en vertu de (10) et de (14),

$$(37) \quad \omega_i z_j^{(i)} = H_j^{(i)},$$

$$(38) \quad z_j^{(i)} = \frac{V - U + m_i}{\sum_j^{1 \dots p} z_j H_j^{(i)}} H_j^{(i)}.$$

Des relations (36) et (37), on déduit

$$(39) \quad \sum_j^{1 \dots p} (z_j^{(i)})^2 = U + V + \frac{C_i}{\omega_i^2}.$$

Enfin, la relation (7) donne

$$(40) \quad \sum_j^{1 \dots p} z_j z_j^{(i)} = V - U + m_i.$$

En procédant comme il a été indiqué au n° 2 de notre mémoire *Sur la transformation de Moutard et quelques-unes de ses applications géométriques* (*), on peut déduire de l'équation (e),

(*) *Bulletin de la Classe des sciences de l'Académie royale de Belgique*, année 1919, pp. 261-284. Ce mémoire sera désigné plus bas par la lettre M.

au moyen des n solutions ω_i , $2^n - 1$ équations de Moutard parmi lesquelles figurent les équations (e_1) , (e_2) , ..., (e_n) . En joignant à ces $2^n - 1$ équations l'équation (e) , on obtient un système (M_{2^n}) de 2^n équations jouissant de la propriété suivante : chacune des équations du système correspond, dans des transformations de Moutard, à n des équations du système.

Nous allons former l'équation désignée par (E) au n° 5 du mémoire M et déterminer les solutions $Z_1, Z_2, \dots, Z_p$ de cette équation qui correspondent respectivement aux solutions $z_1, z_2, \dots, z_p$ de l'équation (e) .

λ, μ désignant deux solutions quelconques de (e) , posons

$$H(\lambda, \mu) = \int \left(\lambda \frac{\partial \mu}{\partial u} - \mu \frac{\partial \lambda}{\partial u} \right) du - \left(\lambda \frac{\partial \mu}{\partial v} - \mu \frac{\partial \lambda}{\partial v} \right) dv.$$

Pour obtenir l'équation (E), il faut connaître les quantités définies par l'égalité

$$(41) \quad a_{ik} = H(\omega_i, \omega_k), \quad (i, k = 1, 2, \dots, n; i \neq k),$$

les constantes d'intégration étant choisies de manière que l'on ait

$$(42) \quad a_{ik} + a_{ki} = 0.$$

On satisfait aux égalités (41) en posant

$$(43) \quad a_{ik} = \frac{\sum_j^{1 \dots p} H_j^{(i)} H_j^{(k)} - (U + V) \omega_i \omega_k + \Gamma_{ik}}{m_i - m_k}.$$

Γ_{ik} désignant une constante arbitraire. On déduit de là

$$a_{ik} + a_{ki} = \frac{\Gamma_{ik} - \Gamma_{ki}}{m_i - m_k}.$$

Donc, pour que les égalités (42) soient vérifiées, il faut et il suffit que l'on ait

$$(44) \quad \Gamma_{ik} = \Gamma_{ki}.$$

A cause de l'égalité (37), la formule (43) peut s'écrire

$$(45) \quad a_{ik} = \frac{\sum_j^{1...p} z_j^{(i)} z_j^{(k)} - (U + V)}{m_i - m_k} - \omega_i \omega_k + \frac{\Gamma_{ik}}{m_i - m_k},$$

ou, en posant

$$(46) \quad \sum_j^{1...p} z_j^{(i)} z_j^{(k)} = \varepsilon_{ik}, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

$$(47) \quad \sum_j^{1...p} z_j z_j^{(i)} = e_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

et en tenant compte de (40),

$$(48) \quad a_{ik} = \frac{U + V - \varepsilon_{ik}}{e_k - e_i} \omega_i \omega_k - \frac{\Gamma_{ik}}{e_k - e_i}.$$

Il y a deux cas à considérer : *Premier cas* : n pair. *Deuxième cas* : n impair.

9. *Premier cas* : n pair. Si l'on pose

$$(49) \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$(50) \quad a_{ii} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

l'équation (E) s'écrit

$$(E) \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial u \partial v} = \left(k - \frac{\partial^2 \log \Delta}{\partial u \partial v} \right) Z.$$

Les solutions Z_j sont données par la formule

$$Z_j = z_j + \sum_i^{1...n} \Omega_i H(z_j, \omega_i), \quad (j = 1, 2, \dots, p).$$

Or

$$\mathfrak{z}_j^{(i)} = \frac{1}{\omega_i} \mathbf{H}(\mathfrak{z}_j, \omega_i).$$

Par suite

$$\mathbf{Z}_j = \mathfrak{z}_j + \sum_i^{1..n} \Omega_i \omega_i \mathfrak{z}_j^{(i)},$$

ou

$$(51) \quad \mathbf{Z}_j = \mathfrak{z}_j + \sum_i^{1..n} \varphi_i \mathfrak{z}_j^{(i)},$$

étant posé

$$(52) \quad \Omega_i \omega_i = \varphi_i.$$

Les Ω_i sont définies par le système

$$(53) \quad \sum_i^{1..n} a_{ik} \Omega_i = \omega_k. \quad \left(\begin{array}{l} k = 1, 2, \dots, n \\ i = 1, 2, \dots, n \text{ sauf } k \end{array} \right).$$

En tenant compte des relations (48) et (52), ce système s'écrit

$$(54) \quad \sum_i^{1..n} \left(\frac{U + V - \varepsilon_{ik}}{e_k - e_i} - \frac{\Gamma_{ik}}{e_k - e_i} \cdot \frac{1}{\omega_i \omega_k} \right) \varphi_i = 1$$

et donne les quantités φ_i . Celles-ci satisfont à la relation

$$(55) \quad \sum_k^{1..n} \varphi_k = 0.$$

On établit cette égalité en multipliant l'équation (53) par $\sum_k^{1..n} \Omega_k$ et en tenant compte de (42) et de (52).

Nous allons démontrer que l'équation (E) admet $p + \nu$ solutions dont la somme des carrés égale $U + V$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots, n$).

Élevons l'équation (51) au carré :

$$\mathbf{Z}_j^2 = \mathfrak{z}_j^2 + \sum_i^{1..n} \sum_k^{1..n} \varphi_i \varphi_k \mathfrak{z}_j^{(i)} \mathfrak{z}_j^{(k)} + 2 \mathfrak{z}_j \sum_i^{1..n} \varphi_i \mathfrak{z}_j^{(i)}.$$

Additionnons les équations obtenues en faisant, dans cette dernière, $j = 1, 2, \dots, p$; il viendra

$$\sum_j^{1\dots p} Z_j^2 = \sum_j^{1\dots p} z_j^2 + \sum_i^{1\dots n} \sum_k^{1\dots n} \varphi_i \varphi_k \sum_j^{1\dots p} z_j^{(i)} z_j^{(k)} + 2 \sum_i^{1\dots n} \varphi_i \sum_j^{1\dots p} z_j z_j^{(i)},$$

ou, à cause des relations (8), (46) et (47),

$$(56) \quad \sum_j^{1\dots p} Z_j^2 = U + V + \sum_i^{1\dots n} \sum_k^{1\dots n} \varphi_i \varphi_k \varepsilon_{ik} + 2 \sum_i^{1\dots n} \varphi_i e_i.$$

Pour calculer la somme des deux derniers termes du second membre, multiplions l'équation (54) par $\sum_k^{1\dots n} e_k \varphi_k$ et tenons compte de (52) :

$$(57) \quad \sum_i^{1\dots n} \sum_k^{1\dots n} \frac{U + V - \varepsilon_{ik}}{e_k - e_i} e_k \varphi_i \varphi_k - \sum_i^{1\dots n} \sum_k^{1\dots n} \frac{e_k}{e_k - e_i} \Gamma_{ik} \Omega_i \Omega_k - \sum_i^{1\dots n} e_i \varphi_i = 0.$$

Échangeons, dans cette égalité, i et k et tenons compte de (44) :

$$(58) \quad \sum_i^{1\dots n} \sum_k^{1\dots n} \frac{U + V - \varepsilon_{ik}}{e_i - e_k} e_i \varphi_i \varphi_k - \sum_i^{1\dots n} \sum_k^{1\dots n} \frac{e_i}{e_i - e_k} \Gamma_{ik} \Omega_i \Omega_k - \sum_i^{1\dots n} e_i \varphi_i = 0.$$

Les égalités (57) et (58) donnent par addition

$$(59) \quad \sum_i^{1\dots n} \sum_k^{1\dots n} (U + V - \varepsilon_{ik}) \varphi_i \varphi_k - \sum_i^{1\dots n} \sum_k^{1\dots n} \Gamma_{ik} \Omega_i \Omega_k - 2 \sum_i^{1\dots n} e_i \varphi_i = 0.$$

Dans cette égalité, de même que dans les deux précédentes, il faut supposer $i \neq k$. Si l'on fait $k = i$ dans la première somme double, on introduit des termes dont la somme A a pour valeur

$$A = \sum_i^{1\dots n} (V + U - \varepsilon_{ii}) \varphi_i^2.$$

Or, en vertu de (46),

$$\varepsilon_{ii} = \sum_j^{1\dots p} (z_j^{(i)})^2,$$

ou, à cause de (39),

$$\varepsilon_{ii} = U + V + \frac{C_i}{\omega_i^2}.$$

Par suite

$$A = - \sum_i \frac{C_i \varphi_i^2}{\omega_i^2},$$

ou, en vertu de (52),

$$A = - \sum_i C_i \Omega_i^2.$$

L'égalité (59) peut donc s'écrire

$$\sum_i^{1\dots n} \sum_k^{1\dots n} (U + V - \varepsilon_{ik}) \varphi_i \varphi_k + \sum_i^{1\dots n} C_i \Omega_i^2 - \sum_i^{1\dots n} \sum_k^{1\dots n} \Gamma_{ik} \Omega_i \Omega_k - 2 \sum_i^{1\dots n} e_i \varphi_i = 0,$$

ou

$$(60) \quad \left\{ \begin{array}{l} (U + V) \sum_i^{1\dots n} \sum_k^{1\dots n} \varphi_i \varphi_k - \sum_i^{1\dots n} \sum_k^{1\dots n} \varepsilon_{ik} \varphi_i \varphi_k + \sum_i^{1\dots n} C_i \Omega_i^2 \\ - \sum_i^{1\dots n} \sum_k^{1\dots n} \Gamma_{ik} \Omega_i \Omega_k - 2 \sum_i^{1\dots n} e_i \varphi_i = 0, \end{array} \right.$$

à condition de donner à i et à k , dans les deux premières sommes doubles, toutes les valeurs $1, 2, \dots, n$.

Si l'on tient compte de l'égalité

$$\sum_i^{1\dots n} \sum_k^{1\dots n} \varphi_i \varphi_k = 0,$$

obtenue en élevant (55) au carré, l'égalité (60) devient

$$\sum_i^{1\dots n} \sum_k^{1\dots n} \varepsilon_{ik} \varphi_i \varphi_k + 2 \sum_i^{1\dots n} e_i \varphi_i = \sum_i^{1\dots n} C_i \Omega_i^2 - \sum_i^{1\dots n} \sum_k^{1\dots n} \Gamma_{ik} \Omega_i \Omega_k,$$

et, par suite, la relation (56) peut s'écrire

$$(61) \quad \sum_j^{1\dots p} Z_j^2 - \sum_i^{1\dots n} C_i \Omega_i^2 + \sum_i^{1\dots n} \sum_k^{1\dots n} \Gamma_{ik} \Omega_i \Omega_k = U + V.$$

Rappelons que les Ω_i sont des solutions de l'équation (E). De cette remarque et de l'égalité (61) résulte le théorème énoncé. En effet, si l'on annule tous les Γ_{ik} et qu'on donne à ν des quantités C_i ($\nu = 0, 1, \dots, n$) des valeurs non nulles et aux $n - \nu$ quantités C_i restantes des valeurs nulles, la dite égalité montre que l'équation (E) possède $p + \nu$ solutions dont la somme des carrés égale $U + V$.

Si l'on n'annule pas tous les C_i et tous les Γ_{ik} , la somme des deux derniers termes au premier membre de (61) est une forme quadratique des Ω_i , à coefficients constants; elle est donc égale à la somme des carrés d'un certain nombre ν de fonctions linéaires et homogènes des Ω_i à coefficients constants, expressions qui vérifient l'équation (E), et par suite cette équation admet $p + \nu$ solutions quadratiques.

10. Dans le cas, signalé plus haut, où l'on annule tous les C_i et tous les Γ_{ik} , la relation (61) se réduit à la suivante :

$$(62) \quad \sum_j^{1..p} Z_j^2 = U + V,$$

et les transformations Θ_{m_i} deviennent des transformations T_{m_i} .

11. Restons dans les cas envisagés au n° 10 et faisons $n = 2$.

En se servant des formules (45), (49), (50), on obtient l'équation (E) :

$$(E) \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial u \partial v} = \left(k - \frac{\partial^2 \log a_{12}^2}{\partial u \partial v} \right) Z,$$

$$(63) \quad a_{12} = \frac{\sum_j^{1..p} \tilde{\alpha}_j^{(1)} \tilde{\alpha}_j^{(2)} - (U + V)}{m_1 - m_2} \omega_1 \omega_2.$$

Le système (54) donne

$$\varphi_1 = -\varphi_2 = \frac{m_2 - m_1}{U + V - \epsilon_{12}}.$$

L'expression (51) de Z_j devient, par suite,

$$(64) \quad Z_j = z_j + \frac{m_2 - m_1}{U + V - \sum_j^{1\dots p} z_j^{(1)} z_j^{(2)}} \cdot [z_j^{(1)} - z_j^{(2)}].$$

Les équations $(e_1), (e_2)$ correspondent respectivement à l'équation (e) dans des transformations T_{m_1}, T_{m_2} et l'on a

$$(65) \quad \sum_j^{1\dots p} z_j z_j^{(1)} = V - U + m_1, \quad \sum_j^{1\dots p} z_j z_j^{(2)} = V - U + m_2,$$

$$(66) \quad \sum_j^{1\dots p} (z_j^{(1)})^2 = U + V, \quad \sum_j^{1\dots p} (z_j^{(2)})^2 = U + V.$$

Démontrons que l'équation (E) correspond respectivement aux équations $(e_1), (e_2)$ dans des transformations T_{m_2}, T_{m_1} . A cet effet, il suffira d'établir que l'on a

$$(67) \quad \sum_j^{1\dots p} Z_j z_j^{(1)} = V - U + m_2, \quad \sum_j^{1\dots p} Z_j z_j^{(2)} = V - U + m_1.$$

Or, si l'on multiplie l'équation (64) par $\sum_j^{1\dots p} z_j^{(1)}$, il vient

$$\sum_j^{1\dots p} Z_j z_j^{(1)} = \sum_j^{1\dots p} z_j z_j^{(1)} + (m_2 - m_1) \cdot \frac{\sum_j^{1\dots p} (z_j^{(1)})^2 \cdot \sum_j^{1\dots p} z_j^{(1)} z_j^{(2)}}{U + V - \sum_j^{1\dots p} z_j^{(1)} z_j^{(2)}},$$

et cette égalité se réduit à la première des égalités (67), si l'on tient compte de la première des égalités (65) et de la première des égalités (66).

On établira de même la deuxième des égalités (67).

Ce théorème, dit *théorème de permutabilité*, a été démontré par M. Bianchi (*loc. cit.*) dans le cas où $\sum_j^{1\dots p} z_j^2$ est $\neq 0$.

Si $m_2 = m_1$, la formule (64) donne

$$Z_j = z_j.$$

12. Donnons à m_1 une valeur constante et faisons tendre m_2 vers m_1 . Nous pourrions alors faire en sorte que $H_1^{(2)}, H_2^{(2)}, \dots, H_p^{(2)}$ tendent respectivement vers $H_1^{(1)}, H_2^{(1)}, \dots, H_p^{(1)}$; il suffira, à cet effet, de faire tendre les valeurs initiales de $H_1^{(2)}, H_2^{(2)}, \dots, H_p^{(2)}$ vers les valeurs initiales de $H_1^{(1)}, H_2^{(1)}, \dots, H_p^{(1)}$. Cela posé, cherchons vers quelles limites tendront les Z_j .

Si l'on pose

$$(68) \quad \Delta m_1 = m_2 - m_1, \quad \Delta z_j^{(4)} = z_j^{(2)} - z_j^{(4)},$$

l'expression (64) de Z_j s'écrit, en tenant compte de la première des égalités (66),

$$Z_j = z_j + \frac{\Delta m_1 \Delta z_j^{(4)}}{\sum_{1 \dots p} z_j^{(4)} \Delta z_j^{(4)}}.$$

Remplaçons, dans cette égalité, $\Delta z_j^{(4)}$ par sa valeur

$$(69) \quad \Delta z_j^{(4)} = \frac{dz_j^{(4)}}{dm_1} \Delta m_1 + \frac{1}{2} \frac{d^2 z_j^{(4)}}{dm_1^2} \Delta m_1^2 + \dots,$$

et tenons compte des relations

$$(70) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_j^{1 \dots p} z_j^{(4)} \frac{dz_j^{(4)}}{dm_1} = 0, \\ \sum_j^{1 \dots p} \left(\frac{dz_j^{(4)}}{dm_1} \right)^2 + \sum_j^{1 \dots p} z_j^{(4)} \frac{d^2 z_j^{(4)}}{dm_1^2} = 0, \end{array} \right.$$

obtenues en dérivant deux fois, par rapport à m_1 , la première des égalités (66); il viendra

$$Z_j = z_j + \frac{\frac{dz_j^{(4)}}{dm_1} + \dots}{-\frac{1}{2} \sum_j^{1 \dots p} \left(\frac{dz_j^{(4)}}{dm_1} \right)^2 + \dots}.$$

On déduit de là, en passant à la limite et en convenant d'écrire Z_j au lieu de $\lim Z_j$,

$$Z_j = z_j - 2 \frac{\frac{dz_j^{(4)}}{dm_1}}{\sum_j^{1..p} \left(\frac{dz_j^{(4)}}{dm_1} \right)^2}.$$

Cherchons la limite de l'équation (E). Celle-ci peut s'écrire

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial u \partial v} = \left[k - 2 \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \frac{a_{42}}{\Delta m_1} \right] Z.$$

A cause des égalités (68) et (69) et de la première des relations (66), l'expression (63) de a_{42} devient

$$a_{42} = - \frac{\sum_j^{1..p} z_j^{(4)} \left(\frac{dz_j^{(4)}}{dm_1} \Delta m_1 + \frac{1}{2} \frac{d^2 z_j^{(4)}}{dm_1^2} \Delta m_1^2 + \dots \right)}{\Delta m_1} \cdot \omega_1 \omega_2.$$

Divisons les deux membres de cette égalité par Δm_1 , puis passons à la limite; il viendra, en tenant compte des égalités (70),

$$\lim \frac{a_{42}}{\Delta m_1} = \frac{1}{2} \omega_1^2 \sum_j^{1..p} \left(\frac{dm_1}{dz_j^{(4)}} \right)^2.$$

Par suite, l'équation (E) a pour limite

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial u \partial v} = \left[k - 2 \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \omega_1^2 \sum_j^{1..p} \left(\frac{dz_j^{(4)}}{dm_1} \right)^2 \right] Z.$$

13. Reportons-nous au cas envisagé au n° 10. En s'appuyant sur le théorème de permutabilité (n° 11), on reconnaît aisément que chacune des équations du système (M_{2n}) (n° 8) possède p solutions dont la somme des carrés égale $U + V$ et correspond à n des équations du système dans des transformations $T_{m_1}, T_{m_2}, \dots, T_{m_n}$.

14. Deuxième cas : n impair. Si l'on pose

$$(71) \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \omega_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \omega_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & \omega_n \\ -\omega_1 & -\omega_2 & \dots & -\omega_n & 0 \end{vmatrix},$$

$$(72) \quad a_{ii}^n = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

l'équation (E) est

$$(73) \quad \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial u \partial v} = \left(k - \frac{\partial^2 \log \Delta}{\partial u \partial v} \right) \mathbf{Z}.$$

Les solutions $\mathbf{Z}_j$ ont pour expression

$$\mathbf{Z}_j = \sum_i^{1\dots n} \Omega_i \mathbf{H}(z_j, \omega_i).$$

Si l'on tient compte de la relation

$$z_j^{(i)} = \frac{1}{\omega_i} \mathbf{H}(z_j, \omega_i),$$

cette formule s'écrit

$$\mathbf{Z}_j = \sum_i^{1\dots n} \Omega_i \omega_i z_j^{(i)},$$

ou

$$(74) \quad \mathbf{Z}_j = \sum_i^{1\dots n} \varphi_i z_j^{(i)},$$

étant posé

$$(75) \quad \Omega_i \omega_i = \varphi_i.$$

Les Ω_i sont données par le système

$$\begin{aligned} \sum_i^{1\dots n} a_{ik} \Omega_i &= 0, & \left(\begin{array}{l} k = 1, 2, \dots, n \\ i = 1, 2, \dots, n \text{ sauf } k \end{array} \right) \\ \sum_i^{1\dots n} \Omega_i \omega_i &= 1, \end{aligned}$$

qu'on peut remplacer par le suivant, en tenant compte des formules (48) et (75) :

$$(76) \quad \sum_i^{1...n} \left(\frac{U + V - \varepsilon_{ik}}{e_k - e_i} - \frac{\Gamma_{ik}}{e_k - e_i} \cdot \frac{1}{\omega_i \omega_k} \right) \varphi_i = 0,$$

$$(77) \quad \sum_i^{1...n} \varphi_i = 1.$$

Démontrons que, dans ce cas encore, l'équation (E) possède $p + \nu$ solutions dont la somme des carrés égale $U + V$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots, n$).

Si l'on élève (74) au carré, il vient

$$Z_j^2 = \sum_i^{1...n} \sum_k^{1...n} \varphi_i \varphi_k \tilde{z}_j^{(i)} \tilde{z}_j^{(k)};$$

d'où

$$\sum_j^{1...p} Z_j^2 = \sum_i^{1...n} \sum_k^{1...n} \varphi_i \varphi_k \sum_j^{1...p} \tilde{z}_j^{(i)} \tilde{z}_j^{(k)},$$

ou, à cause de (46),

$$(78) \quad \sum_j^{1...p} Z_j^2 = \sum_i^{1...n} \sum_k^{1...n} \varphi_i \varphi_k \varepsilon_{ik}.$$

Pour calculer le second membre de cette équation, multiplions l'équation (76) par $\sum_k^{1...n} e_k \varphi_k$ et tenons compte de (75) :

$$(79) \quad \sum_i^{1...n} \sum_k^{1...n} \frac{U + V - \varepsilon_{ik}}{e_k - e_i} e_k \varphi_i \varphi_k - \sum_i^{1...n} \sum_k^{1...n} \frac{e_k}{e_k - e_i} \Gamma_{ik} \Omega_i \Omega_k = 0.$$

Echangeons, dans cette égalité, i et k et tenons compte de (44) :

$$(80) \quad \sum_i^{1...n} \sum_k^{1...n} \frac{U + V - \varepsilon_{ik}}{e_i - e_k} e_i \varphi_i \varphi_k - \sum_i^{1...n} \sum_k^{1...n} \frac{e_i}{e_i - e_k} \Gamma_{ik} \Omega_i \Omega_k = 0.$$

Additionnons les égalités (79) et (80) :

$$(81) \quad \sum_i^{1...n} \sum_k^{1...n} (U + V - \varepsilon_{ik}) \varphi_i \varphi_k - \sum_i^{1...n} \sum_k^{1...n} \Gamma_{ik} \Omega_i \Omega_k = 0.$$

Dans cette égalité, ainsi que dans les deux précédentes, il faut supposer $i \neq k$. Si l'on fait $k = i$ dans la première somme double, on introduit des termes dont la somme A a pour valeur

$$A = \sum_i^{1...n} (U + V - \varepsilon_{ii}) \varphi_i^2.$$

Or, en vertu des relations (46) et (39),

$$\varepsilon_{ii} = \sum_j^{1...p} (z_j^{(i)})^2 = U + V + \frac{C_i}{\omega_i^2}.$$

Par suite

$$A = \sum_i^{1...n} \frac{C_i \varphi_i^2}{\omega_i^2},$$

ou, en vertu de (75),

$$A = - \sum_i^{1...n} C_i \Omega_i^2.$$

L'égalité (81) peut donc s'écrire

$$\sum_i^{1...n} \sum_k^{1...n} (U + V - \varepsilon_{ik}) \varphi_i \varphi_k + \sum_i^{1...n} C_i \Omega_i^2 - \sum_i^{1...n} \sum_k^{1...n} \Gamma_{ik} \Omega_i \Omega_k = 0,$$

ou

$$(82) \quad (U + V) \sum_i^{1...n} \sum_k^{1...n} \varphi_i \varphi_k - \sum_i^{1...n} \sum_k^{1...n} \varepsilon_{ik} \varphi_i \varphi_k + \sum_i^{1...n} C_i \Omega_i^2 - \sum_i^{1...n} \sum_k^{1...n} \Gamma_{ik} \Omega_i \Omega_k = 0,$$

à condition de donner à i et à k , dans les deux premières sommes doubles, toutes les valeurs $1, 2, \dots, n$.

Si l'on tient compte de l'égalité

$$\sum_i^{1...n} \sum_k^{1...n} \varphi_i \varphi_k = 1,$$

obtenue en élevant (77) au carré, l'égalité (82) devient

$$\sum_i^{1...n} \sum_k^{1...n} \varepsilon_{ik} \varphi_i \varphi_k = U + V + \sum_i^{1...n} C_i \Omega_i^2 - \sum_i^{1...n} \sum_k^{1...n} \Gamma_{ik} \Omega_i \Omega_k,$$

et, par suite, la relation (78) peut s'écrire

$$(83) \quad \sum_j^{1..p} Z_j^2 - \sum_i^{1..n} C_i \Omega_i^2 + \sum_i^{1..n} \sum_k^{1..n} \Gamma_{ik} \Omega_i \Omega_k = U + V.$$

On déduit de là, en raisonnant comme au n° 9, le théorème énoncé.

15. Si tous les C_i et tous les Γ_{ik} sont nuls, chacune des équations du système (M_{2^n}) (n° 8) admet p solutions dont la somme des carrés égale $U + V$ et correspond à n des équations du système dans des transformations $T_{m_1}, T_{m_2}, \dots, T_{m_n}$. Ce théorème a été démontré par M. Bianchi (*loc. cit.*), pour $n = 3$, dans le cas où $\sum_j^{1..n} z_j^2$ est $\neq 0$.

16. Conservant les notations du n° 12 du mémoire M, indiquons l'expression des quantités $H(\lambda_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}, \Omega_{\alpha_i})$, ($i = 1, 2, \dots, n$).

On a, si n est pair,

$$(84) \quad H(\lambda_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}, \Omega_{\alpha_k}) = \sum_i^{1..n} A_{\alpha_i \alpha_k} \omega_{\alpha_i} \lambda_{\alpha_i}$$

et, si n est impair,

$$(85) \quad H(\lambda_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}, \Omega_{\alpha_k}) = \lambda \Omega_{\alpha_k} + \sum_i^{1..n} A_{\alpha_i \alpha_k} \omega_{\alpha_i} \lambda_{\alpha_i}.$$

17. Dans les égalités (61) et (83), annulons les Γ_{ik} et posons

$$(86) \quad Z_{p+i} = \sqrt{-C_i} \Omega_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ces égalités s'écriront

$$(87) \quad \sum_j^{1..p} Z_j^2 + \sum_i^{1..n} Z_{p+i}^2 = U + V.$$

En vue de l'application de la présente théorie à la Géométrie, nous allons faire connaître les expressions des quantités $H(Z_i, Z_k)$, ($i, k = 1, 2, \dots, n + p$). Celles-ci peuvent être réparties en trois catégories :

1° Les quantités $H(Z_i, Z_k)$ ($i, k = 1, 2, \dots, p$). Leurs expressions sont fournies par les formules (19) et (20) du mémoire M.

2° Les quantités $H(Z_i, Z_k)$, ($i, k = p + 1, p + 2, \dots, p + n$). A des facteurs constants près, ce sont les quantités A_{ik} qui figurent dans les formules (84) et (85).

3° Les quantités $H(Z_i, Z_k)$, ($i = 1, 2, \dots, p$; $k = p + 1, p + 2, \dots, p + n$). Leurs expressions sont fournies par les formules (84) et (85).

GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE. — **Sur les congruences
qui appartiennent à un complexe linéaire
et sur les surfaces Φ ,**

par A. DEMOULIN, membre de l'Académie.

I.

1. Si les coordonnées d'un point P dépendent de deux paramètres u, v , nous désignerons par (P) la surface décrite par ce point, par (P_{uv}) le réseau (u, v) tracé sur (P) et par $(P_u), (P_v)$ les courbes $v = \text{const.}, u = \text{const.}$ qui passent par P.

Inversement, lorsque nous parlerons d'un réseau (P_{uv}) , il s'agira du réseau (u, v) décrit par un point P.

2. Si une droite d engendre une congruence, nous désignerons celle-ci par (d) . Si les développables de (d) ont u, v pour

paramètres, nous appellerons premier (ou second) foyer de d le point de contact de cette droite avec son enveloppe lorsque u (ou v) varie seul.

3. Soient (M) , (N) deux surfaces qui se correspondent dans une transformation corrélative T . Désignons par M , N deux points correspondants de ces surfaces et appelons u , v les paramètres d'un réseau conjugué quelconque tracé sur (M) . On sait que le réseau (N_{uv}) est conjugué et que les tangentes aux courbes (N_v) , (N_u) correspondent respectivement dans T aux tangentes aux courbes (M_u) , (M_v) .

k désignant un entier positif quelconque, soient :

A_1 le second foyer de la tangente à (M_u) , A_{k+1} le second foyer de la tangente à (A_{ku}) ;

B_1 le premier foyer de la tangente à (M_v) , B_{k+1} le premier foyer de la tangente à (B_{kv}) ;

C_1 le premier foyer de la tangente à (N_v) , C_{k+1} le premier foyer de la tangente à (C_{kv}) ;

D_1 le second foyer de la tangente à (N_u) , D_{k+1} le second foyer de la tangente à (D_{ku}) .

Les surfaces (A_k) et (C_k) , $k = 1, 2, \dots$, se correspondent dans T .

Le théorème est vrai pour $k = 1$. En effet, les droites MA_1 , NC_1 se correspondent dans T ; il en est donc de même des surfaces (A_1) et (C_1) .

Si le théorème est vrai pour une valeur de k , il est vrai pour $k + 1$. En effet, si les surfaces (A_k) , (C_k) se correspondent dans T , les tangentes $A_k A_{k+1}$, $C_k C_{k+1}$ se correspondent aussi dans T et il en est par suite de même des surfaces (A_{k+1}) , (B_{k+1}) .

Le théorème est donc démontré.

On démontrera, par la même méthode, que les surfaces (B_k) et (D_k) , $k = 1, 2, \dots$, se correspondent dans T .

Indiquons quelques conséquences de ces propriétés :

4. Supposons que la corrélation T soit une transformation par pôlaïres réciproques relativement à une quadrique Q et prenons pour (M) cette quadrique; alors, les tangentes MA_1 , MB_1 étant conjuguées par rapport à Q , les points N , C_k , D_k , $k = 1, 2, \dots$, coïncideront respectivement avec les points M , B_k , A_k et, par suite, les droites $A_k A_{k+1}$, $B_k B_{k+1}$ seront conjuguées par rapport à Q .

En particulier, si Q est une sphère, les droites $A_k A_{k+1}$, $B_k B_{k+1}$ seront orthogonales.

Soit à présent $(\bar{M})$ une surface admettant le réseau (u, v) tracé sur (M) comme représentation sphérique de ses lignes de courbure. On peut attacher au point $\bar{M}$ une ligne brisée

$$\dots \bar{B}_3 \bar{B}_2 \bar{B}_1 \bar{M} \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \dots$$

de même définition que la ligne

$$\dots B_3 B_2 B_1 M A_1 A_2 A_3 \dots$$

Les côtés $\bar{A}_k \bar{A}_{k+1}$, $\bar{B}_k \bar{B}_{k+1}$ sont respectivement parallèles aux côtés $A_k A_{k+1}$, $B_k B_{k+1}$; ces derniers étant orthogonaux, il en est de même des premiers.

Cette propriété générale des surfaces est due à M. Guichard.

5. Supposons que les surfaces (M) , (N) soient polaires réciproques par rapport à un complexe linéaire L . Alors les conjuguées des droites MA_1 , $A_k A_{k+1}$, MB_1 , $B_k B_{k+1}$, par rapport à ce complexe, seront respectivement les droites NC_1 , $C_k C_{k+1}$, ND_1 , $D_k D_{k+1}$, et les surfaces (A_k) , (B_k) auront respectivement pour polaires réciproques, par rapport à L , les surfaces (C_k) , (D_k) .

6. Envisageons les cas où le réseau (u, v) tracé sur (M) est un réseau focal de la congruence engendrée par MN . Si, par exemple, MA_1 coïncide avec MN , NC_1 coïncidera avec NM , et, par suite, les points D_1 , D_2 , $\dots$, B_1 , B_2 , $\dots$ coïncideront res-

pectivement avec les points $A_2, A_3, \dots, C_2, C_3, \dots$. D'après le théorème du n° 5, les droites $A_k A_{k+1}, C_k C_{k+1}$ seront conjuguées par rapport au complexe L et les surfaces $(A_k), (C_k)$ seront polaires réciproques par rapport au même complexe.

Ce théorème a été démontré récemment par M. Guichard (*). Nous avons établi, en 1911, que les droites $C_1 C_2, C_2 C_3$ ont pour conjuguées $A_1 A_2, A_2 A_3$ et que les surfaces $(A_2), (C_2)$ sont polaires réciproques par rapport à L (**).

7. Le théorème du n° 5 est une propriété caractéristique des congruences contenues dans un complexe linéaire. On peut, en effet, énoncer le théorème suivant.

Supposons que deux droites d, d' engendrent deux congruences dont les développables se correspondent. u, v désignant les paramètres de ces développables, soient P, Q le premier et le second foyer de d et P', Q' le second et le premier foyer de d' . Si les droites PP' et QQ' ont respectivement P, P' et Q, Q' pour foyers, sans que les développables de chacune des congruences engendrées par PP', QQ' aient u, v pour paramètres, les droites d, d' sont conjuguées par rapport à un complexe linéaire et, par suite, les polaires réciproques des surfaces $(P), (Q)$ par rapport à ce complexe sont respectivement les surfaces $(P'), (Q')$.

Nous avons établi ce théorème par la méthode du tétraèdre mobile (***).

M. Guichard (*loc. cit.*) l'a démontré dans le cas particulier où les développables engendrées par l'une des droites PP', QQ' ont pour paramètres u, v .

(*) GUICHARD, *Sur une propriété caractéristique des congruences qui appartiennent à un complexe linéaire.* COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS, séance du 8 mars 1920.)

(**) Voir le n° 2 de notre note *Sur les surfaces R et les surfaces Ω .* (COMPTES RENDUS, séance du 25 septembre 1911.)

(***) DEMOULIN, *Principes de géométrie projective intrinsèque.* (COMPTES RENDUS, séance du 22 février 1909.)

II.

8. Le théorème énoncé au n° 7 nous a suggéré le problème suivant : Supposons que deux droites d , d' engendrent deux congruences (d) , (d') dont les développables se correspondent. u , v désignant les paramètres de ces développables, soient P , Q le premier et le second foyer de d et P' , Q' le premier et le second foyer de d' . Déterminer les congruences (d) , (d') de manière que les droites PP' et QQ' aient respectivement P , P' et Q , Q' pour foyers.

Pour résoudre ce problème, désignons par $x_1, \dots, x_6$ les coordonnées de d , et par $x'_1, \dots, x'_6$ celles de d' , ces coordonnées étant liées par les relations

$$(1) \quad \sum_i^{1..6} x_i^2 = 0, \quad \sum_i^{1..6} x_i'^2 = 0.$$

u , v étant les paramètres des développables des congruences (d) , (d') , on a

$$(2) \quad \sum_i^{1..6} \left(\frac{\partial x_i}{\partial u} \right)^2 = 0, \quad \sum_i^{1..6} \left(\frac{\partial x_i}{\partial v} \right)^2 = 0,$$

$$(3) \quad \sum_i^{1..6} \left(\frac{\partial x'_i}{\partial u} \right)^2 = 0, \quad \sum_i^{1..6} \left(\frac{\partial x'_i}{\partial v} \right)^2 = 0.$$

Les coordonnées des droites du faisceau plan osculateur de (P_u) et celles des droites du faisceau plan osculateur de (Q'_v) sont respectivement de la forme $\lambda x_i + \mu \frac{\partial x_i}{\partial u}$, $\lambda' x'_i + \mu' \frac{\partial x'_i}{\partial v}$; or la droite PQ' appartient à ces deux faisceaux; il existe donc quatre fonctions $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ telles qu'on ait, pour $i = 1, 2, \dots, 6$,

$$(4) \quad \lambda x_i + \mu \frac{\partial x_i}{\partial u} = \lambda' x'_i + \mu' \frac{\partial x'_i}{\partial v}.$$

De même, $P'Q$ appartenant aux faisceaux plans osculateurs

des courbes (P'_u) , (Q_v) , il existe quatre fonctions ν , ρ , ν' , ρ' telles qu'on ait, pour $i = 1, 2, \dots, 6$,

$$(5) \quad \nu x_i + \rho \frac{\partial x_i}{\partial v} = \nu' x'_i + \rho' \frac{\partial x'_i}{\partial u}.$$

Multiplions (symboliquement) les équations (4) et (5) par $\sum_i^{1\dots 6} x'_i$, puis par $\sum_i^{1\dots 6} x_i$; il viendra, en tenant compte de (1),

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda \sum_i^{1\dots 6} x_i x'_i + \mu \sum_i^{1\dots 6} x'_i \frac{\partial x_i}{\partial u} = 0, \\ \nu \sum_i^{1\dots 6} x_i x'_i + \rho \sum_i^{1\dots 6} x'_i \frac{\partial x_i}{\partial v} = 0, \\ \lambda' \sum_i^{1\dots 6} x_i x'_i + \mu' \sum_i^{1\dots 6} x_i \frac{\partial x'_i}{\partial v} = 0, \\ \nu' \sum_i^{1\dots 6} x_i x'_i + \rho' \sum_i^{1\dots 6} x_i \frac{\partial x'_i}{\partial u} = 0. \end{array} \right.$$

Remplaçons dans les équations (4) et (5) x_i par $\alpha \bar{x}_i$ et x'_i par $\alpha' \bar{x}'_i$, α et α' désignant deux fonctions quelconques de u et de v :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\lambda \alpha + \mu \frac{\partial \alpha}{\partial u} \right) \bar{x}_i + \mu \alpha \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial u} = \left(\lambda' \alpha' + \mu' \frac{\partial \alpha'}{\partial v} \right) \bar{x}'_i + \mu' \alpha' \frac{\partial \bar{x}'_i}{\partial v}, \\ \left(\nu \alpha + \rho \frac{\partial \alpha}{\partial v} \right) \bar{x}_i + \rho \alpha \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial v} = \left(\nu' \alpha' + \rho' \frac{\partial \alpha'}{\partial u} \right) \bar{x}'_i + \rho' \alpha' \frac{\partial \bar{x}'_i}{\partial u}. \end{array} \right.$$

Annulons les coefficients de $\bar{x}_i$ et de $\bar{x}'_i$; il viendra, en tenant compte de (6),

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial \log \alpha}{\partial u} = \frac{\sum_i^{1\dots 6} x'_i \frac{\partial x_i}{\partial u}}{\sum_i^{1\dots 6} x_i x'_i}, & \frac{\partial \log \alpha}{\partial v} = \frac{\sum_i^{1\dots 6} x'_i \frac{\partial x_i}{\partial v}}{\sum_i^{1\dots 6} x_i x'_i}, \\ \frac{\partial \log \alpha'}{\partial u} = \frac{\sum_i^{1\dots 6} x_i \frac{\partial x'_i}{\partial u}}{\sum_i^{1\dots 6} x_i x'_i}, & \frac{\partial \log \alpha'}{\partial v} = \frac{\sum_i^{1\dots 6} x_i \frac{\partial x'_i}{\partial v}}{\sum_i^{1\dots 6} x_i x'_i}. \end{array}$$

et les équations (7) se réduiront aux suivantes :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{x}'_i}{\partial v} = \frac{\mu \alpha}{\mu' \alpha'} \cdot \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial u}, \\ \frac{\partial \bar{x}'_i}{\partial u} = \frac{\rho \alpha}{\rho' \alpha'} \cdot \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial v}. \end{array} \right.$$

Si l'on écrit la condition d'intégrabilité pour $\log \alpha$ et la condition d'intégrabilité pour $\log \alpha'$, on n'obtient qu'une seule relation, savoir

$$\begin{aligned} \sum_i^{1..6} x_i x'_i \left(\sum_i^{1..6} \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial x'_i}{\partial v} - \sum_i^{1..6} \frac{\partial x_i}{\partial v} \frac{\partial x'_i}{\partial u} \right) \\ = \sum_i^{1..6} x'_i \frac{\partial x_i}{\partial u} \sum_i^{1..6} x_i \frac{\partial x'_i}{\partial v} - \sum_i^{1..6} x'_i \frac{\partial x_i}{\partial v} \sum_i^{1..6} x_i \frac{\partial x'_i}{\partial u}. \end{aligned}$$

Celle-ci est vérifiée, car si l'on y remplace $\frac{\partial x'_i}{\partial u}$ et $\frac{\partial x'_i}{\partial v}$ par leurs valeurs tirées des équations (4) et (5) et qu'on tienne compte des égalités (1), (2) et (3), on obtient une identité. Donc les fonctions α , α' existent et, par suite, on peut prendre les quantités $\bar{x}_i$ et $\bar{x}'_i$ pour coordonnées des droites d et d' . Supprimons, dans les relations (8), les traits horizontaux et posons

$$\frac{\mu \alpha}{\mu' \alpha'} = m, \quad \frac{\rho \alpha}{\rho' \alpha'} = n;$$

il viendra

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x'_i}{\partial v} = m \frac{\partial x_i}{\partial u}, \\ \frac{\partial x'_i}{\partial u} = n \frac{\partial x_i}{\partial v}. \end{array} \right.$$

Il s'agit de satisfaire de la manière la plus générale à ces égalités et aux égalités (1), (2), (3). On peut faire abstraction des égalités (3), qui résultent des égalités (2) et (9), et faire ensuite abstraction des égalités (2), à condition de se souvenir que u , v

sont les paramètres des développables de la congruence (d). φ et ψ désignant des facteurs intégrants des expressions $\sqrt{m} dv + \sqrt{n} du$, $\sqrt{m} dv - \sqrt{n} du$, posons

$$d\alpha = \varphi(\sqrt{m} dv + \sqrt{n} du), \quad d\beta = \psi(\sqrt{m} dv - \sqrt{n} du).$$

Si l'on prend α, β comme variables indépendantes et qu'on pose $\omega^2 = -\sqrt{mn}$, le système (9) s'écrit

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x'_i}{\partial \alpha} = -\omega^2 \frac{\partial x_i}{\partial \alpha}, \\ \frac{\partial x'_i}{\partial \beta} = \omega^2 \frac{\partial x_i}{\partial \beta}, \end{array} \right.$$

ou, en remplaçant x'_i par $z'_i \omega$ et x_i par $\frac{z_i}{\omega}$,

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} z'_i \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} + \omega \frac{\partial z'_i}{\partial \alpha} = z_i \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} - \omega \frac{\partial z_i}{\partial \alpha}, \\ z'_i \frac{\partial \omega}{\partial \beta} + \omega \frac{\partial z'_i}{\partial \beta} = -z_i \frac{\partial \omega}{\partial \beta} + \omega \frac{\partial z_i}{\partial \beta}. \end{array} \right.$$

A cause de cette substitution, les égalités (4) deviennent

$$(12) \quad \sum_i^{1\dots 6} z_i^2 = 0,$$

$$(13) \quad \sum_i^{1\dots 6} z_i'^2 = 0.$$

En vertu des égalités (11), $z_1, z_2, \dots, z_6$ satisfont à l'équation de Moutard :

$$(14) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{1}{\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha \partial \beta} z.$$

$z'_1, z'_2, \dots, z'_6$ correspondent respectivement à $z_1, z_2, \dots, z_6$ dans la transformation de Moutard relative à la solution ω de (14) et satisfont à l'équation

$$(15) \quad \frac{\partial^2 z'}{\partial \alpha \partial \beta} = \omega \frac{\partial^2 \frac{1}{\omega}}{\partial \alpha \partial \beta} z'.$$

Démontrons que, réciproquement, du système (11) ou de son équivalent (10), on peut déduire un système de la forme (9), u, v désignant les paramètres des développables de la congruence (d). L'équation différentielle de ces développables est

$$\sum_i^{1\dots 6} dz_i^2 = \sum_i^{1\dots 6} \left(\frac{\partial z_i}{\partial \alpha} \right)^2 d\alpha^2 + 2 \sum_i^{1\dots 6} \frac{\partial z_i}{\partial \alpha} \frac{\partial z_i}{\partial \beta} d\alpha d\beta + \sum_i^{1\dots 6} \left(\frac{\partial z_i}{\partial \beta} \right)^2 d\beta^2 = 0.$$

On démontre facilement que les coefficients de $d\alpha$ et de $d\beta$ sont respectivement des fonctions de α seule et de β seule et que le coefficient de $d\alpha d\beta$ est nul; donc, pour un choix convenable des paramètres α, β , l'équation précédente peut s'écrire

$$d\alpha^2 - d\beta^2 = 0.$$

Par suite, les variables u, v définies par les égalités

$$u = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad v = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

sont les paramètres des développables de la congruence (d). Si, dans le système (10), on prend u, v comme variables indépendantes, il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'_i}{\partial v} &= -\omega^2 \frac{\partial x_i}{\partial u} \\ \frac{\partial x'_i}{\partial u} &= -\omega^2 \frac{\partial x_i}{\partial v}, \end{aligned}$$

système de la forme (9). La réciproque est donc démontrée.

En définitive, s'il existe douze fonctions $z_1, z_2, \dots, z_6; z'_1, z'_2, \dots, z'_6$ satisfaisant aux égalités (11), (12) et (13), les droites d, d' , qui ont respectivement pour coordonnées $z_1, z_2, \dots, z_6; z'_1, z'_2, \dots, z'_6$, engendreront le couple le plus général de congruences jouissant des propriétés indiquées.

9. En partant de là et en s'appuyant sur quelques-uns des résultats contenus dans le paragraphe I de notre mémoire *Sur les équations de Moutard à solutions quadratiques* (*), on est conduit à la solution suivante du problème proposé :

On déterminera de la manière la plus générale une équation de Moutard :

$$(16) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha \partial \beta} = kz,$$

possédant six solutions z_i liées par la relation (12). On formera ensuite le système suivant de douze équations linéaires aux inconnues $H_1, H_2, \dots, H_6$, où figure un paramètre arbitraire m :

$$(17) \quad \begin{cases} \frac{\partial H_i}{\partial u} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^6 \left(z_i \frac{\partial z_k}{\partial u} - z_k \frac{\partial z_i}{\partial u} \right) H_k, \\ \frac{\partial H_i}{\partial v} = -\frac{1}{m} \sum_{i=1}^6 \left(z_i \frac{\partial z_k}{\partial v} - z_k \frac{\partial z_i}{\partial v} \right) H_k. \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, 6).$$

Ce système est complètement intégrable et admet l'intégrale

$$(18) \quad \sum_{i=1}^6 H_i^2 = \text{const.}$$

On en déterminera de la manière la plus générale une solution ($H_1, H_2, \dots, H_6$) satisfaisant à la condition

$$(19) \quad \sum_{i=1}^6 H_i^2 = 0,$$

puis on posera

$$(20) \quad z'_i = \frac{m}{\sum_{i=1}^6 z_i H_i} \cdot H_i.$$

Les z'_i satisferont à la relation (13) et vérifieront, conjointement avec les z_i , les égalités (11), ω ayant pour valeur

$$(21) \quad \omega = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^6 z_i H_i.$$

(*) Ce *Bulletin*, année 1920, p. 192.

Les quantités z_i seront les coordonnées de la droite d et les quantités z'_i (ou H_i) celles de la droite d' .

Appelons réseau Φ un réseau conjugué dont les tangentes engendrent des congruences W ; surface Φ une surface sur laquelle est tracé un réseau Φ , et congruence Φ le lieu d'une des tangentes d'un réseau Φ . Pour qu'une congruence rectiligne soit Φ , il faut et il suffit que les coordonnées de la droite qui l'engendre vérifient une équation de Laplace à invariants égaux (*). D'après cela, la congruence (d) est la congruence Φ la plus générale. Cette congruence étant choisie, la congruence (d') , qui est évidemment Φ , dépend de la constante m et de quatre constantes d'intégration. m étant donnée, nous désignerons par T_m la transformation en vertu de laquelle on passe de la congruence (d) à la congruence (d') . On peut définir cette dernière géométriquement en donnant la position de d' pour un système u_0, v_0 de valeurs de u, v .

10. Les coordonnées des droites d, d' satisfaisant respectivement aux équations (14) et (15), α, β sont les paramètres des deux nappes de la surface focale de chacune des congruences $(d), (d')$; par suite, les droites PP', QQ' engendrent aussi des congruences W .

(*) TZITZÉICA, *Sur certains réseaux conjugués*. (COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS, séance du 24 avril 1911.)

DEMOULIN, *Sur les surfaces R et les surfaces Ω* . (COMPTES RENDUS, séances des 25 septembre et 16 octobre 1911.)

Sur les surfaces R. (COMPTES RENDUS, séance du 30 octobre 1911.)

Les réseaux, surfaces et congruences Φ sont désignés, dans ces notes, par la lettre R. Dans un travail paru récemment (*Sur les systèmes Θ et sur les systèmes R*, ce *Bulletin*, 1919, pp. 185-197), nous avons étudié des congruences de courbes qui généralisent les systèmes cycliques de Ribaucour et nous les avons appelées *systèmes R*. Nous avons alors l'intention de proposer de substituer la lettre Φ à la lettre R pour désigner les figures définies dans le texte. Nous le faisons ici.

11. Nous consacrerons prochainement aux réseaux, aux surfaces et aux congruences Φ un écrit spécial. Indiquons rapidement ici quelques-unes de leurs propriétés les plus importantes :

Désignons par u, v les paramètres des courbes d'un réseau Φ tracé sur une surface (M) , lieu d'un point M , et par t_1, t_2 les tangentes aux courbes $(M_u), (M_v)$.

m étant donnée, soumettons la congruence (t_1) à une quelconque des ∞^4 transformations T_m définies plus haut (n° 9) et désignons par t'_1 la droite génératrice de la congruence ainsi obtenue. Le premier foyer M' de cette droite appartient, on le sait, au plan tangent à la surface (M) . Soit t'_2 la tangente à la courbe (M'_v) . La congruence (t'_2) correspond à la congruence (t_2) dans une transformation T_m . Eu égard à cette propriété, nous dirons que les réseaux (u, v) décrits par les points M et M' se correspondent dans une transformation T_m .

Si, conservant les notations du n° 3, on attache aux points M et M' les lignes brisées

$$\dots B_3 B_2 B_1 M A_1 A_2 A_3 \dots, \quad \dots B'_3 B'_2 B'_1 M A'_1 A'_2 A'_3 \dots,$$

les réseaux $(A'_{kuv}), (B'_{kuv}), k = 1, 2, 3, \dots$, qui sont Φ , correspondent respectivement aux réseaux $(A_{kuv}), (B_{kuv})$ dans des transformations T_m .

12. Les droites t'_1, t'_2 ont entre elles une relation remarquable. Pour chaque position du point M , elles se correspondent dans une homographie $\mathfrak{H}$ qui dépend seulement de m et non des quatre autres constantes dont dépend la surface (M') .

Dans cette homographie, deux points correspondants sont en ligne droite avec le point M et les points du plan tangent en M sont des points doubles.

13. Soumettons le réseau (M_{uv}) à trois transformations T_m . Les points P', P'', P''' qui décrivent les réseaux Φ ainsi obtenus sont situés dans le plan tangent en M . Supposons que les tangentes aux courbes $(P'_u), (P''_u), (P'''_u)$ soient des génératrices d'un

hyperboloïde H_1 et qu'elles appartiennent à un même système, que nous appellerons le premier. Soit Γ la conique d'intersection de H_1 et du plan tangent en M . Marquons sur Γ un point M' tel que

$$(22) \quad (M'P'P''P''') = \text{const.}$$

Le réseau (M'_{uv}) correspond au réseau (M_{uv}) dans une transformation T_m et la tangente t'_1 à la courbe (M'_u) est une génératrice de H_1 qui appartient au premier système. En vertu de la relation (22), le rapport anharmonique de quatre points M' est constant.

La conique Γ porte une seconde série simplement infinie de points M'' décrivant des réseaux Φ qui correspondent au réseau (M_{uv}) dans des transformations T_m . Le rapport anharmonique de quatre points M'' est constant. Les tangentes t'_1 aux courbes (M'_u) sont les génératrices de H_1 qui appartiennent au second système.

Les tangentes t'_2 aux courbes (M'_v) et les tangentes t'_2 aux courbes (M''_v) engendrent deux demi-quadrriques complémentaires portées par la quadrique H_2 qui correspond à H_1 dans la transformation $\mathfrak{G}$.

Les plans tangents aux surfaces (M') et les plans tangents aux surfaces (M'') enveloppent un cône du second ordre de sommet M .

La conique Γ engendre le système Θ auquel nous avons fait allusion au n°10 de notre mémoire *Sur les systèmes Θ et sur les systèmes R* , cité plus haut.

14. Dans le cas où les tangentes aux courbes (P'_u) , (P''_u) , (P'''_u) ont un point commun O , il y a ∞^2 coniques Γ circonscrites au triangle $P'P''P'''$ qui jouissent de la propriété suivante : Si l'on marque sur une quelconque de ces coniques un point M' tel que $(M'P'P''P''') = \text{const.}$, le réseau (M'_{uv}) correspond à (M_{uv}) dans une transformation T_m .

Les tangentes aux lignes (M'_u) passent par O et les tangentes aux lignes (M'_v) passent par le point O' qui correspond à O dans la transformation $\mathfrak{C}$.

Chacune des coniques Γ engendre un système R.

15. Des cas particuliers du théorème du n° 13 et du corrélatif du théorème du n° 14 se rencontrent dans l'étude des transformations B_k des surfaces applicables sur une quadrique.

16. Si deux réseaux (M_{1uv}) , (M_{2uv}) correspondent au réseau (M_{uv}) dans des transformations T_m , de manière que les tangentes aux lignes (M_{1u}) , (M_{2v}) se coupent en un point O, la droite M_1M_2 porte ∞^1 points M' tels que les réseaux (M'_{uv}) correspondent au réseau (M_{uv}) des transformations T_m . Le rapport anharmonique de quatre points M' est constant. Les tangentes aux courbes (M'_u) passent par O et les tangentes aux courbes (M'_v) passent par le point O' qui correspond à O dans $\mathfrak{C}$.

17. Si deux réseaux (M_{1uv}) , (M_{2uv}) correspondent respectivement au réseau (M_{uv}) dans des transformations T_{m_1} , T_{m_2} , il existe un quatrième réseau (M'_{uv}) qui correspond respectivement aux réseaux (M_{1uv}) , (M_{2uv}) dans des transformations T_{m_2} , T_{m_1} . Les tangentes en M', M, M_1 , M_2 aux courbes $v = \text{const.}$ (ou $u = \text{const.}$) forment un quadruple hyperboloïdique et leur rapport anharmonique est égal à $\frac{m_2}{m_1}$.

18. Si n réseaux ($n > 2$) (M_{1uv}) , (M_{2uv}) , ..., $(M_{n uv})$ correspondent au réseau (M_{uv}) dans des transformations T_{m_1} , T_{m_2} , ..., T_{m_n} , on peut joindre aux $n + 1$ réseaux (M_{uv}) , (M_{1uv}) , ..., $(M_{n uv})$, $2^n - n - 1$ réseaux $(u, v) \Phi$ de manière à obtenir un système de 2^n réseaux Φ jouissant de la propriété suivante : un quelconque des réseaux du système correspond à n réseaux du système dans des transformations T_{m_1} , T_{m_2} , ..., T_{m_n} .

19. Rappelons un théorème que nous avons fait connaître dans notre Note du 30 octobre 1911, citée plus haut :

Il y a une congruence Φ qui a même représentation sphérique que le réseau (M_{uv}) . Soit d la droite génératrice de cette congruence. Chacune des congruences (t_1) , (t_2) a même représentation sphérique qu'un des réseaux focaux de la congruence (d) ; or la congruence (t_1) est la congruence Φ la plus générale; donc, une congruence Φ étant donnée, il y a un réseau Φ qui a même représentation sphérique que la congruence.

Si une congruence et un réseau Φ ont même représentation sphérique, nous appellerons transformation Θ_1 l'opération en vertu de laquelle on déduit la congruence du réseau ou *vice versa*.

Tout réseau déduit du réseau (M_{uv}) au moyen de la méthode de Laplace correspond, dans la transformation Θ_1 , à une congruence déduite de la congruence (d) au moyen de la même méthode.

20. Soit $\bar{d}$ la conjuguée de d par rapport à une sphère de centre O . La congruence $(\bar{d})$ est Φ . Désignons par $(\bar{M}_{uv})$ le réseau Φ qui lui correspond dans la transformation Θ_1 .

Le rapport des courbures totales des surfaces (M) et $(\bar{M})$ est proportionnel à la quatrième puissance de la distance du point O à la droite d .

Si (M_{uv}) est le réseau des lignes de courbure d'une surface pseudosphérique, la surface $(\bar{M})$ est applicable sur un paraboloïde tangent au plan de l'infini en un point du cercle de l'infini.

La relation entre les réseaux (M_{uv}) et $(\bar{M}_{uv})$ est évidemment involutive. Appelons transformation Θ_2 l'opération en vertu de laquelle on déduit le réseau $(\bar{M}_{uv})$ du réseau (M_{uv}) ou *vice versa*.

Conservant les notations du n° 3, attachons aux points M et $\bar{M}$ les lignes brisées

$$\dots B_3 B_2 B_1 M A_1 A_2 A_3 \dots, \quad \dots \bar{B}_3 \bar{B}_2 \bar{B}_1 \bar{M} \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \dots$$

Les réseaux (A_{kuv}) , (B_{kuv}) , $k = 1, 2, 3, \dots$ correspondent aux réseaux $(\bar{B}_{kuv})$, $(\bar{A}_{kuv})$ dans la transformation Θ_2 .

21. Le théorème du n° 19 conduit à la propriété caractéristique suivante des surfaces Φ . Imaginons une surface rapportée au réseau (α, β) de ses lignes asymptotiques. Désignons par ξ, η, ζ les cosinus directeurs de sa normale, par $-\frac{1}{\rho^2}$ sa courbure totale et posons

$$a = \xi \sqrt{\rho}, \quad b = \eta \sqrt{\rho}, \quad c = \zeta \sqrt{\rho}.$$

On sait que a, b, c satisfont à une équation de Moutard :

$$(e) \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial \alpha \partial \beta} = k \eta.$$

Pour que la surface soit Φ , il faut et il suffit que l'équation (e) possède trois solutions l, m, n liées aux solutions a, b, c par la relation

$$al + bm + cn = 0.$$

De là résulte le théorème suivant : Si une surface est Φ de deux manières, elle l'est d'une infinité de manières. Ce théorème se déduit, par la transformation de Lie, de celui que nous avons démontré à la fin de notre Note du 16 octobre 1911.

22. Soient deux réseaux Φ qui se correspondent dans une transformation T_m . A chacun de ces réseaux correspond dans la transformation Θ_1 une congruence Φ , qui n'est définie qu'à une translation près. Une des congruences considérées étant choisie arbitrairement, on peut disposer de l'autre de manière que les deux congruences se correspondent dans une transformation T_m . La constante m est égale au produit de la distance de deux points correspondants des réseaux Φ par la plus courte distance de deux droites correspondantes des congruences Φ .

23. Soit (M) une surface applicable sur une quadrique Q . Le réseau conjugué (u, v) commun à (M) et à Q est Φ (TZITZÉICA, *loc. cit.*). Si l'on soumet la surface à une transformation

B_k de M. Bianchi, le réseau (u, v) tracé sur la transformée (M_1) de (M) correspond, on le sait, à un réseau conjugué de Q ; il est donc Φ . Les réseaux (M_{uv}) , (M_{1uv}) se correspondent dans une transformation T_m et m est proportionnel à k .

24. Rappelons le théorème de permutabilité de M. Bianchi : Une surface (M) applicable sur une quadrique étant soumise à deux transformations B_{k_1} , B_{k_2} , désignons par (M_1) et (M_2) les surfaces obtenues. Cela posé, il existe une quatrième surface parfaitement déterminée (M') qui correspond respectivement aux surfaces (M_1) , (M_2) dans des transformations B_{k_2} , B_{k_1} .

Soient, comme plus haut, u, v les paramètres du réseau conjugué commun à (M) et à Q . Les théorèmes des n^{os} 23 et 17 fournissent les propriétés suivantes de la figure considérée ici :

Les tangentes en M' , M , M_1 , M_2 aux lignes $v = \text{const.}$ (ou $u = \text{const.}$) forment un quadruple hyperboloïdique et leur rapport anharmonique est égal à $\frac{k_2}{k_1}$.

25. Si la quadrique Q est une sphère de rayon $R\sqrt{-1}$, les surfaces (M) , (M_1) , (M_2) , (M') sont des surfaces pseudosphériques de courbure totale $-\frac{1}{R^2}$. Adoptant la notation de M. Bianchi (*), supposons que les surfaces (M_1) , (M_2) correspondent respectivement à la surface (M) dans des transformations B_{σ_1} , B_{σ_2} . Alors la surface (M') correspondra respectivement aux surfaces (M_1) , (M_2) dans des transformations B_{σ_2} , B_{σ_1} .

Soient P , P_1 , P_2 , P' les centres de courbures principaux des surfaces (M) , (M_1) , (M_2) , (M') qui correspondent aux lignes de courbure $v = \text{const.}$ Les réseaux (P_{uv}) , (P_{1uv}) , (P_{2uv}) , (P'_{uv}) sont Φ . Les réseaux (P_{1uv}) , (P_{2uv}) correspondent respectivement au réseau (P_{uv}) dans des transformations T_{m_1} , T_{m_2} ($m_1 = R \cos^2 \sigma_1$, $m_2 = R \cos^2 \sigma_2$) et au réseau (P'_{uv}) dans des transformations T_{m_2} , T_{m_1} . Par conséquent (n^o 17), les tangentes aux lignes (P_u) , (P'_u) , (P_{1u}) , (P_{2u}) , c'est-à-dire les

(*) *Lezioni di geometria differenziale*, vol. II, § 374.

normales aux surfaces (M), (M'), (M₁), (M₂), forment un quadruple hyperboloïdique et leur rapport anharmonique est égal à $\frac{\cos^2 \sigma_2}{\cos^2 \sigma_1}$.

On sait que les surfaces (P), (P₁), (P₂), (P') sont applicables sur la surface de vis à filet carré.

Si les surfaces applicables sur une quadrique et les surfaces applicables sur la surface de vis à filet carré admettent des théorèmes de permutabilité, c'est parce que ces surfaces sont Φ ; aussi croyons-nous que si l'on veut trouver d'autres surfaces dont les déformées admettent un théorème de permutabilité, il faudra les chercher parmi celles dont les déformées sont Φ .

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — Théorie nouvelle de la Gravifique,

par TH. DE DONDER, correspondant de la Classe,
et H. VANDERLINDEN, assistant à l'Observatoire royal de Belgique.

Dans la théorie gravifique actuellement admise, la force totale généralisée est toujours nulle; il en résulte des difficultés insurmontables dans la construction d'un système électromagnétique stable dépourvu de matière.

Dans notre exposé, la force généralisée sera *différente de zéro* et dérivera d'une fonction de force qui est intimement liée à la courbure totale de l'espace-temps. Notre méthode consiste à *déduire du principe d'Hamilton généralisé les équations différentielles de la gravifique*, en utilisant de *nouveaux potentiels* $\gamma^{\alpha\beta} \equiv g^{\alpha\beta} \sqrt{-g}$. Ces variables se sont présentées dans le calcul de la variation de la courbure totale effectuée par H. Vanderlinden (*), ce qui a amené Th. De Donder à modifier la définition des tenseurs symétriques, grâce à ces nouvelles variables.

(*) H. VANDERLINDEN, *Les équations du champ de gravitation d'Einstein*. (BULL. ACAD. ROY. BELGIQUE, pp. 43-52, 1920.)

Notre nouvelle théorie nous fournit les équations de la gravifique sous une forme plus simple que les anciennes; nous en déduisons la relation remarquable (21) entre le scalaire S et la fonction Γ qui régit l'espace-temps. Une nouvelle identité nous permet d'établir rapidement le théorème du tenseur asymétrique (23) ainsi que le théorème de la force généralisée qui s'exprime par les relations (30)

$$\mathcal{F}_i = \frac{d\Gamma}{dx_i}.$$

Nous appliquons ces résultats au champ électromagnétique pur, en utilisant la fonction L donnée successivement par (33) et par (61); on remarquera que cette méthode est *identique* à celle que Th. De Donder avait adoptée dans l'étude des champs matérialitiques purs (*). Nous en déduisons successivement deux nouvelles expressions (44) et (68) de la force généralisée; les résultats sont égaux, mais de signes contraires. Nous montrons aussi les rapports de la force généralisée avec le tenseur asymétrique classique et le tenseur complémentaire (45) qui résulte de notre théorie.

Qu'il nous soit permis d'adresser à M. Lecoinge, directeur de l'Observatoire royal de Belgique, nos vifs remerciements pour son intervention éclairée, sans laquelle ce travail n'aurait pu être écrit.

1. PRINCIPE D'HAMILTON GÉNÉRALISÉ. — L'espace-temps est défini par son δs^2 :

$$\delta s^2 \equiv \sum_{\alpha} \sum_{\beta} g_{\alpha\beta} \delta x_{\alpha} \delta x_{\beta}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4, \quad (1)$$

où les $g_{\alpha\beta} \equiv g_{\beta\alpha}$ représentent dix fonctions des coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 de l'espace-temps; ce sont les *potentiels gravi-*

(*) TH. DE DONDER, *La Gravifique* (deuxième communication). (BULL. ACAD. ROY. BELGIQUE, pp. 317-325, 1919.)

fiques d'Einstein. *L'invariant de courbure totale* de Riemann par rapport à la forme quadratique (1) sera désigné par C; il dépend des potentiels gravifiques et de leurs dérivées premières et secondes. *L'élément de volume* de l'espace-temps vaut

$$(-g)^{\frac{1}{2}} \delta x_1 \delta x_2 \delta x_3 \delta x_4, \quad (2)$$

où g représente le déterminant symétrique des $g_{\alpha\beta}$. En général, $(-g)$ sera positif; sa racine carrée positive est représentée par $(-g)^{\frac{1}{2}}$. Posons

$$l \equiv kC(-g)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

et

$$l^* \equiv (a + kC)(-g)^{\frac{1}{2}}, \quad (4)$$

où k et a représentent des constantes universelles.

Posons, en outre,

$$L \equiv \Lambda(-g)^{\frac{1}{2}}, \quad (5)$$

L étant une fonction qui dépend des potentiels gravifiques, de leurs dérivées et des variables qui définissent les champs électromagnétique et matériel, et qui représente *la différence entre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique* des champs considérés.

Posons

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta} &\equiv g_{\alpha\beta}(-g)^{-\frac{1}{2}}, \\ \gamma^{\alpha\beta} &\equiv g^{\alpha\beta}(-g)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Les $\gamma_{\alpha\beta}$ sont les *nouveaux* potentiels gravifiques.

En appelant γ le déterminant symétrique des $\gamma_{\alpha\beta}$, on voit que les $\gamma^{\alpha\beta}$ sont les mineurs algébriques des $\gamma_{\alpha\beta}$, divisés par γ .

De plus, entre les déterminants γ et g , on a la relation

$$\gamma = \frac{1}{g}. \quad (7)$$

Cela étant, le principe d'Hamilton généralisé consiste à admettre que, pour toute portion de l'espace-temps, on a

$$\delta \int (a + kC + \Lambda)(-g)^{\frac{1}{2}} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = 0. \quad (8)$$

La variation est prise *seulement* par rapport aux $\gamma^{\alpha\beta}$ et leurs dérivées à l'intérieur de la portion de l'espace-temps considérée; sur les frontières de cette portion, les variations sont nulles.

2. LES NOUVELLES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DE LA GRAVIFIQUE. — Grâce au calcul des variations, le principe d'Hamilton généralisé prend la forme équivalente

$$\diamond^{\alpha\beta} (l^* + L) = 0, \quad (9)$$

où

$$\diamond^{\alpha\beta} \equiv \frac{d}{d\gamma^{\alpha\beta}} - \sum_{\lambda} \frac{d}{dx_{\lambda}} \left(\frac{d}{d\gamma^{\alpha\beta, \lambda}} \right) + \sum_{\lambda\nu} \frac{d^2}{dx_{\lambda} dx_{\nu}} \left(\frac{d}{d\gamma^{\alpha\beta, \lambda\nu}} \right). \quad (10)$$

Les dix équations (9) sont les *équations différentielles de la gravifique*.

Posons

$$-(1 + \varepsilon_{\alpha\beta}) \diamond^{\alpha\beta} L \equiv S_{\alpha\beta} \equiv S_{\beta\alpha}, \quad (11)$$

où $\varepsilon_{\alpha\alpha} = 1$ et $\varepsilon_{\alpha\beta} = 0$ quand α est différent de β .

L'ensemble des fonctions $S_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$) s'appelle le *tenseur symétrique* des champs électromagnétique et matérielique considérés, par rapport aux variables $\gamma^{\alpha\beta}$.

Les équations différentielles de la gravifique (9) pourront s'écrire

$$(1 + \varepsilon_{\alpha\beta}) \diamond^{\alpha\beta} l^* = S_{\alpha\beta}. \quad (12)$$

Or, on a (*)

$$(1 + \varepsilon_{\alpha\beta}) \diamond^{\alpha\beta} l \equiv k G_{\alpha\beta}. \quad (13)$$

Mais, en vertu de (6) et de (7), on a

$$\begin{aligned} \diamond^{\alpha\beta} (-g)^{\frac{1}{2}} &\equiv \frac{d(-g)^{\frac{1}{2}}}{d\gamma^{\alpha\beta}} \equiv \frac{d(-\gamma)^{-\frac{1}{2}}}{d\gamma^{\alpha\beta}} \\ &= \left(1 + \frac{\varepsilon_{\alpha\beta}}{2} \right) (-\gamma)^{-\frac{1}{2}} \gamma_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (14)$$

(*) H. VANDERLINDEN, *Les équations du champ de gravitation d'Einstein*. (BULL. ACAD. ROY. BELGIQUE, 7 février 1920.) Voir équation (14).

En tenant compte de (4), (13), (14) et (6), il vient

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon_{\alpha\beta}) \diamond^{\alpha\beta} l^* &= kG_{\alpha\beta} + a(-\gamma)^{-\frac{1}{2}} \gamma_{\alpha\beta} \\ &= kG_{\alpha\beta} + ag_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (16)$$

D'où les équations de la gravifique deviennent (*)

$$\boxed{kG_{\alpha\beta} + ag_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}}. \quad (16)$$

Multiplions les deux membres de l'équation (16) par $\gamma^{\alpha\beta}$ et sommions par rapport à α et β ; il vient

$$2(l + 2a\sqrt{-g}) = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} S_{\alpha\beta} \gamma^{\alpha\beta}. \quad (17)$$

Posons

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\alpha} \gamma^{\alpha\beta} S_{\alpha i} &\equiv S_i^{\beta} \\ S_{\alpha\beta} &\equiv S_{\beta\alpha} \equiv \sum_{\gamma} \gamma_{\gamma\beta} S_{\alpha}^{\gamma} \equiv \sum_{\gamma} \gamma_{\gamma\alpha} S_{\beta}^{\gamma} \end{aligned} \right\}, \quad (18)$$

ou

et appelons S_i^{β} le tenseur asymétrique des champs électromagnétique et matérielitique.

En vertu de (17) et (18), on aura

$$S \equiv \sum_{\beta} S_{\beta}^{\beta} = 2(l + 2a\sqrt{-g}). \quad (19)$$

Posons

$$\Gamma \equiv (2a + kC)\sqrt{-g}; \quad (20)$$

d'où la relation (19) devient

$$\boxed{S = 2\Gamma}. \quad (21)$$

(*) Si nous supposons que la constante universelle a est nulle, nous retrouvons nos équations :

$$kG_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}.$$

3. IDENTITÉ FONDAMENTALE. — Récemment, nous avons trouvé l'identité suivante :

$$\sum_{\beta} \frac{d \sum_{\alpha} \gamma^{\alpha\beta} G_{\alpha i}}{dx_{\beta}} \equiv \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \gamma^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta, i}. \quad (22)$$

4. THÉORÈME DU TENSEUR ASYMÉTRIQUE. — Ce théorème s'exprime par les quatre équations suivantes :

$$\sum_{\beta} \left[\frac{dS_i^{\beta}}{dx_{\beta}} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\gamma} \gamma^{\alpha\beta} \gamma_{\gamma\beta, i} S_{\alpha}^{\gamma} \right] = \frac{d\Gamma}{dx_i}. \quad (23)$$

Démonstration. — Dans l'identité précédente (22), remplaçons $G_{\alpha i}$ et $G_{\alpha\beta, i}$ par leurs valeurs tirées des équations (16) et simplifions par k ; nous aurons

$$\sum_{\beta} \frac{d \left[\sum_{\alpha} \gamma^{\alpha\beta} (S_{\alpha i} - ag_{\alpha i}) \right]}{dx_{\beta}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \gamma^{\alpha\beta} [S_{\alpha\beta, i} - ag_{\alpha\beta, i}].$$

Mais, en vertu de

$$\sum_{\alpha} g_{\nu\alpha} g^{\alpha\beta} = \epsilon_{\nu\beta}$$

et de

$$\frac{d\sqrt{-g}}{dx_i} = \frac{\sqrt{-g}}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta, i},$$

l'égalité précédente s'écrira

$$\sum_{\beta} \frac{d \sum_{\alpha} \gamma^{\alpha\beta} S_{\alpha i}}{dx_{\beta}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \gamma^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta, i}. \quad (24)$$

D'où, en vertu de (18),

$$\sum_{\beta} \frac{dS_i^{\beta}}{dx_{\beta}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \gamma^{\alpha\beta} \sum_{\gamma} [\gamma_{\gamma\beta, i} S_{\alpha}^{\gamma} + \gamma_{\nu\beta} S_{\alpha, i}^{\nu}].$$

On en déduit immédiatement que

$$\sum_{\beta} \frac{dS_i^{\beta}}{dx_{\beta}} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \sum_{\nu} \gamma^{\alpha, \beta} \gamma_{\nu, \beta, i} S_{\alpha}^{\nu} = \frac{1}{2} \frac{dS}{dx_i}$$

et en vertu de (21), le second membre peut s'écrire

$$\frac{d\Gamma}{dx_i}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Étendons les symboles de Christoffel à nos nouveaux potentiels $\gamma_{\alpha\beta}$ et posons

$$[\begin{smallmatrix} \alpha & \nu & \beta \end{smallmatrix}] \equiv \frac{1}{2} (\gamma_{\alpha\nu, \beta} + \gamma_{\nu\beta, \alpha} + \gamma_{\alpha\beta, \nu}), \quad (25)$$

$$\{ \begin{smallmatrix} \alpha & \nu & \beta \end{smallmatrix} \} \equiv \sum_{\lambda} \gamma^{\lambda\nu} [\begin{smallmatrix} \alpha & \lambda & \beta \end{smallmatrix}]. \quad (26)$$

D'où les relations (23) peuvent encore s'écrire

$$\sum_{\beta} \left[\frac{dS_i^{\beta}}{dx_{\beta}} - \sum_{\alpha} \{ \begin{smallmatrix} i & \alpha & \beta \end{smallmatrix} \} S_{\alpha}^{\beta} \right] = \frac{d\Gamma}{dx_i}. \quad (27)$$

5. FORCE TOTALE GÉNÉRALISÉE. — Nous désignerons ainsi l'ensemble des quatre fonctions

$$\mathcal{F}_i \equiv \sum_{\beta} \left[\frac{dS_i^{\beta}}{dx_{\beta}} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\nu} \gamma^{\alpha, \beta} \gamma_{\nu, \beta, i} S_{\alpha}^{\nu} \right] \quad (28)$$

ou, autrement dit (27),

$$\mathcal{F}_i \equiv \sum_{\beta} \left[\frac{dS_i^{\beta}}{dx_{\beta}} - \sum_{\alpha} \{ \begin{smallmatrix} i & \alpha & \beta \end{smallmatrix} \} S_{\alpha}^{\beta} \right] \quad (29)$$

De cette définition, il résulte que la force généralisée vaut

$$\boxed{\mathcal{F}_i = \frac{d\Gamma}{dx_i}} \quad (30)$$

En général, la force généralisée ne sera donc pas nulle.

6. THÉORÈME DES TENSEURS GRAVIFIQUES. — Un tenseur gravifique est un ensemble de seize fonctions s_i^β satisfaisant aux équations

$$\sum_{\beta} \frac{ds_i^\beta}{dx_\beta} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} (1 + \varepsilon_{\alpha\beta}) \gamma^{\alpha\beta,i} \diamond^{\alpha\beta} l^*. \quad (31)$$

On aura

$$\sum_{\beta} \frac{d(s_i^\beta + S_i^\beta)}{dx_\beta} = \frac{d\Gamma}{dx_i}. \quad (32)$$

Démonstration. — En vertu de (11), le second membre de (31) peut s'écrire

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \gamma^{\alpha\beta,i} S_{\alpha\beta},$$

ou encore, en vertu de (18) et (19),

$$\frac{1}{2} \frac{dS}{dx_i} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \gamma^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta,i}.$$

En utilisant l'égalité (24), cette expression devient

$$\frac{1}{2} \frac{dS}{dx_i} - \sum_{\beta} \frac{d \sum_{\alpha} \gamma^{\alpha\beta} S_{\alpha i}}{dx_\beta}.$$

Reportons-nous à (21) et à la définition (18); d'où l'expression précédente s'écrit

$$\frac{d\Gamma}{dx_i} - \sum_{\beta} \frac{dS_i^\beta}{dx_\beta},$$

et, en substituant dans (31), on obtient les relations annoncées (32). C. Q. F. D.

7. CAS DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE PUR. — Nous entendons par là un champ dépourvu de matière proprement dite. La fonction Λ , qui caractérise un tel champ, est égale à la diffé-

rence entre l'énergie électrique (ou potentielle) et l'énergie magnétique (ou cinétique) du champ électromagnétique considéré.

Première manière. — Nous poserons donc (*)

$$L \equiv \left[\frac{1}{4} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} (-1)^{\alpha+\beta+1} M_{\alpha\beta} M_{\star}^{\alpha\beta} \right] U. \quad (33)$$

Le facteur (**)

$$U \equiv \sqrt{\sum_{\alpha} \sum_{\beta} \gamma_{\alpha\beta} w^{\alpha} w^{\beta}} \quad (34)$$

vaut toujours 1; en effet, les quatre composantes w^{α} ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) de la vitesse généralisée de l'électricité sont définies au moyen de la forme quadratique

$$d\sigma^2 \equiv \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \gamma_{\alpha\beta} dx_{\alpha} dx_{\beta} \quad (35)$$

et de

$$w^{\alpha} \equiv \frac{dx_{\alpha}}{d\sigma}; \quad (36)$$

on aura donc toujours

$$U \equiv \sqrt{\sum_{\alpha} \sum_{\beta} \gamma_{\alpha\beta} w^{\alpha} w^{\beta}} = 1. \quad (37)$$

Les composantes w^{α} sont des fonctions de x_1, x_2, x_3, x_4 ; il en résulte que $\delta w^{\alpha} = 0$.

En vertu de (11), on aura

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta} &= -(1 + \varepsilon_{\alpha\beta}) \frac{dL}{d\gamma^{\alpha\beta}} \\ &= -(1 + \varepsilon_{\alpha\beta}) \left(\frac{dE}{d\gamma^{\alpha\beta}} + \frac{dU}{d\gamma^{\alpha\beta}} \cdot E \right), \end{aligned} \quad (38)$$

en représentant par E le crochet qui figure dans (33).

(*) TH. DE DONDER, *Théorie du champ électromagnétique de Maxwell-Lorentz et du champ gravifique d'Einstein*. Paris, Gauthier-Villars, 1920. Voir pp. VII, 12 et 89.

(**) Un facteur analogue a été introduit par TH. DE DONDER dans l'*Étude du champ matérielique pur*. (BULL. ACAD. ROY. BELGIQUE, p. 318, 1919.)

Remarquons que la fonction E s'exprime au moyen des $\gamma^{\alpha\beta}$ de la même manière qu'au moyen des $g^{\alpha\beta}$; cela résulte immédiatement du mode de formation des dualistiques. Grâce à cette remarque et aux calculs que nous avons faits antérieurement (*), nous pouvons affirmer que

$$S_{\alpha}^{\beta} = T_{\alpha}^{\beta} + L w_{\alpha} w^{\beta}, \quad (39)$$

où T_{α}^{β} représente le tenseur asymétrique classique :

$$T_{\alpha}^{\beta} \equiv \frac{1}{2} \sum_{\nu} (-1)^{\nu+\beta} [M_{\alpha\nu} M_{*}^{\beta\nu} - M_{\alpha\nu}^{*} M^{\beta\nu}] \quad (40)$$

et où

$$w_{\alpha} \equiv \sum_{\beta} w^{\beta} \gamma_{\alpha\beta}. \quad (41)$$

On voit immédiatement (40) que

$$T \equiv \sum_{\alpha} T_{\alpha}^{\alpha} \equiv 0. \quad (42)$$

Donc (39), (37) et (41) nous fournissent l'égalité remarquable

$$\boxed{S = L} \quad (43)$$

La force généralisée pourra donc s'écrire aussi

$$\boxed{\mathcal{F}_i = \frac{1}{2} \frac{dL}{dx_i}} \quad (44)$$

Cette force généralisée n'est donc pas nulle, en général, dans un champ électromagnétique pur.

(*) Voir p. VIII du mémoire cité de TH. DE DONDER, 1920, et p. 318. (BULL. ACAD. ROY. BELGIQUE, 1919.)

Nous allons transformer l'expression (28) donnant la force généralisée $\mathcal{F}_i$. Pour cela, remplaçons S_α^β par sa valeur (39), que nous écrirons $T_\alpha^\beta + \bar{T}_\alpha^\beta$, en posant

$$\bar{T}_\alpha^\beta \equiv L w_\alpha w^\beta; \quad (45)$$

nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i = & \sum_\beta \left[\frac{dT_i^\beta}{dx_\beta} - \frac{1}{2} \sum_\alpha \sum_\gamma \gamma^{\alpha\beta} \gamma_{\gamma\beta,i} T_\alpha^\gamma \right] \\ & + \sum_\beta \left[\frac{d\bar{T}_i^\beta}{dx_\beta} - \frac{1}{2} \sum_\alpha \sum_\gamma \gamma^{\alpha\beta} \gamma_{\gamma\beta,i} \bar{T}_\alpha^\gamma \right]. \end{aligned} \quad (46)$$

En exprimant les $\gamma^{\alpha\beta}$ et les $\gamma_{\gamma\beta,i}$ en fonction des potentiels $g_{\alpha\beta}$ et en tenant compte de (42), on trouve aisément que la première somme qui figure dans la relation précédente peut s'écrire

$$\sum_\beta \left[\frac{dT_i^\beta}{dx_\beta} - \frac{1}{2} \sum_\alpha \sum_\gamma g^{\alpha\beta} g_{\gamma\beta,i} T_\alpha^\gamma \right]. \quad (47)$$

Or, cette expression est identique à l'expression suivante (*) :

$$\sum_\beta (-1)^\beta (M_*^\beta M_{\beta i} - M^\beta M_{\beta i}^*), \quad (48)$$

où l'on a posé :

$$M^\beta \equiv \sum_\alpha (-1)^\alpha \frac{dM^{\beta\alpha}}{dx_\alpha}, \quad (49)$$

$$M_*^\beta \equiv \sum_\alpha (-1)^\alpha \frac{dM_*^{\beta\alpha}}{dx_\alpha}. \quad (50)$$

Substituons (48) dans (46); on aura

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i = & \sum_\beta (-1)^\beta (M_*^\beta M_{\beta i} - M^\beta M_{\beta i}^*) \\ & + \sum_\beta \left[\frac{d\bar{T}_i^\beta}{dx_\beta} - \frac{1}{2} \sum_\alpha \sum_\gamma \gamma^{\alpha\beta} \gamma_{\gamma\beta,i} \bar{T}_\alpha^\gamma \right]. \end{aligned} \quad (51)$$

(*) Voir les identités (304) et (309) du mémoire cité de TH. DE DONDER, *Théorie du champ électromagnétique de Maxwell-Lorentz et du champ gravifique d'Einstein*.

Rappelons que les équations du champ électromagnétique peuvent se mettre sous la forme condensée (*)

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{D}\mathbf{I} = \mathbf{II}. \\ \mathbf{D}\mathbf{I}^* = 0 \end{array} \right. \quad (52)$$

$$\quad \quad \quad (53)$$

et sous la forme explicite (**)

$$\sum_{\alpha} (-1)^{\alpha} \frac{d\mathbf{M}^{\beta\alpha}}{dx_{\alpha}} = (-1)^{\beta} \rho w^{\beta} \quad (54)$$

$$\sum_{\alpha} (-1)^{\alpha} \frac{d\mathbf{M}_{*}^{\alpha\beta}}{dx_{\alpha}} = 0. \quad (55)$$

De (52) ou de (54), il résulte immédiatement que

$$\sum_{\beta} \frac{d(\rho w^{\beta})}{dx_{\beta}} = 0, \quad (56)$$

qui exprime l'équation de continuité du mouvement (dans l'espace-temps) de l'électricité.

Remarquons, en passant, que toute la théorie précédente subsisterait si l'on considérait des systèmes dans lesquels le premier membre de (55) serait différent de zéro ; de tels champs ont été considérés par M. Einstein (**).

Remarquons aussi que dans les champs électromagnétiques, considérés habituellement, le tenseur complémentaire $\bar{\mathbf{T}}_{\alpha}^{\beta}$, donné par (45), est *extrêmement petit* à cause de la petitesse de L et des vitesses (ordinaires) de l'électricité par rapport à celle de la lumière. On aura donc approximativement (51 et 55)

$$\mathcal{F}_i \sim \sum_{\beta} (-1)^{\beta+1} \mathbf{M}^{\beta} \mathbf{M}_{\beta i}^*, \quad (57)$$

(*) Voir les équations (15) et (16) du mémoire précédent.

(**) Le ρ n'a pas ici la même signification que le ρ qui figure dans les relations (21) du mémoire cité de TH. DE DONDER. Cela provient de ce que le symbole

$$\mathbf{v}_{\alpha} = w^{\alpha} \frac{ds}{dt} (-g)^{\frac{1}{2}}.$$

(***) Voir p. 4066 des *Sitzungsberichte d. Akademie d. Wissenschaften*. Berlin, novembre 1914.

ce qui peut s'écrire, en vertu de (49) et (54),

$$\mathcal{F}_i \sim -\rho \sum_{\beta} w^{\beta} \mathbf{M}_{\beta i}^* \quad (58)$$

ou, en se reportant à l'égalité (30), on aura

$$\frac{d\Gamma}{dx_i} \sim -\rho \sum_{\beta} w^{\beta} \mathbf{M}_{\beta i}^* \quad (59)$$

Multiplions ces équations respectivement par w^i et sommons par rapport à i ; nous obtenons

$$\sum_i \frac{d\Gamma}{dx_i} w^i \sim 0. \quad (60)$$

Il en résulte que dans ces champs électromagnétiques, la fonction Γ est très approximativement un invariant (*) dans le mouvement de l'électricité.

Deuxième manière. Si, au lieu d'adopter l'hypothèse (33), nous posons

$$\mathbf{U}' \equiv \left[\frac{1}{4} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} (-1)^{\alpha+\beta+1} \mathbf{M}_{\alpha\beta} \mathbf{M}_{*}^{\alpha\beta} \right] \mathbf{U}', \quad (61)$$

où

$$\mathbf{U}' \equiv \sqrt{\sum_{\alpha} \sum_{\beta} g_{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta}} = 1 \quad (62)$$

et (1)

$$u^{\alpha} = \frac{dx_{\alpha}}{ds}, \quad (63)$$

(*) Dans un travail récent (*Berliner Sitzungsberichte*, 1919, pp. 349-357), M. Einstein trouve que la courbure totale est un invariant du mouvement de l'électricité; mais il déduit ce résultat d'équations gravifiques qui ne satisfont plus au principe d'Hamilton. Remarquons que, par définition, la courbure totale utilisée par M. Einstein vaut deux fois la courbure totale que nous représentons par C.

la relation (38) deviendra

$$S'_{\alpha\beta} = -(1 + \varepsilon_{\alpha\beta}) \left(\frac{dE}{d\gamma^{\alpha\beta}} + \frac{dU'}{d\gamma^{\alpha\beta}} E \right), \quad (64)$$

où le symbole E conserve la même signification que dans la première manière. En effectuant les calculs, on trouve que

$$S'_{\alpha\beta} = L' \left[u_\alpha u_\beta (-\gamma)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} \right]. \quad (65)$$

Il en résulte que (18)

$$S'_\alpha{}^\beta = T_\alpha{}^\beta + L \left[u_\alpha u^\beta - \frac{\varepsilon_{\alpha\beta}}{2} \right]. \quad (66)$$

On en déduit immédiatement que

$$\boxed{S' = -L}. \quad (67)$$

La force généralisée pourra donc s'écrire

$$\boxed{\mathcal{F}_i = -\frac{1}{2} \frac{dL}{dx_i}}. \quad (68)$$

Nous pourrions répéter ici ce que nous avons trouvé dans la première manière (45 à 60). Il est bon de remarquer que la densité ρ' de l'électricité sera définie dans la deuxième manière par la relation (54) modifiée comme suit :

$$\sum_\alpha (-1)^\alpha \frac{dM^{\beta\alpha}}{dx_\alpha} = (-1)^\beta \rho' u^\beta. \quad (69)$$

Les applications seules nous permettront de fixer notre choix entre les deux hypothèses que nous venons d'étudier.

GÉOLOGIE. — Quelques réflexions au sujet de la discordance entre le Gedinnien et le Siluro-cambrien en Belgique,

par P. FOURMARIER, correspondant de la Classe.

Dans ces dernières années, on a beaucoup discuté, en Belgique, la question de savoir s'il faut tracer la limite inférieure du dévonien à la base de l'étage gedinnien, comme le faisait Dumont, ou bien s'il faut remonter cette limite de manière à la faire passer en plein Gedinnien, entre les schistes fossilifères de Mondrepuis et les schistes bigarrés d'Oignies, ou même à un niveau un peu plus élevé encore. Les protagonistes de cette dernière opinion s'appuient sur la ressemblance que présente la faune des schistes de Mondrepuis avec la faune silurienne.

La première interprétation met bien en relief la grande transgression qui a suivi le plissement calédonien; il existe, en effet, en Belgique une importante discordance de stratification entre le gedinnien et les terrains plus anciens.

La seconde opinion s'appuie uniquement sur les caractères paléontologiques; à première vue, elle paraît être la plus rationnelle, parce qu'elle part d'un principe plus général, à savoir que dans toutes les régions du globe, l'évolution générale des faunes s'est faite de la même manière, dans les grandes lignes tout au moins.

Il semble donc que la question soit simple et que cette dernière manière de voir doive s'imposer sans discussion, parce qu'elle correspond à une phase de l'évolution générale du globe et non pas à un fait relativement localisé comme une discordance de stratification.

Mais si l'on veut aller au fond des choses, le problème est en réalité plus complexe.

Dans le sud de la Belgique, la transgression gedinnienne s'est faite immédiatement avant le dépôt des couches à *Pterinea*

retroflexa; dans le Pas-de-Calais elle est plus ancienne, puisque les mêmes couches à *Pterinea retroflexa* reposent en concordance sur des roches calcaires à *Dayia navicula*; toutefois on ne connaît pas la base de ces dernières, parce qu'elles sont mises en contact avec le terrain houiller par la grande faille du Midi.

En Angleterre, dans le Shropshire, les couches à *Dayia navicula*, formant le Ludlow moyen, succèdent à leur tour en concordance de stratification au Ludlow inférieur à *Monograptus* et, pour trouver une discordance angulaire importante, il faut descendre beaucoup plus bas, jusqu'au Llandovery qui repose en couches peu inclinées sur les terrains plus anciens redressés et plissés.

En Belgique, les couches les plus élevées du Silurien du Condroz et du Brabant renferment *Monograptus colonus* et sont déterminées comme le Ludlow inférieur: on en a conclu que le plissement du Silurien belge, antérieur au Gedinnien, s'est fait à l'époque du Ludlow moyen, c'est-à-dire pendant le dépôt des couches à *Dayia navicula*, puisque la faune des schistes d'Oignies est celle du Ludlow supérieur d'Angleterre.

Si l'on ne mettait en regard que les séries du pays de Galles d'une part, de l'Ardenne d'autre part, relativement distantes l'une de l'autre, on pourrait expliquer, sans trop de difficulté, la position différente de la grande discordance.

On pourrait admettre, en effet, qu'un premier plissement s'est manifesté dans le pays de Galles antérieurement au Llandovery, plissement qui n'aurait pas fait sentir ses effets en Ardenne; plus tard, un autre plissement, postérieur au Ludlow inférieur, aurait pris naissance en Belgique, affectant tout le Siluro-cambrien, tandis qu'en Angleterre la sédimentation aurait été continue depuis le Llandovery jusqu'à l'Old Red Sandstone.

Dans cette manière de voir, il y aurait eu deux plissements différents, suivis chacun d'une période d'érosion, puis d'une

nouvelle période marine; les deux transgressions seraient ainsi indépendantes l'une de l'autre.

Il n'en est plus tout à fait ainsi lorsqu'on veut tenir compte de la succession observée à Liévin (Pas-de-Calais).

Il ne semble pas possible de supposer, en effet, que les efforts tectoniques qui ont plissé le Siluro-cambrien belge après le Ludlow inférieur ne se soient pas manifestés dans le Pas-de-Calais, en même temps qu'en Ardenne, et qu'il ait pu se déposer à Liévin une série parfaitement continue, tandis qu'un profond bouleversement se produisait à quelques kilomètres de là.

La coupe de Liévin ne nous permet donc pas de dire que le plissement calédonien s'est fait à l'époque de la *Dayia navicula*, mais antérieurement à celle-ci, c'est à-dire au plus tard entre le Ludlow inférieur et le Ludlow moyen. Encore ne savons-nous pas sur quoi reposaient, avant le charriage, les couches à *Dayia navicula* de Liévin; peut-être étaient-elles en concordance avec des couches plus anciennes encore.

D'autre part, la présence à Liévin des couches à *Dayia navicula*, en concordance avec des couches à *Pterinea retroflexa*, nous montre que la grande transgression s'est faite du Pas-de-Calais avec l'Ardenne; nous sommes donc en droit d'admettre qu'elle s'est propagée également du pays de Galles vers Liévin et de là vers l'Ardenne. De ce raisonnement se dégage une conséquence de la plus haute importance : on peut supposer, en effet, que la discordance observée en Angleterre sous le Llandovery est le résultat des mêmes mouvements tectoniques que celle observée en Ardenne sous les couches à *Pterinea retroflexa*.

Mais dans ce cas, les couches à faune du Ludlow inférieur sont situées sous la surface de discordance en Belgique, alors qu'elles sont au-dessus de cette surface en Angleterre.

Que l'on envisage la question d'une manière ou de l'autre, on se bute toujours à une anomalie; ou bien il faut supposer

l'existence en Belgique d'une part, dans le pays de Galles d'autre part, de deux discordances différentes, et par conséquent de deux périodes de plissement successives, indépendantes l'une de l'autre. Mais alors, Liévin avec son type intermédiaire devient difficilement explicable; ou bien il faut admettre l'existence d'un seul plissement et d'une seule discordance progressant de l'Ouest à l'Est, et dans ce cas, on s'étonne de trouver les mêmes fossiles, d'une part au-dessus, d'autre part au-dessous de la surface de discordance.

Ces anomalies tiennent sans doute à ce que nous ne pouvons pas reconstituer l'évolution de l'écorce terrestre, telle qu'elle fut réellement. Il est bien certain qu'une discordance de stratification, marquant une grande transgression, ne s'est pas produite simultanément en tous les points du globe où nous l'observons aujourd'hui. Mais ce serait aussi une erreur de croire qu'une même modification de la faune s'est faite partout à la même époque; des animaux, disparus en une région du globe, ont pu subsister longtemps encore en d'autres provinces zoologiques; les modifications dans le facies lithologique des sédiments ont été une cause importante pour la disparition ou l'apparition d'une faune; en faisant même abstraction de ce dernier facteur, il paraît évident que les races ne se sont pas éteintes partout à la fois. La concordance dans le temps est si difficile à préciser en géologie que l'on a imaginé le terme « homotaxique » pour remplacer le terme « synchronique ».

Ceci dit, rien ne prouve que les *Monograptus* ne se sont pas développés en Belgique avant d'avoir fait leur apparition en Angleterre; peut-être n'avaient-ils pas encore pénétré dans ce dernier pays lorsque le plissement antérieur au Llandovery s'est effectué; par contre, ne pouvons-nous pas supposer aussi que leur race n'était pas éteinte lorsque la mer est revenue postérieurement à ce plissement et que, la progression se poursuivant de l'Ouest à l'Est, il se soit déposé des roches à *Monograptus* au pays de Galles, alors que le territoire était encore continental en Belgique?

Ceci revient à dire que les couches à *Monograptus* (Ludlow inférieur) de Belgique ne sont pas contemporaines des couches renfermant la même faune dans le pays de Galles.

Cette façon de concevoir les choses permet d'expliquer les anomalies que j'ai signalées tout à l'heure. Cependant, on objectera que les graptolithes étaient des animaux planktoniques, qu'ils pouvaient ainsi se développer au même moment sur des étendues considérables et que, dans ces conditions, on doit admettre un synchronisme presque parfait entre les roches qui renferment la même espèce en Belgique et en Angleterre.

Cette observation conduit à envisager le problème sous un autre jour, à savoir que le plissement et l'érosion subséquente se sont fait sentir en Angleterre plus tôt qu'en Belgique; la marche du phénomène s'interpréterait alors comme suit : Après le dépôt de l'Ordovicien, les efforts orogéniques se sont manifestés dans le pays de Galles avec une intensité suffisante pour produire le plissement et l'émersion de la contrée, pendant que la sédimentation continuait à s'effectuer régulièrement en Belgique. Ces efforts ont gagné progressivement de l'Ouest vers l'Est, de telle manière qu'ils ne se sont manifestés dans notre pays qu'au moment où ils avaient pris fin depuis assez longtemps déjà au pays de Galles, au point que la mer avait déjà pu réenvahir la contrée et faire reposer, en discordance de stratification, les couches du Llandovery sur les couches plissées et érodées de l'Ordovicien. En d'autres termes, au moment où vivait le *Monograptus colonus* (Ludlow inférieur), les phénomènes successifs de plissement, d'érosion subséquente et de transgression consécutive étaient déjà terminés dans le pays de Galles, alors qu'ils n'avaient pas encore commencé en Belgique; c'est ce qui expliquerait que ce fossile se trouve d'une part au-dessus de la discordance, d'autre part au-dessous.

Cependant, si l'on prolonge vers l'Ouest la direction générale des plis du Siluro-cambrien belge, on atteint le pays de Galles; ces deux régions se trouvaient donc sur une même ride de l'écorce terrestre à l'époque du plissement calédonien.

On admettrait assez facilement que deux rides parallèles ne soient pas tout à fait synchroniques; on admettra plus difficilement qu'il puisse y avoir une différence sensible dans l'époque de formation d'une même ride. Et l'on voit ainsi qu'en prenant le problème d'une autre manière, on arrive encore à une curieuse anomalie.

Mais il est encore un autre point qui mérite d'attirer l'attention :

On admet que les couches à *Monograptus colonus* (Ludlow inférieur) sont les plus élevées du Silurien belge, et l'on est tout naturellement porté à supposer que ce sont les dernières formées avant le plissement prédévonien. En réalité, il n'en est peut-être pas ainsi.

J'ai montré que le Silurien du massif du Brabant, jusque dans ses couches les plus récentes, est affecté par un clivage schisteux très net, dont André Dumont avait déjà indiqué l'allure; j'ai essayé de prouver que ce clivage est la conséquence des mouvements orogéniques qui se sont produits en Belgique avant le dépôt du Dévonien. Or, nous savons et par les recherches expérimentales de M. le professeur Lohest et par l'observation du clivage dans la grande série concordante du Dévono-carbonifère belge, que ce clivage schisteux est un phénomène de profondeur; il ne prend naissance que dans les roches schisteuses qui, au moment du plissement, sont surmontées par une épaisseur suffisante d'autres roches. J'en ai conclu qu'au moment de leur plissement, les couches à *Monograptus colonus* du Silurien belge étaient recouvertes par une épaisseur assez considérable de sédiments que l'érosion a fait disparaître avant le dépôt du gedinien.

Quels pouvaient être ces sédiments? Ne comprenaient-ils pas le niveau à *Dayia navicula*? Voilà un nouveau point d'interrogation qui se pose lorsqu'on veut étudier à fond l'évolution de nos régions à la fin du Silurien et au début du Dévonien.

De ces considérations, il résulte qu'une question simple en

apparence est, en réalité, très complexe et qu'elle pose une série de problèmes dont nous n'entrevoions pas encore la solution précise. J'ai voulu, dans ce travail, attirer l'attention sur quelques-uns de ces problèmes. Il est possible qu'ils se posent aussi pour d'autres discordances de stratification de quelque importance.

EMBRYOLOGIE. — Note sur l'étude du développement du cristallin et des autres placodes chez des embryons monstrueux de *Rana fusca*,

par

le Dr GEORGES LEPLAT (1),
Assistant d'embryologie à la Faculté de médecine de Liège.

La différenciation du cristallin et les rapports qui relient son évolution à celle de la vésicule oculaire ont fait l'objet d'un grand nombre de travaux qui ne sont pas d'accord dans leurs conclusions. Les recherches diverses — transplantations, greffes, modifications chimiques du milieu où se développent les larves, études de monstres d'espèces différentes — ont montré la complexité de la question, chacune paraissant décisive en soi mais contredisant d'autres résultats acquis.

Normalement le cristallin se développe aux dépens de l'ectoderme sus jacent à la vésicule oculaire au moment où celle-ci, devenue secondaire, arrive en contact avec l'épithélium de revêtement de l'embryon. Ce développement continue en relation directe avec celui de l'œil, dont la lentille, s'isolant secondairement de sa couche originelle, forme bientôt un organe intrinsèque.

Une question qui préoccupa les embryologistes fut celle de

(1) Présenté par Ch. Julin.

savoir si les cellules ectodermiques, lentogéniques, étaient pré-déterminées ou si c'était l'action chimiotaxique de la vésicule oculaire qui provoquait la différenciation de cellules banales en une lentille.

Herbst, en 1901, avança cette opinion (Thigmomorphose), que Speman (1901-1903) essaya de démontrer expérimentalement. La conclusion fut plus tard contestée par Mencl (1903), King (1905), Stockard (1909-1910) et Speman lui-même (1907-1908). Celui-ci constata des différences spécifiques après avoir expérimenté sur trois espèces différentes d'Amphibiens. Mencl, Gemmil et Stockard constatant des cristallins chez des monstres dépourvus d'yeux ou d'un œil, admettaient la possibilité du développement d'un cristallin indépendamment de la vésicule oculaire. Fischel n'y voit pas une contradiction, du fait même que les embryons invoqués étaient monstrueux. King, par des destructions mécaniques, arrive cependant à la même conclusion.

Cependant Lewis (1904 et 1907), par une série d'expériences de greffes et de transplantations, démontre la formation du cristallin aux dépens de toute portion de l'ectoderme située en contact d'une vésicule oculaire, cet ectoderme fût-il même celui du dos ou du ventre : la thigmomorphose triomphe.

Mencl décrit alors un œil intracérébral dont le cristallin dérive de l'épithélium buccal.

Werber explique (1916) que les cristallins qui se sont formés chez les monstres téléostéens de Stockard, monstres anophtalmes, cyclopes ou monophtalmes, ne sont pas indépendants de toute action lentogénique de l'ébauche oculaire, celle-ci se trouvant dispersée dans le voisinage des cristallins à l'état de fragments blastolysés. Cette hypothèse est un appui encore à la théorie de Herbst et Speman, mais elle me paraît assez sujette à caution. Wachs (1914) ⁽¹⁾, avec Werber, voit toujours le

(1) Cité d'après Werber.

cristallin se former aux dépens de l'ectoderme sous l'action de la vésicule oculaire. L'enzyme lentogénique sécrétée par la vésicule oculaire agirait sur tout épithélium assez voisin pour en subir l'action. Elle agirait de même sur l'épithélium irien pour provoquer par celui-ci la régénération secondaire du cristallin qu'ont étudiée Muller, Fischel, Wolff, Brachet, Benoît et Wachs, mais ceci sort du cadre que je me suis tracé.

Malgré tous ces travaux, les faits apportés par Mencl, King et Stockard gardent leur valeur; les travaux de Stockard sont illustrés de dessins, de descriptions et de photographies très convaincants.

Néanmoins l'opinion la plus généralement admise est qu'il n'y a pas de cellules prédéterminées, mais que l'ectoderme banal se différencie en un cristallin s'il arrive en contact assez durable avec la vésicule oculaire ou une portion de celle-ci.

L'historique et la discussion de cette question ont été récemment fort bien traités par Werber (1918).

Ayant eu l'occasion d'observer des cas nombreux de têtards de grenouille cyclopes ou anophtalmes, non seulement je n'y ai jamais constaté de cristallin indépendant d'une vésicule oculaire, fait fréquent chez les téléostéens cyclopes ou anophtalmes de Gemmil et Stockard; mais encore j'ai vu de nombreux cas où, malgré un contact étroit entre l'ectoderme et une ébauche oculaire bien différenciée, il n'y avait aucune trace de cristallin.

Cette absence de réaction de l'ectoderme à l'action lentogénique de la vésicule oculaire est en contradiction nette avec la conclusion primordiale des travaux de Lewis et de Wachs, entre autres.

King et Stockard avaient déjà établi qu'un ectoderme lésé (injured) ne réagissait pas à l'action lentogénique; mais je crois que résoudre si simplement le problème ne respecterait pas tous les faits constatables dans mon matériel.

Celui-ci a été obtenu en faisant agir une substance toxique (chlorure lithique, chlorure potassique, alcool éthylique ou

hydrate de chloral) mise en solution dans l'eau de culture, pendant une période déterminée, pour rendre ensuite, graduellement, les embryons à leur milieu naturel, l'eau de fontaine.

Les premiers résultats de ces recherches ont paru récemment (G. Leplat, 1919). Mais dans ce travail je n'ai pas abordé la question du développement du cristallin et des ganglions des nerfs craniens dont j'ai depuis repris l'étude.

Le matériel d'études de Stockard est très voisin du mien, obtenu par un procédé que j'ai imité en l'adaptant à la grenouille. Et cependant il lui permet de conclure que chez les téléostéens :
» The crystalline lens may originate from ectoderm without
» any direct stimulus whatever from an optic vesicle or cup.
» The lens plate or lens-bud is capable of perfect self-differentiation.

» An optic vesicle or cup is invariably capable at some stage
» of its development of stimulating the formation of a lens
» from the ectoderm with which it comes in contact.

» The optic vesicle may stimulate a lens to form from
» regions of the ectoderm other than that which usually forms
» a lens.

» The ectoderm of the head region is more disposed to the
» formation of lenses than that of other parts of the body,
» since the free lenses invariably occur in this region. »
(P. 420, 1910.)

Fischel dénie aux faits observés chez les monstres toute valeur à opposer aux données de l'embryologie normale. Cependant, à mon avis, la tératologie étudie les déviations plus ou moins accentuées de l'évolution normale. D'ailleurs King (1905) n'a-t-il pas soutenu que chez la grenouille si l'ébauche oculaire est détruite dans la gouttière médullaire encore ouverte, un cristallin se développe alors même qu'aucune vésicule oculaire n'a pu être formée ?

Je reviens à mes têtards monstrueux, si différents, en ce qui concerne le cristallin, des poissons de Stockard, et ne les exa-

minant ici qu'à ce point de vue spécial, je renvoie à mon travail pour leur description détaillée.

Parmi les cyclopes — manifestant cette monstruosité à tous les degrés et à tous les stades ontogéniques — j'en trouve 19 %, où la dualité de l'œil est plus ou moins marquée, qui montrent des cristallins normaux; il y a contact entre l'ectoderme et l'ébauche oculaire.

60 % n'ont pas de cristallin, malgré un contact net entre l'ectoderme et la vésicule oculaire.

21 % de cyclopes très marqués n'ont pas de cristallin, mais l'œil unique est situé assez profondément pour n'être jamais arrivé en contact avec l'ectoderme. Jamais je n'ai vu de cristallin provenant de l'épithélium buccal sous-jacent. Tous les anophtalmes sont dépourvus de cristallin. Jamais je n'ai vu de cristallin indépendant des vésicules optiques en un endroit quelconque de la tête.

J'ai cru que l'angle formé par l'axe de la cupule optique avec la place de l'ectoderme avait une importance. Il n'en est rien.

Dans la majorité des cyclopes, 84 % n'ont pas de cristallin et jamais les anophtalmes n'en montrent. La théorie blastolytique de Werber n'est donc pas applicable ici; les deux tiers environ des cyclopes dépourvus de cristallin, soit 40 % du nombre total, ont cependant une dualité de l'œil bien marquée et arrivent en contact étroit avec l'ectoderme (Leplat, 1919, ph. IV et VI.) Par contre, des yeux pourvus de deux cristallins peuvent, encore qu'occupant toute la largeur de la tête aplatie, avoir une structure où la dualité est très discrète (Leplat 1919, ph. VII et VIII).

Il n'y a donc pas de rapport direct entre le degré de cyclopie et la présence ou l'absence de lentille.

En résumé, sur plus de 200 monstres, cyclopes et anophtalmes, j'en trouve un petit nombre seulement, une quinzaine, où les cristallins se sont différenciés, et ceci montre qu'aucune des conclusions de Stockard, non plus d'ailleurs que celles de

Herbst, Speman et Lewis, ne peut être appliquée aux têtards monstrueux que nous étudions ici.

Peut-être l'explication réside-t-elle dans une lésion de l'ectoderme due à l'action du toxique ; celui-ci a agi manifestement sur les cellules du feuillet ectoblastique avec une particulière rigueur, surtout sur les éléments constituant l'ébauche de la partie antérieure du système nerveux, Mais nous trouvons une objection sérieuse dans le fait que des têtards à monstruosité très marquée (donc où l'action toxique est manifeste) ont des cristallins.

J'avais été frappé déjà par l'aspect normal de l'ébauche auditive même chez les anophtalmes (G. Leplat, 1919, p. 285), et depuis j'ai repris l'étude de la différenciation des placodes et de la constitution des ganglions des nerfs craniens conjointement à celle du cristallin, qui est également une placode (Kupffer).

Si l'ectoderme lésé ne se différencie pas, même sous l'action d'une vésicule oculaire, au niveau de celle-ci, il était intéressant de voir si, en des points voisins, cette aptitude à former une placode était également supprimée.

On sait que le ganglion du trijumeau a une origine double ; il est constitué pour une grande part aux dépens de la placode ; sa portion antérieure, le ganglion ophtalmique, dérive même uniquement de l'épiblaste ; la crête ganglionnaire fournit le reste des matériaux du ganglion du trijumeau. L'apport de cette crête ganglionnaire aux différents ganglions des nerfs craniens va en croissant d'importance dans le sens cranio-caudal (Brachet 1907). La vésicule auditive se forme par une différenciation rapide et importante de la plaque auditive, ectoblastique, mais le ganglion acoustico-facial est mixte.

Chez mes têtards, alors que dans presque tous les cas où le cristallin manque le ganglion ophtalmique fait défaut et le ganglion du trijumeau est déficient, jamais, même chez les anophtalmes, la plaque ou la vésicule auditive avec son ganglion n'est mal développée.

Le rapport entre le degré de développement du cristallin et de la portion ectoblastique (placode) du trijumeau semble assez étroit. En opposition, le développement de l'ébauche ectoblastique acoustico-faciale semble indépendant du degré d'évolution de ces deux placodes.

Cependant, normalement, au point de vue chronologique, l'ébauche ectodermique acoustico-faciale apparaît à un moment au moins aussi précoce que celle du trijumeau.

Il me paraît qu'on ne peut donc pas considérer tout l'ectoderme céphalique comme lésé par la substance toxique, mais qu'il faut établir une différence entre la zone acoustico-faciale et celle qui lui est antérieure, la région du trijumeau étant intermédiaire.

Le fait est plus frappant encore chez les anophtalmes, où toute la portion antérieure du système nerveux central est agénésique, où jamais il n'y a de cristallin, ni de placode du trijumeau, ni de crête ganglionnaire à son niveau, mais où la placode acoustique se différencie toujours nettement.

Ces monstres sont dus à l'action toxique d'une substance qui a agi sur l'embryon dès avant le clivage gastruléen jusqu'au stade où la lèvre blastoporale ventrale est nettement marquée et où l'ectoderme est épaissi au niveau de l'équateur, du côté de la lèvre craniale antérieure du blastopore, en le repli cérébral transverse (G. Leplat, 1919, p. 255). Les cyclopes proviennent de cultures où l'action toxique a porté sur un stade un peu plus avancé. Tous les œufs ne sont pas à un stade minutieusement identique et les différences d'intensité dans l'action de la substance dissoute expliquent la variété des résultats et la gradation. Cette gradation dans le degré de monstruosité est précieuse en nous fournissant des états intermédiaires.

Cela dit, si nous nous reportons aux travaux de BRACHET (1902-1907 et 1914) sur le développement de la tête des Craniotes, nous y voyons établi que « les ébauches du cerveau et » du bulbe, avec celle du trijumeau, de l'acoustico-facial, du

» glosso-pharyngien et du pneumogastrique, occupent exclusivement la portion blastoporale du corps et l'occupent tout entière (1914, p. 507) ».

« L'étendue de l'ébauche des nerfs craniens, du trijumeau au vague, mesure exactement celle de la tête primordiale.

» Chez les Amphibiens, au moins, la partie qui dérive immédiatement de la gastrulation est la tête antérieure, avec le mésoblaste prémandibulaire et, au point de vue sensoriel, les organes olfactif et visuel. L'ensemble des processus par lesquels elle se forme correspond à « l'acrogenèse » de l'auteur.

» La fermeture du blastopore, consécutive à la gastrulation, est la première manifestation de la céphalogenèse ou formation de la tête primordiale, du V au X (1914, p. 508). »

Je rapproche de ces conclusions les faits que j'ai observés et je dois conclure que c'est l'acrogenèse qui a subi le plus de perturbations du fait de la substance toxique, parce que celle-ci a agi pendant que se faisait la gastrulation, pour être d'autant moins troublée que le sel agissait plus tard, au moment de la fermeture du blastopore. L'acrogenèse a été plus troublée que la céphalogenèse, la cormogenèse se faisant presque normalement.

De là l'absence de cristallin, correspondant à l'anomalie oculaire qui dérive de l'agénésie du télencéphale, alors que l'ébauche acoustico-faciale est bien développée. Le développement déficient ou l'absence du ganglion du trijumeau, qui occupe la portion antérieure et limite, en avant, la région qui dérive de la fermeture du blastopore, montre que cette fermeture n'a été troublée, relativement, que dans sa partie antérieure, craniale. La concrescence de ses lèvres ne s'est donc faite anormalement, dans ces cas, qu'au voisinage ou dans la portion formant les côtés de la lèvre craniale du blastopore.

Je n'ai pas parlé des ganglions du glosso-pharyngien et du vague qui, formés surtout d'éléments de la crête ganglionnaire,

sont au moins aussi bien développés que celui de l'acoustico-facial.

J'ai trouvé intéressant de montrer la concordance qui existe dans l'étude du développement normal et de l'évolution des embryons monstrueux — concordance qui rend plus intéressants ces derniers.

D'autre part, en partant de l'étude du cristallin et en l'étendant pour la faire sortir du cadre où l'avaient tenue les travaux que j'ai cités, en la coordonnant avec l'étude des autres placodes, nous devons y voir autre chose qu'une thigmomorphose.

Les recherches opératoires que j'ai rappelées gardent toute leur valeur, mais je pense qu'on ne peut les rapprocher qu'avec circonspection des recherches tératologiques de Mencl, Gemmil, Speman, Stockard et les miennes.

Les faits que j'ai observés et l'hypothèse à laquelle ils me conduisent restent d'ailleurs en contradiction avec la constatation que Stockard a faite de cristallins indépendants, mais démontrent qu'on n'est pas autorisé à généraliser les conclusions et que cette question est infiniment plus complexe qu'elle ne paraissait dès l'abord.

Bibliographie.

- Brachet (A.).** 1902. *Recherches sur l'ontogenèse des Amphibiens urodèles et anoures.* (ARCH. DE BIOL., t. XIX.)
1907. *Recherches sur l'ontogenèse de la tête des Amphibiens.* (ARCH. DE BIOL., t. XXIII.)
1914. *Recherches sur l'embryologie des reptiles.* (ARCH. DE BIOL., t. XXIX.)
- Fischel (A.).** 1902. *Weitere Mitteil. über die Regeneration der Linse.* (ARCH. F. ENTW. MECH., vol. XV.)
- Herbst (C.).** 1901. *Formative Reize in der thierischen Ontogenese.* Leipzig.
- King (H.-D.).** 1905. *Exp. Studies on the Eye of the Frog.* (ARCH. F. ENTW. MECH., vol. XIX.)
- Leplat (G.).** 1919. *Action du milieu sur le développement des larves d'Amphibiens. Localisation des ébauches oculaires...* (ARCH. DE BIOL., t. XXX.)

-
- Lewis (W.-H.).** 1904. *Exp. Studies on the Devel. of the Eye in Amphibia*, I. (AMER. JOURN. ANAT., vol. III.)
 1907. *Idem*, III. (AMER. JOURN. ANAT., vol. VI.)
- Menci (E.).** 1903. *Ein Fall von beideseitiger Linsenbildung...* (ARCH. F. ENTW. MECH., vol. XVI.)
- Speman (H.).** 1901. *Ueber Correlation in der Entw. des Auges. Verh. Anat. Ges.* (ANAT. ANZEIGER, vol. XIX.)
 1903. *Ueber Linsenbildung bei defekter Augenblase.* (ANAT. ANZ., vol. XXIII.)
 1907. *Neue Tatsachen zum Linsenproblem.* (ZOOLOG. ANZ., vol. XXXI.)
 1908. *Neue Versuche zur Entw. des Wirbeltierauges.* (VERH. D. ZOOLOG. GES. STUTTGART.)
- Stockard (C.-R.).** 1909. *The development of artificially produced cyclopean Fish.* (JOURN. EXPER. ZOOLOG., vol. VI.)
 1910. *The independant origin an development of the crystalline Lens.* (AMER. JOURN. OF ANAT., vol. X.)
- Werber (E.-I.).** 1918. *Critical Notes on the present Status of the lens Problem.* (BIOLOGICAL BULL., vol. XXXIV.)
 (Travail fait au Laboratoire de recherches d'anatomie, d'histologie et d'embryologie de la Faculté de médecine de Liège.)
-

ZOOLOGIE. — Sur la structure intime de l'astragale chez les primates,

par CHARLES FRAIPONT, professeur à l'Université de Liège (4).

J'ai l'honneur de communiquer à l'Académie les premiers résultats d'une étude que j'ai entreprise au moyen de la radiographie sur l'astragale des primates.

Cet os, qui, chez le marcheur parfait qu'est l'homme actuel, supporte tout le poids du corps par l'intermédiaire du tibia, le péroné jouant un rôle effacé, montre des travées nombreuses, serrées, presque rectilignes. Chez l'anthropoïde marcheur imparfait, externo-plantigrade, à premier métatarsien écarté et

(4) Présenté par M. Lohest.

dont le pied est normalement en flexion, les travées sont beaucoup plus rares, l'os est plus spongieux, les vacuoles abondent, les travées existantes présentent une direction en rapport avec la position du pied et celle de la poussée; elles s'anastomosent profondément; on a affaire encore au type d'astragale du grimpeur. Le rôle du péroné reste important.

Homo spyensis du Moustérien est déjà tout à fait un marcheur, mais sa démarche externo-plantigrade, son pied encore fléchi dans la marche et la station verticale imparfaite, l'écartement de son premier métatarsien donnent à la radiographie un ensemble de caractères de l'astragale qui le rapprochent du type anthropoïde.

Les travées sont moins nombreuses et moins serrées que chez l'homme actuel, mais bien plus nettes et moins rares, moins anastomosées aussi que chez l'anthropoïde. Leur direction indique nettement la position spéciale et bien connue du pied chez ce type humain. J'ai étudié à ce point de vue les restes de Spy, la Chapelle-aux-Saints, la Ferrassie et la Quina, grâce à l'obligeance de mes collègues et amis Lohest, Boule, Verneau et Henri Martin. L'homme quaternaire d'Aurignac, de Menton, de Cro-Magnon, plus récent qu'*homo spyensis* et bien plus humain que lui, si l'on me permet cette expression, présente encore à la radiographie de l'astragale des caractères primitifs très nets que je dois comparer à ceux que je trouverai peut-être dans des races primitives actuelles, comme les Veddass, par exemple.

L'homme de Grenelle est indiscutablement un Européen actuel; je ne puis donner de conclusions au sujet des astragales du fossile de Lahr, ces ossements étant par trop endommagés et mon étude n'étant pas terminée.

Je remercie les D^{rs} Louis Lejeune, de Liège, et Louis Delherm, de Paris, pour les admirables radiographies qu'ils ont bien voulu exécuter pour moi et que j'espère publier bientôt.

Cette courte note est une simple prise de date. J'ai cru inté-

ressant de signaler tout de suite à l'Académie les premiers résultats d'une étude qui me semble devoir apporter d'importants résultats au point de vue de la phylogénie des hominiens, peut-être et en tous cas relativement au passage de la station quadrupède à la station verticale.

ZOOLOGIE. — **Une mustellide quaternaire nouvelle
pour la Belgique,**

par CHARLES FRAIPONT ⁽¹⁾,
Professeur à l'Université de Liège.

Je pense que l'on a confondu souvent avec *Mustella martes* ou *foina*, un putois géant qui n'est pas très rare dans nos cavernes et auquel Newton a donné, en 1894, le nom de *Mustella robusta*. La taille seule de cette nouvelle Mustellide l'éloigne du putois et peut permettre de la confondre avec la martre. Elle a le palais plus large et plus profond; la première molaire plus courte antéro-postérieurement, le bulbe auditif moins prononcé que la martre et surtout il lui manque, comme au putois, la première prémolaire. Tous les caractères du crâne sont ceux d'un putois géant. Newton pense que la *Mustella robusta* pourrait bien être *Mustella antiqua* que figure Meyer sans la décrire ni la comparer au putois. C'est à Ightham, dans une fissure, qu'a été découvert l'exemplaire de Newton. On a signalé plusieurs fois des restes quaternaires d'un putois géant; Cornalia en signalait un de Lombardie en 1870; Woldrich, en 1880, en signalait un en Bohême; Boule et Chauvet en signalent un aussi de la Charente; enfin, Hensel donne des figures et des mensurations d'un crâne de putois actuel géant.

Sidney-H. Reynolds décrit et donne d'excellentes figures de

(1) Présenté par M. Lohest.

la *Mustella robusta* d'Ightham. J'ai pu identifier à cette espèce une série de crânes provenant des cavernes belges, non déterminés ou considérés comme appartenant à *Mustella martes* ou *foina*. J'en possède, par exemple, de la grotte de Modave appelée « trou all wess ».

Il ne me paraît pas nécessaire de créer une nouvelle espèce pour cette variété géante de putois. En effet, en examinant un matériel un peu nombreux, fossile et vivant, on voit comme un passage du type *putorius* au type *robusta*. Le type *putorius* décrit par Sidney-H. Reinolds mesure 58 millimètres du point alvéolaire à l'extrémité de la crête sagitale; sa *Mustella robusta* mesure 71^{mm}7.

Je trouve dans ma série : *Putorius*, 61,7-63,8-64,5-65,8-66,8-67,0, puis comme pouvant avec certitude être rapportés à son type *robusta*, 72,3-74,4.

La martre figurée par le même auteur nous donne une longueur de 91 millimètres; une martre moderne me donne 92,4; une martre fossile de Schmerling, 97,5; une fouine moderne, 92,4; deux fouines fossiles, 82,8 et 89,3. Il est souvent difficile de distinguer par les simples ossements la martre de la fouine, mais le pelage diffère et nous renseigne; comme nous ignorons en quoi le pelage de *Mustella robusta* pouvait différer de celui du putois, nous pensons qu'il suffit d'en faire une variété de ce type, variété intéressante parce que moins rare qu'on le pense dans notre quaternaire.

Note. — *Mustella vulgaris* var. *minuta* d'Ightham (Sidney-H. Reinolds) a été figurée par Schmerling, vol. II, pl. 1, fig. 4 et 5. Cet exemplaire provient de la caverne de Goffontaine. Schmerling la considère comme une petite espèce nouvelle du genre *Mustella*.

PHYSIOLOGIE. — **Étude des voies centrifuges du réflexe
oculo-cardiaque** ⁽¹⁾.

par PAUL DELAVA,
Assistant de physiologie à l'Université de Liège.

Dans une note parue un peu avant la guerre ⁽²⁾, sur les effets généraux de la compression oculaire, j'annonçais la publication ultérieure de graphiques pris lors de la même compression chez des chiens intoxiqués par le chlorure de baryum. Je rappellerai brièvement les faits qui m'avaient amené à employer le sel barytique.

Ashner attribuait au réflexe, découvert par lui, le pneumogastrique comme voie centrifuge. Plus tard, Lœper et Mougeot, ayant vu l'accélération du cœur se produire parfois en réponse à la compression oculaire, pensaient que, chez certains sujets, c'est le sympathique qui est excité dans ce cas par voie réflexe.

Au cours de mon étude expérimentale du phénomène chez le chien, j'avais observé qu'un animal vagotomisé présentait une légère accélération du pouls *lors de chaque compression oculaire*. Un autre, dont le réflexe oculo-cardiaque était normalement modérateur, montrait *un réflexe inverse* après l'injection d'atropine.

Enfin, j'avais constaté, *chez un même animal*, que tantôt le ralentissement et tantôt l'accélération du cœur se produisaient en réponse à la compression des yeux.

Il était intéressant — et Petzetakis ⁽³⁾, observant chez l'homme ce dernier fait, soulevait la question — de rechercher expérimentalement *si toute compression des yeux ne s'accompagne pas d'une excitation réflexe simultanée du vague et des accélérateurs*, la réponse cardiaque dépendant de l'état de ces

(1) Présenté par M. Léon Fredericq.

(2) *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), n° 4, pp. 196-220, 1914.

(3) *Comptes rendus de la Soc. de Biologie*, t. LXXVI, n° 9, p. 366, 1914.

nerfs ou du myocarde au moment de la compression, ou d'une sorte d'interférence de leur action. Pour résoudre ce problème, il fallait donc, chez des chiens à réflexe cardiaque modérateur (excitation du X), mettre en évidence des signes d'excitation *simultanée* des accélérateurs. Or, les nerfs accélérateurs n'ont pas seulement une action chronotrope positive. Leur excitation est capable de provoquer des *phénomènes extrasystoliques* en développant l'activité des centres d'excitation *hétérotopes* du cœur, surtout si l'on a, au préalable, *élevé l'excitabilité* de ceux-ci, au moyen d'injections de chlorure de baryum, par exemple. (Rothberger et Winterberg) ⁽¹⁾.

Le chlorure barytique peut donc nous servir de « réactif », nous permet de sensibiliser le myocarde vis-à-vis du sympathique et de déceler une excitation des accélérateurs, trop faible pour produire un effet dans les conditions physiologiques.

Ce raisonnement a reçu des résultats expérimentaux une pleine justification.

La localisation topographique des différents troubles cardiaques provoqués se fait aisément dans la méthode expérimentale employée (méthode de la suspension). Le cœur est mis à nu par l'ouverture du thorax et du péricarde (respiration artificielle). Les mouvements des oreillettes et des ventricules s'inscrivent, au moyen de tambours de Marey conjugués, sur l'enregistreur tournant à sa vitesse maxima. On peut ainsi mesurer fort exactement les intervalles séparant les inflexions des différentes courbes du graphique. Le chlorure de baryum, en solution aqueuse de 0.1 à 2 %, est injecté dans la veine crurale.

Les *doses faibles* (15 à 20 milligrammes) ne modifient pas par elles-mêmes le rythme cardiaque. La systole naît au niveau du sinus, se propage à l'oreillette, puis au ventricule après le même temps de conduction que normalement.

(1) *Pflüger's Archiv für Physiologie*, t. CXLII, 1911-1912, pp. 461 à 522, 20 fig.

Si l'on comprime les yeux de l'animal, on voit persister — exagéré même — le réflexe oculo-cardiaque modérateur, l'effet chronotrope négatif de l'excitation réflexe du vague.

Mais en même temps, on voit apparaître — ce que l'on n'observe jamais dans les conditions normales — des phénomènes extrasystoliques (voir les figures).

Tantôt, on voit, après une contraction normale, survenir brusquement une extracontraction *auriculaire* (voir fig. 1 et 3), restant isolée (fig. 1), ou suivie après un temps de conduction normal d'une contraction ventriculaire (fig. 3).

Tantôt, nous voyons une extrasystole complète se composant d'une contraction auriculaire et d'une contraction ventriculaire exactement simultanées, réalisant ainsi le type de l'extrasystole *nodale* (fig. 2).

Tantôt, enfin, nous voyons (fig. 2, 3 et 4) les *ventricules* donner une contraction anticipée. Elle peut rester isolée et ne pas réussir à lancer une incitation contractile rétrograde aux oreillettes (fig. 2). Elle peut aussi être suivie d'une contraction auriculaire après un intervalle VV-OO très légèrement supérieur à l'intervalle OO-VV normal, l'excitation hétérotope s'étant alors produite dans la région même des fibres unissantes (fig. 3). D'autres fois on verra l'extracontraction ventriculaire suivie d'une contraction des oreillettes, après un intervalle VV-OO notablement plus long que l'intervalle nomodrome OO-VV, l'ensemble représentant alors l'extrasystole antidrome typique d'origine ventriculaire (fig. 4).

Si l'intoxication par le Ba Cl_2 est poussée plus loin, (50 à 100 milligrammes), il s'établit *par la seule action du baryum* une dissociation du rythme cardiaque : les oreillettes battent régulièrement, tandis que les ventricules montrent un rythme propre plus rapide. C'est un automatisme ventriculaire hétérotope assez *rapide*. Il ne faut pas le confondre avec l'automatisme ventriculaire ordinaire du « block du cœur » qui a, au contraire, un rythme *plus lent* que celui des oreillettes. Il s'agit ici d'une

tachycardie ventriculaire extrasystolique, résultant de la mise en action par le baryum des nombreux centres hétérotopes d'excitation répartis dans la masse des ventricules (Rothberger et Winterberg).

Si, *dans ces conditions*, on exerce une compression oculaire, il se produit un accès de tachycardie ventriculaire *plus rapide encore*, c'est-à-dire le même effet qu'une excitation électrique des nerfs accélérateurs. En même temps les oreillettes se ralentissent, restant, elles, sensibles à l'excitation réflexe du vague ⁽¹⁾. Les nerfs accélérateurs ont, en effet, une action particulièrement efficace sur les centres ventriculaires d'excitations atypiques (Rothberger et Winterberg).

Léon Fredericq a d'ailleurs vu l'excitation électrique des accélérateurs influencer nettement les ventricules séparés des oreillettes par section du faisceau de His ⁽²⁾.

En résumé, mes expériences montrent que la compression oculaire a, chez le chien intoxiqué par le chlorure de baryum, le même effet que l'excitation des nerfs accélérateurs du cœur, alors que persiste l'action réflexe modératrice sur le rythme sinusal. Ces expériences semblent démontrer que l'excitation amenée aux centres par le trijumeau lors de la compression des globes oculaires se réfléchit *toujours* suivant plusieurs voies, notamment suivant les nerfs accélérateurs. Il y aurait toujours un réflexe « trijumeau-sympathique ». Il resterait latent, caché par le réflexe « trijumeau-pneumogastrique » dans la plupart des cas, à l'état physiologique (réflexe oculo-cardiaque modérateur). Les cas de réflexe oculo-cardiaque accélérateur, constant ou passager, s'expliqueraient par l'absence, constante ou momentanée, de l'excitation réflexe du vague, ou par son insuffisance. La réponse cardiaque — positive, négative ou nulle — serait donc toujours la « résultante » de deux actions opposées.

⁽¹⁾ Un graphique montrant ce résultat a été publié dans ma note parue en 1914. (*Loc. cit.*, p. 219.)

⁽²⁾ *Comptes rendus de la Soc. de Biologie*, t. LXXII, mai 1912, pp. 810-812, 1 fig.

Si par le Ba Cl_2 , on sensibilise le cœur vis-à-vis de l'action de l'accélérateur, on voit apparaître, à côté de l'action inhibitrice du pneumogastrique, une série de phénomènes, témoins de l'excitation réflexe simultanée du sympathique.

Institut de Physiologie, Liège.

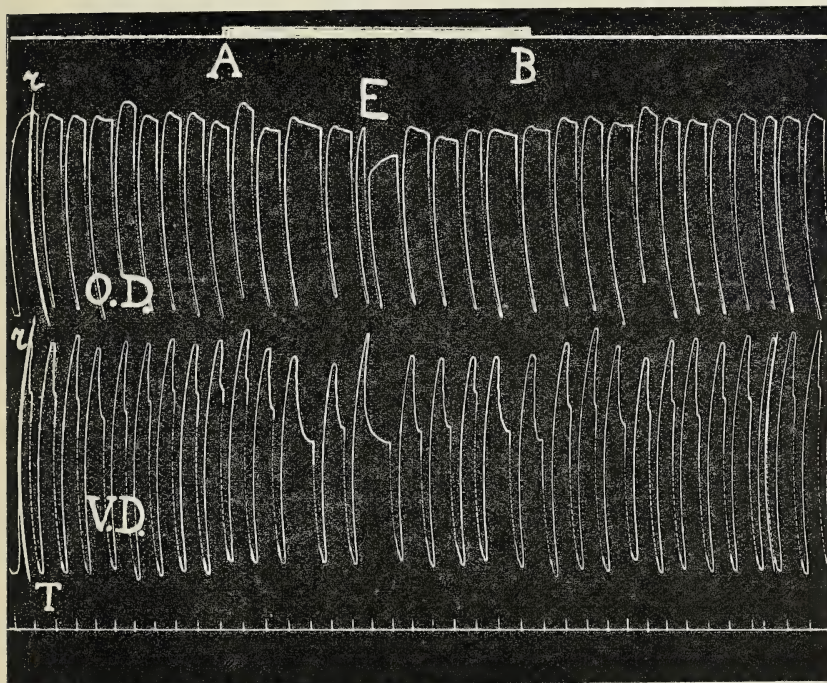


FIG. 1. — Chien ayant reçu en injection intraveineuse 20 milligrammes de chlorure de baryum.

Cœur à nu. Méthode de la suspension.

De A à B, compression oculaire inscrite à l'aide d'un signal électrique.

OD = oreillette droite. — VD = ventricule droit. — T = temps en secondes.

Le pouls est ralenti par la compression. Le rythme OD-VV est conservé.

En E apparaît une *extrasystole auriculaire* décalante (c'est-à-dire que la systole ordinaire suivante la suivra d'un espace de temps égal à la durée d'une révolution cardiaque complète).

Cette extrasystole auriculaire n'est pas suivie d'une contraction ventriculaire.

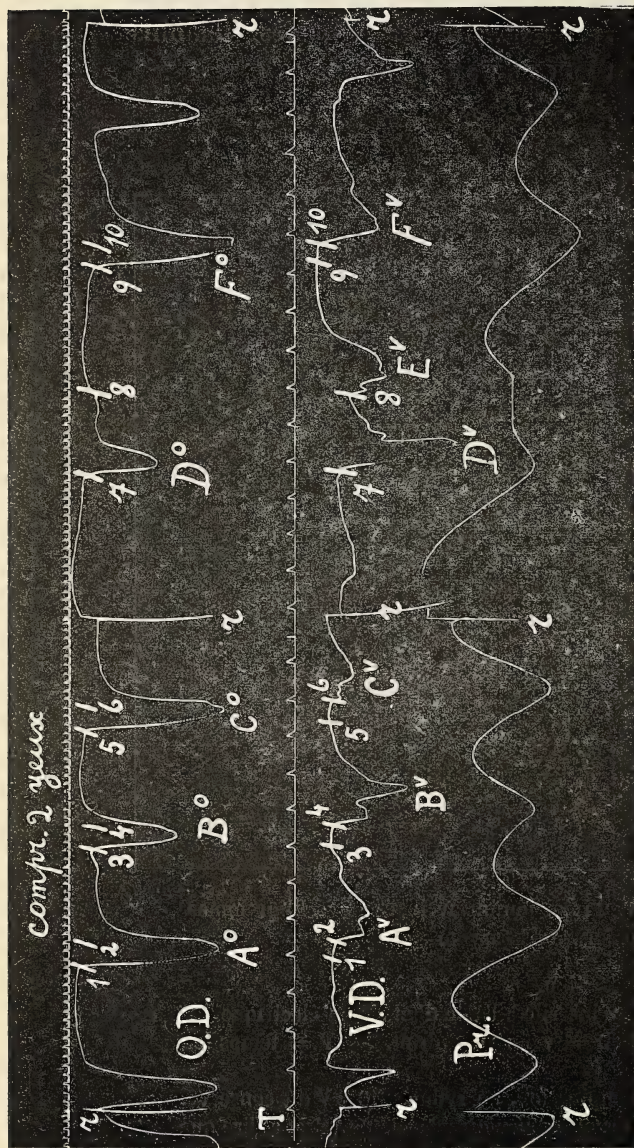


Fig. 2. — Chien ayant reçu une injection de 15 milligrammes de chlorure de baryum.

OD = oreillette. — VD = ventricule. — Pr. = pression sanguine. — r , r , r = repères pris en arrêtant un instant l'enregistreur. — T = temps en cinquièmes de seconde.

Le temps de conduction syst. O. O. — Syst. V. V. est normal et constant (environ 0,13 seconde).

Les index 1, 2, 3, 4, 5, etc., sont reportés sur la ligne des oreillettes et celle des ventricules, à la même distance à partir des repères r . Ils permettent de mesurer exactement les intervalles, le temps de conduction, etc., et d'apprécier les troubles extrasystoliques.

Le graphique entier est pris au cours d'une compression des deux yeux. Les systoles successives sont marquées d'une majuscule avec un exposant A°, B°, C° ... aux oreillettes, A°, B°, C°, aux ventricules.

Les systoles A, B et C sont normales, l'onde de contraction se propageant régulièrement.

Mais l'index n° 7 montre que les systoles D° et D° sont absolument simultanées. Elles constituent ensemble une extrasystole nodale.

Ensuite, les ventricules donnent une pulsation Ev qui n'a pas d'homologue aux oreillettes (voir index 8). Ev est une extrasystole ventriculaire sans réponse antidrome des oreillettes.

A la systole F°-F°, tout est redevenu normal.

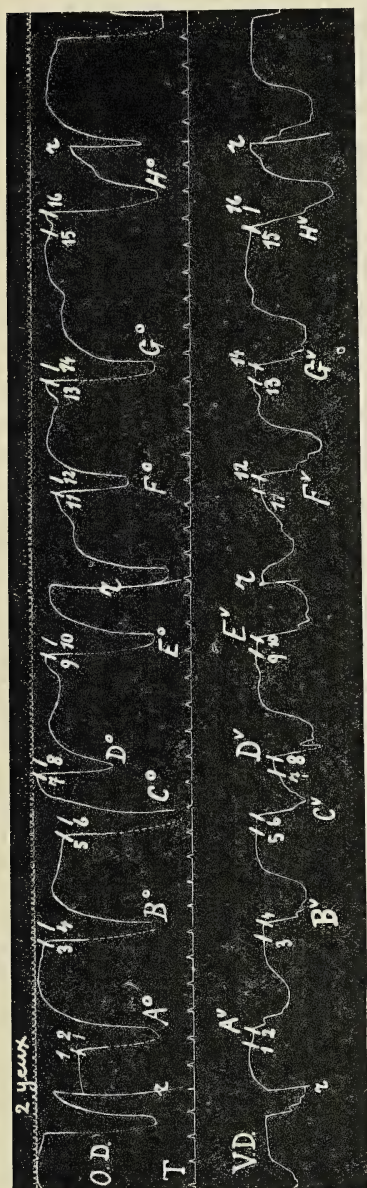


Fig. 3. — Chien ayant reçu une injection intraveineuse de 20 milligrammes de Ba Cl₂.

Le graphique entier est pris au cours d'une compression.

Même notation que pour la figure 2.

A, B et C = systoles normales.

D^o, survenant brusquement après C^o et suivie après un intervalle 00-VV normal d'une contraction ventriculaire

D^v, est une *extrasystole auriculaire avec réponse ventriculaire*.

E, F, G = systoles normales.

Mais H^v précède la contraction auriculaire correspondante H^o d'un temps légèrement supérieur à un intervalle

00-VV (voir les index 15 et 16). C'est du *ventricule* qu'est parti cette fois l'influx contractile. D'après les dimen-

sions de l'intervalle VV-00, il émane d'une région très voisine du faisceau de His ou de celui-ci même.

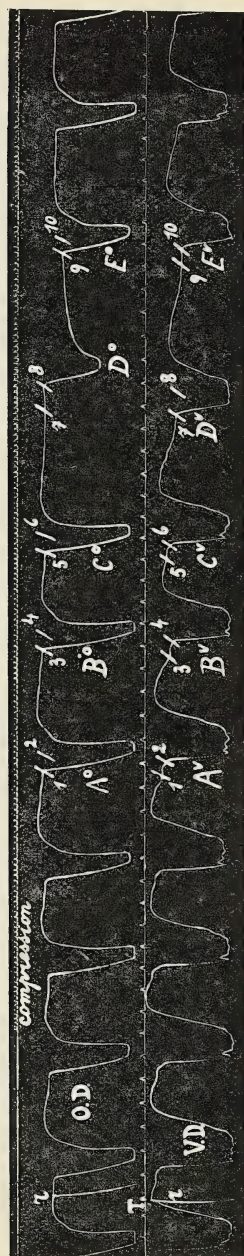


FIG. 4. — Chien ayant reçu 20 milligrammes de chlorure de baryum. Même notation que figures 2 et 3.

Pendant un certain temps après le début de la compression, le cœur, légèrement ralenti, donne des systoles normales A°-A', B°-B', C°-C', l'intervalle 00-VV étant normal (0,43 seconde).

Mais les oreillettes présentant après C° une longue pause, on voit les ventricules donner une contraction anticipée D°, en l'absence de toute contraction auriculaire.

Puis les oreillettes donnent une systole D° suivant la contraction ventriculaire D'v de 0,20 seconde. Ce long intervalle indique que D° est une réponse à un influx contractile *rétrograde*, venu des ventricules.

D'v et D° constituent ensemble une *extrasystole antidrome d'origine ventriculaire*.

La contraction suivante E°-E'v est une systole nomodrome à temps de conduction normal (0,13 seconde).

**Assemblée générale des trois Classes
du mardi 4 mai 1920.**

M. J. BRUNFAUT, président de l'Académie, directeur de la Classe des beaux-arts.

Prendent également place au Bureau : MM. Gravis, directeur de la Classe des sciences, Jules Lameere, directeur de la Classe des lettres, P. Bergmans, secrétaire de la Commission de la Biographie nationale, J. De Vriendt, président de la Commission du 150^e anniversaire de l'Académie, et le secrétaire perpétuel.

Sont présents :

CLASSE DES SCIENCES. — MM. A. Gilkinet, C. le Paige, J. Deruyts, Léon Fredericq, J. Neuberg, A. Lameere, Ch.-J. de la Vallée Poussin, Max Lohest, Fr. Swarts, Jean Massart, A. Demoulin, A. Rutot, A. de Hemptinne, Victor Willem, Paul Stroobant, Ch. Julin, J. Verschaffelt, G. Lecoïnte, Émile Marchal, Pierre Nolf, Jules Bordet, *membres*.

A. Brachet, Paul Fourmarier, Th. De Donder, O. Van der Stricht, *correspondants*.

CLASSE DES LETTRES ET DES SCIENCES MORALES ET POLITIQUES. — MM. P. Thomas, J. Leclercq, M. Wilmotte, H. Pirenne, M. Vauthier, A. Rolin, J. Vercoullie, G. De Greef, J.-P. Waltzing, E. Hubert, E. Mahaim, L. de la Vallée Poussin, L. Parmentier, R. P. Delehay, dom Ursmer Berlière, J. Bidez, G. Cornil, L. Dupriez, *membres*.

Jean Capart, J. Cuvelier, H. Carton de Wiart, L. Leclère, *correspondants*.

CLASSE DES BEAUX-ARTS. — MM. G. De Groot, J. Winders, E. Mathieu, L. Le Nain, F. Courtens, L. Frédéric, L. Solvay, G. Hulin de Loo, E. Claus, S. Dupuis, F. Khnopff, L. Du Bois, A. Baertsoen, A. Dumont, Adolphe Max, K. Mestdagh, *membres*.
Absence motivée : M. Wambach, correspondant.

Avant d'aborder l'ordre du jour, M. le Président rend compte d'un entretien qu'il a eu avec M. le Ministre des Sciences et des Arts, au sujet de la question de l'entrée des littérateurs à l'Académie, et donne lecture de la lettre suivante qu'il vient de recevoir à ce propos :

MONSIEUR LE PRÉSIDENT,

J'ai examiné à nouveau la question de la création d'une académie d'écrivains. La solution qui me paraît à préférer est la création, au sein de votre Compagnie, d'une classe des lettres ; l'actuelle Classe des lettres deviendrait la Classe des sciences morales et politiques. Vous avez bien voulu me dire que l'Académie repoussait cette solution ; je vous prie cependant de la consulter à nouveau sur ce point et de me faire savoir si son opposition est irréductible.

Croyez, je vous en prie, à mes sentiments distingués.

(s.) J. DESTRÉE.

A Monsieur le Président de l'Académie royale de Belgique.

La question n'étant pas à l'ordre du jour, M. le Président propose que, par déférence pour le désir exprimé par M. le Ministre, une assemblée générale extraordinaire soit réunie le 5 juin, afin d'examiner à nouveau la question sur laquelle l'Académie s'est déjà prononcée au mois de novembre.

M. Auguste Lameere est d'avis que la question ne doit pas être discutée à nouveau, tous les arguments dans les deux sens ayant été longuement développés.

M. Maurice Vauthier exprime un avis opposé, et M. Carton

de Wiart insiste pour qu'une réunion ultérieure examine à nouveau la question de créer une Classe nouvelle de littérature.

La proposition de réunir une assemblée extraordinaire étant appuyée par trente membres, celle-ci aura lieu.

M. Paul Bergmans fait rapport sur les travaux de la Commission de la Biographie nationale pendant l'année 1919-1920. Ce rapport est publié ci-après.

M. le Président le remercie.

M. J. De Vriendt fait rapport sur les travaux de la Commission et des sous-commissions du 150^e anniversaire de l'Académie. Ce rapport et les propositions qui y sont présentées sont adoptés.

PRÉROGATIVES DE L'ACADÉMIE.

M. le Président expose qu'à la suite d'une séance générale en 1919, l'Académie a transmis à M. le Président du Conseil des Ministres un rapport sur les prérogatives qu'elle revendique.

Le 25 octobre 1919, le Premier Ministre a répondu qu'il avait été vivement intéressé par ce document et qu'il l'avait transmis au Ministre des Sciences et des Arts, en y attirant son attention. D'autre part, S. M. le Roi a témoigné de l'intérêt qu'il prenait à la question en demandant à l'Académie communication de ce rapport.

Aucune suite n'a encore été donnée à la demande de l'Académie. M. le Président demande si celle-ci désire qu'un rappel soit adressé au Gouvernement.

M. Massart insiste sur le retard apporté à répondre. Il constate que par suite de l'arbitraire dans les nominations, les jeunes gens hésitent aujourd'hui à aborder les carrières scientifiques. Il demande qu'un rappel soit adressé au Premier Ministre.

M. Wilmotte fait remarquer que la situation présente rend plus difficile la solution de la question des revendications de l'Académie. Il suggère de limiter le nombre des prérogatives revendiquées par chaque Classe, en choisissant les plus importantes.

M. Swarts répond que c'est ce qui a été fait par les rédacteurs du rapport et il assure qu'on ne peut réduire davantage; il ajoute qu'il est nécessaire de donner des énumérations très précises afin de faciliter l'examen par le monde administratif.

M. Wilmotte est d'accord en principe sur la nécessité de la précision; mais il croit qu'il serait de bonne tactique de commencer par un plus petit nombre de revendications; puis il suggère à l'Académie d'imiter les procédés des corporations professionnelles pour faire réussir leurs revendications.

D'accord avec le Bureau, l'Assemblée décide que son Président fera une démarche pour rappeler au Gouvernement *toutes* les revendications de l'Académie.

TRANSFORMATION DE L'UNIVERSITÉ DE GAND EN UNIVERSITÉ DE LANGUE FLAMANDE.

M. De Vriendt rappelle le manque de contact entre les classes dirigeantes et les classes populaires du pays flamand. Il en voit la cause dans le fait que les classes supérieures parlent une autre

langue que le peuple. Cette situation perdurera tant que l'enseignement à tous les degrés ne sera pas donné dans la langue populaire.

M. Léon Fredericq déclare d'abord qu'il faut se placer au point de vue spécial à l'ordre du jour. Il rappelle le cas des anciennes universités, où l'enseignement se donnait en latin, sans que cet usage soulevât de protestations : le latin n'était pas une langue populaire cependant. Il se prononce, quoique Flamand, contre la transformation de l'Université de Gand, parce que cette transformation équivaldrait à sa suppression.

M. De Vriendt trouve qu'il serait suffisant qu'on laissât trois universités de langue française auprès d'une de langue flamande. Une cinquième université nouvelle, de langue flamande, ne sera pas accordée. (*Protestations.*)

M. Waltzing proteste contre la légende de l'abîme entre les deux classes, causé par l'enseignement en français à l'Université de Gand. Il fait remarquer que si cet abîme existe réellement en pays flamand, il existe au même degré en pays wallon, où la même langue est commune aux deux classes.

M. Léon Fredericq insiste sur l'opportunité de la création d'une cinquième université, de langue flamande, qui aurait des chances de succès, si les flamingants la veulent réellement. Il assure que l'abîme n'est plus aussi grand en pays flamand que dans son jeune temps.

M. Van der Stricht constate que tous les étudiants de l'Université de Gand sont instruits et parlent également le français et le flamand ; il assure d'autre part que les études supérieures ne peuvent être utilement suivies que dans une langue universelle.

M. Hulin rappelle « l'abîme » évoqué tantôt et a pu, par expérience personnelle, étant bourgmestre d'un village en pays flamand, constater le désir du peuple flamand d'apprendre le français ; il est navré de voir qu'on a, par des lois scolaires, rendu plus difficile en Flandre l'étude de la langue française.

M. De Vriendt insiste sur le fait qu'une cinquième université, de langue flamande, ne pourra être accordée.

M. Dumont confirme ce que vient de dire M. Hulin et assure que là où une séparation plus grande entre la classe dirigeante et la classe populaire est due à la langue, cela provient de mesures flamingantes qui proscrivent la langue française des écoles du pays flamand.

La discussion étant close, la résolution suivante est votée à l'unanimité moins trois voix :

« L'Académie royale de Belgique, dans sa séance générale des trois classes, du 4 mai 1920, déclare qu'il serait contraire à l'intérêt scientifique du pays de transformer l'Université actuelle de Gand en université de langue flamande.

» Elle prie instamment la Chambre des Représentants de repousser le projet de loi qui lui est présenté dans le but d'opérer cette transformation. »

Communication en sera donnée à la Chambre des Représentants et à M. le Ministre des Sciences et des Arts.

La séance est levée à 3 ¹/₂ heures.

**Rapport sur les travaux de la Commission
de la Biographie nationale pendant l'année 1919-1920,**

par PAUL BERGMANS,
Secrétaire de la Commission
et membre de la Classe des beaux-arts.

MESSIEURS,

Quand j'ai eu l'honneur, l'an dernier, de vous faire rapport sur les travaux de la Commission de la *Biographie nationale*, celle-ci n'était pas encore entièrement reconstituée. Le 7 mai 1919, la Classe des beaux-arts m'a choisi pour remplacer feu M. Rooses, et, le 3 janvier 1920, la Classe des sciences a désigné M. Massart comme successeur de M. Mansion. Les mandats de tous les membres ont ensuite été renouvelés dans les séances de Classes de janvier 1920 pour une nouvelle période sexennale.

La Commission, placée sous la présidence de M. Pirenne, a élu vice-président M. C. le Paige et secrétaire M. P. Bergmans, et elle a désigné pour faire partie du Comité chargé des affaires courantes, outre les membres du bureau, dom Berlière, MM. Léon Fredericq, Hulin de Loo et J. Vercoullie. MM. Pirenne, Léon Fredericq et Hulin de Loo veulent bien continuer à assumer la tâche à la fois lourde et délicate d'examiner les notices en manuscrit, puis en épreuves, comme membres du Comité de revision.

A peine reconstituée, la Commission a déjà subi une perte cruelle : notre collègue M. Paul Fredericq nous a été enlevé le 30 mars dernier. Ses mérites scientifiques vous sont connus, ainsi que ses qualités morales, et tous nous l'aimions autant que nous l'estimions. Il siégeait dans notre Commission depuis 1913 et nous apportait l'appui de ses conseils excellents ainsi qu'une collaboration particulièrement autorisée pour les personnages

du XVI^e siècle, époque à l'étude de laquelle il s'était voué ⁽¹⁾.

La mort a frappé également dans les rangs de nos collaborateurs et nous a privés de concours précieux, dont nous tenons à rappeler le souvenir en mentionnant ici les noms du baron Joseph de Béthune, bibliothécaire-archiviste de la ville de Courtrai ⁽²⁾, qui mettait à notre disposition ses connaissances étendues des personnages du Courtrais, de M. Louis Cloquet, professeur d'architecture à l'Université de Gand, archéologue averti, particulièrement compétent pour les architectes et les artistes médiévaux du Tournaisis ⁽³⁾, et de M. Léon Naveau de Marteau, le très distingué bibliophile liégeois ⁽⁴⁾.

A la suite d'une revision de la liste des collaborateurs, la Commission a décidé d'y rayer les noms de ceux qui, pendant l'occupation allemande, ont servi les desseins de l'ennemi et collaboré à quelque degré que ce soit à ses tentatives de division de la patrie. Les notices que certains d'entre eux avaient fournies ne seront pas imprimées et seront attribuées à d'autres biographes. D'autre part, la Commission a admis une série de collaborateurs nouveaux. Une liste complète des collaborateurs actuels est annexée à ce rapport.

La Commission a eu également à s'occuper de l'attribution de diverses notices ainsi que de la revision du contrat pour l'impression de la *Biographie nationale*; le projet est soumis à l'approbation ministérielle.

(1) Voici la liste des notices fournies par M. P. Fredericq à notre recueil : Fr. de la Kethulle; L. de la Kethulle; Ramihrdus; Aart van Schelven et J.-M. Schrant.

(2) Il a donné à notre recueil les notices suivantes : Ch., H. et N. Mussely; Ch. de Patin; J. et R. Persyn; A. Pevernage; J. Pluckx; Jean et Raphael Pollet; Louis de Potter; Ferd. van de Putte; L. Pycke; G. Quackelbeen; Jos. de Rho; L. Ribaltius; E. Ronse; Georges Roose; L. Rosseeuw; J. Ruweel et Denis de Schinkel.

(3) Voici la liste de ses notices : L.-F. Roelandt; Waultre de Saint Hubert; J. Sandres; J. Saumon et V. Sauvage.

(4) Nous lui devons les notices suivantes : C. Renesse; R. Rouvroy; E. Rye; J.-M. de Sarolea; Alexandre, Gilbert et Jean de Seraing.

Malgré les difficultés considérables et de tout genre qu'entraînent actuellement les travaux d'imprimerie, nous nous sommes efforcés de poursuivre notre publication et nous avons imprimé cinq feuilles (*Siger-Sleidan*) du second fascicule du tome XXII, qui sera vraisemblablement achevé cette année.

Nous renouvelons ici l'appel que nous avons adressé à nos collaborateurs pour nous remettre le plus tôt possible les notices de la lettre S qu'ils doivent encore nous fournir afin de compléter cette série, et pour s'occuper aussi des notices de la lettre T dont une partie est déjà en manuscrit. La liste provisoire de la lettre V vient d'être remise à l'imprimeur.

Liste des collaborateurs de la « Biographie nationale ».

(Mai 1920.)

- MM. *Alvin (Frédéric)*, conservateur à la Bibliothèque royale, à Bruxelles.
Apers (René), sous-bibliothécaire à l'Université de Gand.
Bacha (Eugène), conservateur à la Bibliothèque royale, à Bruxelles.
Bastelaer (René van), conservateur à la Bibliothèque royale, à Bruxelles.
Bautier (Pierre), conservateur-adjoint du Musée des beaux-arts, à Bruxelles.
Beaujean (C.), directeur du Service de la Caisse générale d'épargne et de retraite, à Bruxelles.
Beeckman (Ed.), avocat, à Bruxelles.
Bergmans (Paul), membre de l'Académie royale, à Gand.
Berlière (dom Ursmer), membre de l'Académie royale, à Maredsous.
Berten (D.), président honoraire à la Cour d'appel, à Gand.
Bigwood (Georges), professeur à l'Université de Bruxelles, à Bruxelles.
Blomme (Arthur), président honoraire du Tribunal de Termonde, à Bruxelles.
Blyau (Albert), professeur à l'Athénée de Tirlemont.

- MM.** *Borman (baron Camille de)*, membre de la Commission royale d'histoire, à Schalkhoven.
- Bosmans (le Père Henri)*, professeur au Collège Saint-Michel, à Bruxelles.
- Brassine (Joseph)*, bibliothécaire en chef et professeur à l'Université de Liège.
- Brouwers (D.-D.)*, conservateur des Archives de l'État, à Namur.
- Brunin (Georges)*, conservateur du Cabinet des médailles, à Gand.
- Buffin (baron)*, avocat, à Bruxelles.
- Buschmann (Paul)*, publiciste, à Anvers.
- Callewaert (chanoine C.)*, président du Séminaire, à Bruges.
- Capart (Jean)*, correspondant de l'Académie royale, à Bruxelles.
- Casier (Joseph)*, président de la Commission des monuments de la ville de Gand.
- Cauchie (chanoine Alfred)*, membre de l'Académie et directeur de l'Institut historique belge, à Rome.
- Caullet (Gustave)*, libraire-antiquaire, à Bruxelles.
- Ceuleneer (Adolphe de)*, membre de l'Académie royale flamande, à Gand.
- Closon (Jules)*, professeur à l'Université de Liège.
- Closson (Ernest)*, conservateur du Musée instrumental du Conservatoire, à Bruxelles.
- Coninckx (Hyacinthe)*, professeur à l'Académie des beaux-arts, à Malines.
- Coppieters Stochove (Ernest)*, à Bruges.
- Coppieters Stochove (Hubert)*, docteur en philosophie et lettres, à Bruges.
- Cornil (Georges)*, membre de l'Académie royale, à Bruxelles.
- Counson (Albert)*, professeur à l'Université de Gand.
- Courtoy (Ferd.)*, conservateur-adjoint des Archives de l'État, à Namur.
- Crooy (abbé Fernand)*, professeur, à Bruxelles.
- Cuvelier (Joseph)*, correspondant de l'Académie royale, à Bruxelles.
- Dam (Dr Charles)*, à Bruxelles.
- Daniels (abbé Polydore)*, à Hasselt.
- Defrecheux (Charles)*, bibliothécaire de la ville de Liège.
- Defrecheux (Joseph)*, sous-bibliothécaire de l'Université de Liège.

- MM. *Delannoy (Charles)*, professeur à l'Université de Gand.
Delannoy (abbé Fl.), professeur à l'Institut Saint-Louis, à Bruxelles.
Delehaye (le Père Hippolyte), membre de l'Académie royale, à Bruxelles.
Delen (Ary), conservateur-adjoint du Musée Plantin, à Anvers.
Desemblanx (Charles), relieur, à Bruxelles.
Desmarez (Guillaume), correspondant de l'Académie royale, à Bruxelles.
Destrée (Joseph), conservateur aux Musées royaux des arts décoratifs et industriels, à Bruxelles.
Devigne (M^{lle} M.), attachée au Musée des beaux-arts de Bruxelles, à Woluwe.
Donnet (Fernand), administrateur de l'Académie royale des beaux-arts, à Anvers.
Dony (Émile), préfet de l'Athénée royal de Tournai.
Doorslaer (Dr Gustave van), musicologue, à Malines.
Doutrepont (Auguste), professeur à l'Université de Liège.
Doutrepont (Georges), correspondant de l'Académie royale, à Louvain.
Dupriez (Léon), membre de l'Académie royale, à Louvain.
Duyse (Daniel van), membre de l'Académie royale de Médecine, à Gand.
Essen (Léo vander), professeur à l'Université de Louvain.
Eyerman (Jules), avocat, à Termonde.
Fairon (Émile), archiviste de l'État, à Liège.
Fayen (Arnold), bibliothécaire au Ministère des Affaires Étrangères, à Bruxelles.
Feller (Jules), à Verviers.
Fierens-Gevaert (H.), professeur à l'Université de Liège, conservateur en chef du Musée des beaux-arts, à Bruxelles.
Francotte (X.), professeur à l'Université de Liège.
Fredericq (Léon), membre de l'Académie royale, à Liège.
Freson (Armand), avocat, à Liège.
Fris Victor), archiviste de la ville et chargé de cours à l'Université de Gand.

- MM. *Ganshof (François)*, candidat en philosophie et lettres, à Gand.
Gheyn (chanoine Gabriel van den), secrétaire du Comité provincial des monuments, à Gand.
Gilkinet (Alfred), membre de l'Académie royale, à Liège.
Goblet d'Alviella (comte E.), membre de l'Académie royale, à Bruxelles.
Goemans (Léon), inspecteur général de l'enseignement moyen, à Louvain.
Goetschalckx (P.-J.), curé, à Eeckeren-Donck.
Goffin (Léon), bibliothécaire de l'Université de Gand.
Goffin (Th.), conservateur à la Bibliothèque royale, à Bruxelles.
Goyens (le Père J.), archiviste provincial des Frères mineurs, à Bruxelles.
Grojean (Oscar), conservateur à la Bibliothèque royale, à Bruxelles.
Halkin (Léon), professeur à l'Université de Liège.
Hansay (Alfred), conservateur des Archives de l'État, à Hasselt.
Haute (Charles vanden), conservateur-adjoint des Archives de l'État, à Gand.
Heger (Paul), professeur à l'Université de Bruxelles.
Hennen (G.), attaché aux Archives de l'État, à Liège.
Henry (Paul), professeur à l'Université de Louvain.
Hocquet (Adolphe), archiviste-bibliothécaire de la ville de Tournai.
Holvoet (Paul), président de la Cour de cassation, à Bruxelles.
Houtart (Maurice), avocat, à Tournai.
Houtte (Hubert van), professeur à l'Université de Gand.
Hubert (Eugène), membre de l'Académie royale, à Liège.
Huisman (Michel), professeur à l'Université de Bruxelles.
Hulin de Loo (Georges), membre de l'Académie royale, à Gand.
Hymans (Paul), correspondant de l'Académie royale, à Bruxelles.
Iseghem (Charles van), à Ostende.
Jacques (Dr Victor), professeur à l'Université, à Bruxelles.
Jordens (Ernest), avocat, à Bruxelles.
Jorissenne (Dr G.), à Liège.
Kalken (Frans van), professeur à l'Université de Bruxelles.

- MM.** *Kervyn de Lettenhove (baron Henri)*, à Bruges.
Keyser (Dr Léon de), à Bruxelles.
Laenen (chanoine), archiviste de l'Archevêché de Malines.
La Hays (Léon), conservateur des Archives de l'État, à Liège.
Laloire (Edmond), archiviste aux Archives générales du Royaume, à Bruxelles.
Lambotte (Paul), directeur des Beaux-Arts, à Bruxelles.
Lameere (Jules), membre de l'Académie royale, à Bruxelles.
Lamy (chanoine Hugues), prélat de Tongerlo.
Laurent (Marcel), chargé de cours à l'Université de Liège.
Leboucq (Hector), membre de l'Académie royale de médecine, à Gand.
Leclère (Constant), professeur à l'Athénée royal de Huy.
Leclère (Léon), correspondant de l'Académie royale, à Bruxelles.
Lecoutere (C.), membre de l'Académie royale flamande, à Louvain.
Lefèvre (le Père Placide), abbaye d'Averbode.
Lenain (Louis), membre de l'Académie royale, à Bruxelles.
le Paige (C.), membre de l'Académie royale, à Liège.
Limbouurg (Chevalier Philippe de), à Theux.
Linden (Herman van der), professeur à l'Université de Liège.
Lippens (le Père Hugolin), des Frères mineurs, à Salzinnes.
Maere (chanoine), professeur à l'Université de Louvain.
Maeterlinck (Louis), conservateur du Musée des beaux-arts, à Gand.
Magnette (F.), professeur à l'Athénée de Liège.
Mahaim (E.), membre de l'Académie royale, à Liège.
Mansion (Joseph), membre de l'Académie royale flamande, à Liège.
Massart (Jean), membre de l'Académie royale, à Bruxelles.
Mathieu (Émile), membre de l'Académie royale, à Gand.
Matthieu (Ernest), avocat, à Enghien.
Mensbrugghe (A. van der), avocat, à Paris.
Micheels (Henri), professeur à l'Athénée de Liège.
Micheels (Henri) fils, ingénieur, à Paris.
Moret (abbé), curé de Sur-le-Mez.
Moyaux (Auguste), ingénieur, à Bruxelles.

- MM.** *Neuberg (J.)*, membre de l'Académie royale, à Liège.
Nève (Joseph), directeur honoraire des Beaux-Arts, à Bruxelles.
Nobele (L.-F. de), à Gand.
Nolf (J.), avocat, à Courtrai.
Nys (Ernest), membre de l'Académie royale, à Bruxelles.
Ortroy (Fernand van), professeur à l'Université de Gand.
Paquay (abbé Jean), à Heusden lez-Beeringen.
Pauw (Napoléon de), président de la Commission royale d'histoire, à Gand.
Pergameni (Charles), archiviste-adjoint de la ville de Bruxelles.
Pirenne (Henri), membre de l'Académie royale, à Gand.
Pirenne (Jacques), avocat, à Bruxelles.
Piters (Armand), professeur honoraire, à Bruxelles.
Poncelet (E.), conservateur des Archives de l'État, à Mons.
Poncelet (le Père A.), de la Compagnie de Jésus, à Bruxelles.
Poorter (abbé A. de), bibliothécaire de la ville de Bruges.
Pouillet (Prosper), professeur à l'Université de Louvain.
Prelle de la Nieppe (Ed. de), à Bruxelles.
Puyvelde (Léo van), membre de l'Académie royale flamande, à Gand.
Radiguès (Henri de), à Liège.
Ridder (Alfred de), directeur général au Ministère des Affaires Étrangères, à Bruxelles.
Roersch (Alphonse), administrateur-inspecteur de l'Université de Gand.
Rolin (Albéric), membre de l'Académie royale, à La Haye.
Rombaut (E.), inspecteur général au Ministère de l'Industrie et du Travail, à Bruxelles.
Rousseau (Henri), conservateur aux Musées royaux des arts décoratifs et industriels, à Mousty.
Rubbrecht (Dr Oswald), chargé de cours à l'Université de Gand.
Ruhl (G.), avocat, à Liège.
Rutot, (A.), membre de l'Académie royale, à Bruxelles.
Sabbe (Maurice), membre de l'Académie royale flamande, à Anvers.
Saegher (Henri de), archiviste aux Archives de l'État, à Bruges.
Saintenoy (Paul), architecte, professeur à l'Académie des beaux-arts, à Bruxelles.

MM. *Sano (Dr Fritz)*, à Anvers.

Schrevel (chanoine A.-C. de), vicaire général, à Bruges.

Simenon (chanoine Guillaume), professeur au grand Séminaire, à Liège.

Simon (Armand), membre de la Commission des anciennes lois et ordonnances, à Bruxelles.

Soil de Moriamé (Eugène), président du Tribunal de première instance, à Tournai.

Solvay (Lucien), membre de l'Académie royale, à Bruxelles.

Terlinden (Charles), professeur à l'Université de Louvain.

Tourneur (Victor), conservateur à la Bibliothèque royale, à Bruxelles.

Trannoy (baron de), à Tongerlo.

Vannerus (Jules), conservateur honoraire des Archives de l'État, à Bruxelles.

Vauthier (Maurice), membre de l'Académie royale, à Bruxelles.

Vercoullie (J.), membre de l'Académie royale et de l'Académie royale flamande, à Gand.

Verhaegen (Paul), conseiller à la Cour de cassation, à Bruxelles.

Verhaegen (baron Pierre), avocat, à Gand.

Verlant (Ernest), membre de l'Académie royale, à Bruxelles.

Verriest (Léon), professeur à l'École coloniale d'Anvers, à Bruxelles.

Vlietinck (Ed.), avocat, à Ostende.

Vincent (Auguste), conservateur à la Bibliothèque royale, à Bruxelles.

Vocht (Henri de), professeur à l'Université de Louvain.

Waefelghem (chanoine Raphaël van), archiviste à l'abbaye de Parc.

Warichez (chanoine J.), archiviste de l'Évêché, à Tournai.

Willems (Léonard), membre de l'Académie royale flamande, à Gand.

Wilmotte (Maurice), membre de l'Académie royale, à Liège.

Wils (Joseph), archiviste à l'Université de Louvain.

Wulf (Maurice de), membre de l'Académie royale, à Louvain.

Zuylen van Nyevelt (A. van), conservateur des Archives de l'État, à Bruges.

LISTE DES TRAVAUX

PUBLIÉS

par l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique,
de mai 1919 à mai 1920,

DRESSÉE PAR LE SECRÉTAIRE PERPÉTUEL.

BULLETINS.

Classe des Sciences.

1919, n^{os} 5 à 12; 1920, n^{os} 1 à 3.

Classe des Lettres et des Sciences morales et politiques.

1919, n^{os} 5 à 12; 1920, n^{os} 1 à 3.

Classe des Beaux-Arts.

1919, n^{os} 5 à 12; 1920, n^{os} 1 à 3.

ANNUAIRE.

L'*Annuaire* de 1920 comporte 150 pages in-18, comprenant, outre les renseignements ordinaires, la notice biographique de Charles Mesdach de ter Kiele, par Jules Lameere.

MÉMOIRES.

Il a été publié cette année :

Classe des Sciences.

COLLECTION IN-8°, TOME IV, FASCICULE 1.

Sur quelques relations pouvant être utiles dans l'analyse des beurres falsifiés, par G. CESÀRO (63 p., 2 fig.).

TRAVAUX SOUS PRESSE.

Classe des Sciences.

Contribution à l'étude des minéraux du Vésuve et du Monte Somma : Les minéraux du groupe de la néphéline, par G. CESÀRO.

Les variations et leur hérédité chez les mollusques, par PAUL PELSENEER.

Congruences de cubiques gauches, par MODESTE STUYVAERT. (Mémoire couronné.)

Recherches sur les variations numériques des chromosomes dans la série végétale, par ÉMILE MARCHAL. (Mémoire couronné.)

Sur la reviviscence chez les végétaux, par JEANNE TERBY. (Mémoire couronné.)

La tectonique du Brabant et des régions voisines, par PAUL FOURMARIER. (Mémoire couronné.)

Observation au sujet du tracé de la carte géologique de la région sud-ouest du massif de Stavelot, par LÉOPOLD DE DORLODOT. (Mémoire couronné.)

Classe des Lettres et des Sciences morales et politiques.

Le protestantisme dans le Luxembourg au XVIII^e siècle, par EUGÈNE HUBERT.

La Lorraine belge, par LOUIS VERHULST. (Mémoire couronné.)

Classe des Beaux-Arts.

Histoire de la création et du développement du drame musical, par LUDOVIC BLAREAU. (Mémoire couronné.)

TRAVAUX A IMPRIMER.

Classe des Sciences.

Sur la mesure des mobilités des ions par la méthode du condensateur-plan, par PIENKOWSKI.

Les calcites belges, par H. BUTTGENBACH.

La spermiogenèse et la double spermatogenèse des Lépidoptères,
par LOUIS VERLAINE.

Classe des Lettres et des Sciences morales et politiques.

Histoire du Paganisme dans l'Empire d'Orient depuis le règne de Théodose le Grand jusqu'à l'invasion arabe, par A. KUGENER. (Prix Gantrelle.)

Zuster Hadewijk, par le R. P. VAN MIERLO, JR., S. J. (Mémoire couronné.)

Le Condroz. — Het Hageland, par ÉMILE VLIEBERGH et ROBERT ULENS. (Mémoire couronné.)

Étude sur le livre « De l'Allemagne », de Madame de Staël,
par H. GLAESENER. (Mémoire couronné.)

Le dialecte d'Arlon, par ALFRED BERTRANG. (Mémoire couronné.)

Chronologie des Archontes athéniens, par PAUL GRAINDOR. (Prix Gantrelle.)

Les préliminaires de la Révolution brabançonne, par EUGÈNE HUBERT.

La vie et les voyages d'un ouvrier foulon du pays de Verviers au XVIII^e siècle, par HENRY CARTON DE WIART.

Le régime juridique et économique du commerce de l'argent au moyen âge, par GEORGES BIGWOOD. (Prix Duvivier.)

Étude sur la Dette publique en Belgique, par ED. NICOLAÏ.
(Mémoire couronné.)

Les relations commerciales de la Belgique et de l'Espagne, par JOSEPH LEFÈVRE. (Mémoire couronné.)

Classe des Beaux-Arts.

Les origines de la parure, par GEORGES VAN WETTER.

L'Antique Cerné, capitale de l'Atlantide, par A. RUTOT.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Bonaparte (le Prince Roland). Notes ptéridologiques, fascicule VIII. Paris, 1919; in-8° (197 p.).

Cornet (J.). Le Tourtia et le Turonien inférieur dans le bassin crétacique de la Haine. Liège, 1914; extr. in-8° (pp. 158-164).

— Sur la disposition transgressive du Landenien marin dans le bassin de la Haine. Liège, 1914; extr. in-8° (pp. 126-129).

— Sur la nature géologique des matériaux crétaciques qui ont envahi les travaux de la fosse de Thieu le 2 mars 1914. Liège, 1914; extr. in-8° (pp. 209-212).

— Le Turonien entre Mons et l'Escaut. Liège, 1919; extr. in-8° (pp. 125-168).

— Le puits artésien de la chaussée de Binche, à Mons. — Le maestrichtien de Boussu. — La faille du Midi et le calcaire carbonifère dans le bois de Colfontaine. Liège, 1919; extr. in-8° (pp. 70-74).

Dehaut (E.-G.). Contributions à l'étude de la vie vertébrée insulaire dans la région méditerranéenne occidentale et particulièrement en Sardaigne et en Corse. Paris, 1920; in-8° (92 p., planches).

de la Vallée Poussin (Ch.-J.). Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble; Classes de Baire. Paris, 1916; in-8° (viii-151 pp.).

— Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle. Paris, 1919; in-8° (vi-150 pp.).

de Harven (J.) et Zunz (Edgard). Quelques constatations histologiques effectuées dans des cas mortels d'intoxication par l'ypérite chez l'homme. Paris, 1919; extr. in-8° (pp. 473-484, planches).

Errera (A.). Note sur la résistance de l'air dans le cas des projectiles ogivaux. Bruxelles, 1920; extr. in-8° (pp. 15-26).

Fourmarier (Paul). Observations sur le prolongement oriental de la faille du Carabinier. Liège, 1920; extr. in-8° (pp. 202-210).

— Observations sur les grès tertiaires des environs de Liège. Liège, 1920; extr. in-8° (pp. 155-159).

- Fourmarier (Paul)*. Observations de géographie physique dans la région du Tanganyika. Les grands lacs de l'Afrique centrale. Liège, 1920; extr. in-8° (pp. 59-80, planches).
- La tectonique du bassin houiller du Hainaut. Les failles des districts de Charleroi et du Centre. Liège, 1920; extr. in-8° (pp. 169-217, cartes).
- Govaerts (Paul)* et *Zunz (Edgard)*. Effet de la transfusion dans divers états de collapsus circulatoire. Paris, 1919; extr. in-8° (pp. 445-474).
- Leplat (Georges)*. Action du milieu sur le développement des larves d'amphibies. Localisation et différenciation des premières ébauches oculaires chez les vertébrés. Cyclopie et anophtalmie. Liège, 1919; extr. in-8° (pp. 221-321, planches).
- Masek (Joseph)*. Zákon Hospodárnosti. Olomouc, 1919; in-8° (ix-83 p.).
- Osborn (Henry-Fairfield)*. A Naturalist in the Bahamas. John J. Northrop. New-York, 1910; in-8° (281 p., 1 portrait, planches, reliure, éditeur).
- Russell (Henry-Nowis)*. Some problems of sideral astronomy. Washington, 1917; extr. in-8°, pp. 1-26).
- Saint-Jours (B.)*. Fixité du niveau des mers depuis dix mille ans. Bordeaux, 1919; extr. in-8° (pp. 3-18).
- Verschaffelt (J.)*. La structure de l'atome. Les propriétés physiques des rayons X. Bruxelles, 1920; extr. in-8° (pp. 1-32).
- Zunz (Edgard)*. Les modifications du sang au cours de l'intoxication par l'ypérite. Paris, 1919; extr. in-8° (pp. 411-425).
- De la pression sanguine dans les intoxications par l'ypérite et les arsines. Paris, 1919 extr. in-8° (pp. 427-444).
-

TABLE DES MATIÈRES

Séance du 10 avril 1920.

M. le Directeur rend hommage à la mémoire de M. Paul Fredericq et exprime à M. Léon Fredericq les sentiments de condoléances de la Classe; félicite M. Bordet, autorisé à porter l'étoile d'argent de la Reconnaissance nationale sur sa décoration de l'Ordre de Léopold	103
CORRESPONDANCE : Le Congrès international des mathématiciens à Strasbourg, invitation et nomination des délégués. — L'Académie royale des sciences de Madrid annonce la mort de son ancien secrétaire général Francisco de Arrilaga. — M. Mac Alister de Dublin est autorisé à reproduire certaines figures d'anciens volumes du <i>Bulletin</i> . — La Commission géophysique de Norvège demande l'échange de publications	103
HOMMAGE D'OUVRAGE	104
COMITÉ SECRET	104
RAPPORTS : 1 ^o De MM. Fredericq, Willem, Massart et Marchal, sur le Prix Errera, troisième période; lauréat, M. Maurice Herlant; 2 ^o de M. Stuyvaert, <i>Réalisation de l'Idée pestalozzienne</i> , par M. Larose; 3 ^o de MM. Brachet et Lameere, <i>Note sur la Spermiogenèse et la double Spermatogenèse des Lépidoptères</i> , par M. Verlaïne.	104
CENT CINQUANTIÈME ANNIVERSAIRE DE L'ACADÉMIE	104
MOTION DE M. LAMEERE	105
INAUGURATION DE LA STATUE D'ÉDOUARD VAN BENEDEN	105
COMMUNICATIONS ET LECTURES	105
MOTION DE M. MASSART	106
LECTURE DES RAPPORTS de MM. Willem, Massart et Marchal sur les travaux présentés pour le Prix Leo Errera, troisième période, M. Maurice Herlant, lauréat; mention très honorable à M. Kufferath	106

Communications et Lectures.

<i>Sur la forme de l'alvéole de l'abeille</i> (2 fig.), par G. Cesàro	109
BOTANIQUE. — <i>Recherches sur les organismes inférieurs</i> . — VIII. <i>Sur la motilité des Flagellates</i> (32 fig.), par Jean Massart	116
GÉOLOGIE. — <i>L'âge relatif de quelques modifications des terrains paléozoïques de la Belgique</i> , par Paul Fourmarier	142
BOTANIQUE. — <i>Quelques expériences de régénération de bourgeons chez les racines de Chicorées</i> (13 fig.), par J. Schouteden-Wery	152
BOTANIQUE. — <i>Contributions à l'étude des Chrysomonadines</i> (11 fig.), par W. Conrad	167

Séance du 4 mai 1920.

La Classe félicite M. Cesàro, nommé par Sa Majesté le Roi, professeur de mathématiques de S. A. R. Monseigneur le Duc de Brabant	189
CORRESPONDANCE : Les Ministres des Sciences et des Arts, des Affaires Économiques et de l'Agriculture promettent d'examiner avec bienveillance le vœu que la Classe leur a exprimé à la demande de M. Massart (séance du 10 avril). — M. le Haut Commissaire du Littoral annonce l'installation de deux baraques. — Le Comité de la Commémoration Edouard van Beneden invite la Classe à se faire représenter à l'inauguration du monument. M. Lameere, délégué. — Le Secrétaire général de l'Union internationale de la Chimie pure et appliquée annonce que les communications seront adressées à l'Académie. Il demande si celle-ci a l'intention de proposer certaines questions. — M. Dupont adresse une nouvelle formule de π . — Hommages d'ouvrages	189
COMITÉ SECRET	190
FONDATION AGATHON DE POTTER	191
COMMISSION ADMINISTRATIVE. — Élection du délégué	191
CONSEIL INTERNATIONAL DE RECHERCHES	191

Communications et Lectures.

ANALYSE MATHÉMATIQUE ET GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE. — <i>Sur les équations de Moutard à solutions quadratiques</i> , par A. Demoulin.	192
GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE. — <i>Sur les congruences qui appartiennent à un complexe linéaire et sur les surfaces Φ</i> , par A. Demoulin	215
PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — <i>Théorie nouvelle de la Gravifique</i> , par Th. De Donder et H. Vanderlinden	232
GÉOLOGIE. — <i>Quelques réflexions au sujet de la discordance entre le Gedinnien et le Siluro-Cambrien en Belgique</i> , par P. Fourmarier	246
EMBRYOLOGIE. — <i>Note sur l'étude du développement du cristallin et des autres placodes chez des embryons monstrueux de Rana fusca</i> , par Georges Leplat.	252
ZOOLOGIE. — <i>Sur la structure intime de l'astragale chez les primates</i> , par Charles Fraipont	261
ZOOLOGIE. — <i>Une mustellide quaternaire nouvelle pour la Belgique</i> , par Charles Fraipont	263
PHYSIOLOGIE. — <i>Étude des voies centrifuges du réflexe oculo-cardiaque</i> (4 fig.), par Delava	265

Assemblée générale du 4 mai 1920.

CORRESPONDANCE : M. le Ministre des Sciences et des Arts au sujet de la question de l'entrée des Littérateurs à l'Académie	274
PRÉROGATIVES DE L'ACADÉMIE	275
TRANSFORMATION DE L'UNIVERSITÉ DE GAND EN UNIVERSITÉ DE LANGUE FLAMANDE.	276
BERGMANS (PAUL). <i>Rapport sur les travaux de la Commission de la Biographie nationale pendant l'année 1919-1920</i>	279
LISTE DES TRAVAUX PUBLIÉS PAR L'ACADÉMIE	288
TRAVAUX SOUS PRESSE	289
TRAVAUX A IMPRIMER.	290
BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE	291

Le fonds des publications académiques ayant été systématiquement pillé par les Allemands, il ne sera plus possible de donner suite aux demandes de combler les lacunes antérieures à 1919.

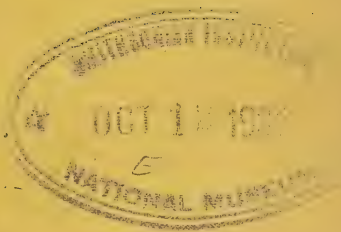
ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

BULLETIN

DE LA

CLASSE DES SCIENCES

1920 — N° 6



BRUXELLES

MAURICE LAMERTIN

LIBRAIRE-ÉDITEUR

Rue Coudenberg, 58-62

M. HAYEZ

IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE

Rue de Louvain, 112

1920

Séance du samedi 5 juin 1920, à 10 $\frac{1}{2}$ heures.

M. A. GRAVIS, directeur de la Classe.

M. P. PELSENEER, secrétaire perpétuel.

Sont présents : MM. G. Cesàro, vice-directeur, C. le Paige, J. Deruyts, Léon Fredericq, J. Neuberg, A. Lameere, Ch.-J. de la Vallée Poussin, Max Lohest, Fr. Swarts, Jean Massart, A. Demoulin, A. Rutot, V. Willem, P. Stroobant, Ch. Julin, J. Verschaffelt, G. Lecointe, Émile Marchal, J. Cornet, Pierre Nolf, Jules Bordet, *membres* ; O. Van der Stricht, Th. De Donder, *correspondants*.

Absences motivées : MM. de Hemptinne, membre ; de Dorlodot et Fourmarier, correspondants.

M. le Directeur félicite M. Swarts, promu Officier de l'Ordre de Léopold, avec rayure d'or. (*Applaudissements.*)

CORRESPONDANCE.

Remerciements de la Société zoologique de Belgique et de M. Poma, qui ont reçu des subventions de la fondation De Potter, et de M. Kufferath, à qui la Classe a accordé une mention très honorable au concours pour le Prix Leo Errera.

— Une demande d'échange présentée par la Société hellénique d'agriculture est repoussée.

— Une demande de l'Union des associations internationales, de voir l'Académie représentée à son congrès du 5 septembre, n'est pas accueillie.

— M. Renier, directeur du Service géologique, demande que les quatre cartes d'un mémoire couronné de M. De Dorlodot soient définitivement déposées au Service géologique. — Accordé.

— L'École d'anthropologie de Paris demande à l'Académie de se faire représenter à la réunion préparatoire pour la fondation d'un Institut international d'anthropologie, qui se tiendra le 14 septembre, à Paris. — M. Rutot est désigné.

— M. Lecointe demande à être remplacé comme délégué de la Classe à la sous-commission de la publication du 150^e anniversaire de l'Académie. — M. Stroobant est désigné pour le remplacer.

— M. Spelkens adresse à la Classe trois mémoires : *Sur la quadrature du cercle*; *Sur la trisection de l'angle* et *Sur la duplication du cube*, avec prière de faire rapport à ce sujet. La Classe décide qu'elle ne fera plus rapport sur des ouvrages relatifs à ces questions.

HOMMAGES D'OUVRAGES.

Le quaternaire du Nord de la France et de la Belgique d'après la classification de M. le prof^r V. Commont, par A. Rutot.

Les grandes mutations intellectuelles de l'humanité, deuxième partie. *Où allons-nous?* par A. Rutot.

A naturalist in the Bahamas. John I. Northrop, édité par H.-F. Osborn.

Notice historique sur la vie et l'œuvre de lord Kelvin, par E. Picard.

Lé docteur Ch. de Bersaques, par la Société royale de Médecine de Gand.

— Remerciements.

RAPPORTS.

De MM. Gravis, Massart et Marchal, sur les ouvrages présentés pour la quatrième période du Prix Laurent. Sur l'avis unanime des rapporteurs, le Prix est attribué à M. Hauman. — Ces rapports sont publiés ci-après.

COMITÉ SECRET. — ÉLECTIONS.

Sont élus, dans la section des sciences mathématiques et physiques : correspondant : M. Octave Dony-Henault; associé : Sir W. Pope.

REPRÉSENTATION DE LA BELGIQUE AU RAMSAY MEMORIAL FUND.

— A la demande de M. le Ministre des Sciences et des Arts, l'Académie est appelée à donner son avis sur cette question. Après avoir entendu le rapport fait à ce sujet par M. F. Swarts, la Classe, conformément aux conclusions du rapporteur, émet un avis favorable à la participation de la Belgique à cette institution, par une contribution annuelle (bourse ou fellowship) de 300 livres.

— Conférence de Londres (28 septembre 1920) pour la continuation de l'« International Catalogue of scientific Literature ». Le Bureau s'efforcera de trouver un délégué de l'Académie à cette conférence.

Choix d'une lecture pour la séance publique annuelle : M. De Donder est désigné pour faire cette lecture.

COMMUNICATIONS.

M. Dony-Henault : *Sur l'emploi des métaux granulaires pour le chauffage électrique*, présenté par M. Swarts, avec rapport verbal concluant à l'impression dans les *Mémoires* in-8°. — Adopté.

PRIX E. LAURENT.

(Quatrième période.)

Rapport de M. A. Gravis.

M. L. Hauman, professeur de botanique à la Faculté d'agronomie de Buenos-Ayres, a adressé au jury du concours pour le prix E. Laurent (4^e période) quatorze brochures traitant de sujets divers : phytographie, floristique, phytogéographie, éthologie, microbie.

Les travaux de phytographie comportent la description d'espèces nouvelles ou peu connues de Dioscoracées, d'Orchidées, d'Alismacées, de Foncacées et de Graminées de la flore argentine. Des notes floristiques et un catalogue des phanérogames complètent les études monographiques que l'auteur a consacrées à la flore de son pays d'adoption.

Tous ces mémoires témoignent d'un travail consciencieux et d'une connaissance très approfondie des sujets traités.

De nombreuses explorations dans la région du Rio-Negro inférieur, dans la forêt Valdivienne et dans les Hautes-Cordillères de Mendoza ont fourni à M. L. Hauman l'occasion de très intéressantes observations de géographie et d'éthologie végétales.

La micrographie est représentée par une très intéressante *Contribution à l'étude des altérations microbiennes des organes*

charnus des plantes. Commencées par l'observation d'une altération très fréquente des racines tubérisées de l'*Ipomoea batatas*, et continuées par des expériences sur diverses plantes, ces recherches ont abouti à des conclusions qui complètent heureusement celles de E. Laurent et de Lepoutre. Il y a lieu de signaler tout particulièrement que les différences constatées dans certains résultats proviennent non pas de modifications de la virulence des parasites occasionnels, comme on l'avait admis, mais de la rapidité plus ou moins grande avec laquelle s'opère la cicatrisation des plaies par subérification des membranes cellulaires.

Cette analyse rapide des travaux de M. le Prof^r L. Hauman démontrera suffisamment, je pense, les mérites de son œuvre et m'amène à proposer l'attribution du Prix E. Laurent à ce botaniste distingué.

Rapport de M. Massart.

Ainsi que le fait remarquer mon savant confrère M. Gravis, les mémoires de M. Hauman sont excellents. Il y faut certainement mettre hors pair les travaux de floristique et de géobotanique, qui témoignent d'un esprit clair et méthodique, apte à débrouiller les problèmes difficiles de la botanique descriptive.

Rapport de M. Marchal.

Les travaux présentés par M. Hauman à l'appréciation du jury du Prix Émile Laurent (4^e période) constituent un ensemble d'une importance et d'une valeur transcendantes. Ils témoignent, chez leur auteur, d'une connaissance très approfondie des problèmes délicats que soulève l'étude systématique des végétaux. Aussi suis-je heureux de me rallier à l'avis de mes savants confrères MM. Gravis et Massart.

COMMUNICATIONS ET LECTURES.

ZOOLOGIE. — Observations sur la respiration des Amphibiens,

par VICTOR WILLEM, membre de la Classe.

(Première note.)

1. *Introduction.* — Dans un mémoire antérieur ⁽¹⁾, j'ai décrit très succinctement une série d'expériences que j'avais faites en 1917-1918 sur les mouvements respiratoires de la Grenouille verte. J'étais parvenu à enregistrer simultanément les mouvements du plancher buccal, les mouvements d'ouverture et de fermeture des narines, la pression bucco-pharyngienne, la pression intrapulmonaire (et, partant, l'instant de l'ouverture ou de la fermeture de la glotte) et à préciser ainsi les phases d'un mécanisme fort compliqué.

Ces phases sont notées graphiquement sur le diagramme ci-contre, et on peut les résumer de la manière suivante :

1° Pendant une période plus ou moins longue, la Grenouille n'effectue que des oscillations du plancher buccal, assurant des échanges d'air, par les narines constamment ouvertes, entre l'atmosphère et la cavité bucco-pharyngienne. Nous allons voir qu'il existe chez les Amphibiens une respiration bucco-pharyngienne, et il convient de distinguer de la ventilation pulmonaire, que nous définirons plus loin, une *ventilation bucco-pharyngienne* assurant la respiration par l'arrière-bouche et renouvelant l'air qui sera de temps à autre mélangé à celui des poumons. Le diagramme ci-contre comporte, entre les ordonnées 4 et 1, un seul de ces balancements, qui peuvent se répéter un grand nombre de fois.

(¹) V. WILLEM, *Les mouvements respiratoires de la Grenouille*. (ARCHIVES NÉERLANDAISES DE PHYSIOLOGIE DE L'HOMME ET DES ANIMAUX, t. III, p. 315, 1919.)

La phase expiratrice, 4-5, due à un relèvement du plancher buccal sous l'influence de la contraction des *m. submaxillaris* et *subhyoideus*, ainsi qu'à la protraction de l'appareil hyoïdien, donne lieu à une hausse de la pression bucco-pharyngienne de quelques millimètres d'eau (B). La phase inspiratrice, résultant de l'abaissement du plancher buccal par le redressement de l'appareil épisternal fléchi dans la phase précédente, ainsi que de la rétraction du larynx, donne lieu à une pression bucco-pharyngienne inférieure de quelques millimètres à la pression atmosphérique.

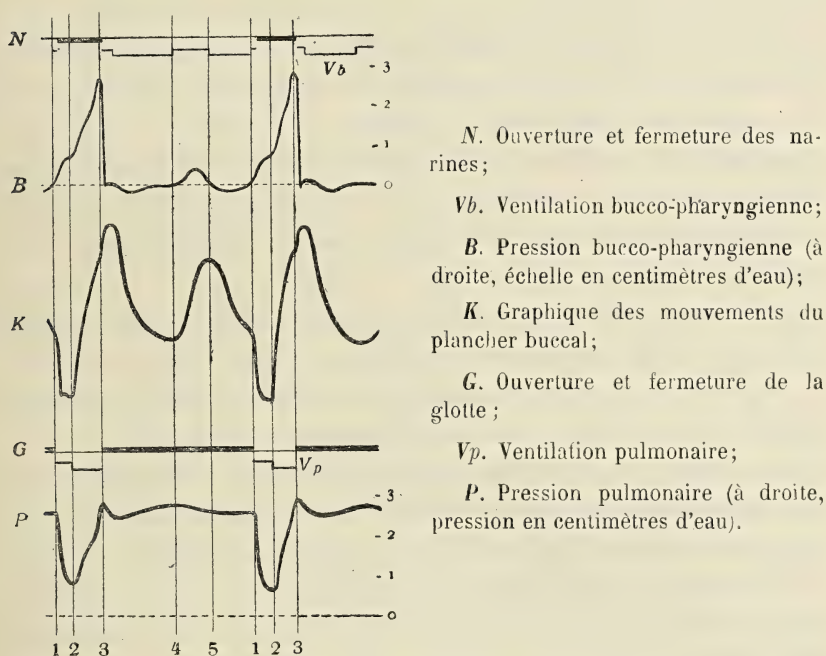


DIAGRAMME DES MOUVEMENTS RESPIRATOIRES CHEZ LA GRENOUILLE.

Les narines sont ouvertes (N); la glotte est fermée (G); les déplacements du larynx entraînent de faibles modifications de la pression intrapulmonaire (P).

Comme je l'ai dit, il est peu logique de considérer isolément,

avec GAUPP ⁽¹⁾, une des phases de cette ventilation bucco-pharyngienne, celle qui précède l'expiration pulmonaire, pour en faire une « aspiration », constituant une triplice avec l'inspiration et l'expiration (pulmonaire). Cette distinction, cependant, est pratiquement justifiée quand la phase inspiratrice, au lieu d'être modérée et en grande partie passive, s'exagère par l'intervention d'une contraction de muscles capable d'abaisser l'épisternum ; il y a lieu de parler d'aspiration dans des cas d'abaissement exagéré du plancher buccal, précédant l'ouverture de la glotte, analogues à ceux que notent les figures 10 et 17 de mon mémoire.

2. Après un nombre très variable d'oscillations du plancher buccal, vers la fin d'une phase inspiratrice, la glotte s'ouvre brusquement, tandis que les narines se ferment. Il y a chute brusque de la pression pulmonaire et affaissement des flancs ; de l'air pulmonaire passe dans la bouche, haussant la pression bucco-pharyngienne et abaissant le plancher buccal. C'est l'*expiration pulmonaire* (1-2).

Suit immédiatement, les narines restant fermées, une contraction de la cavité bucco-pharyngienne qui élève à environ 3 centimètres d'eau la pression et qui refoule de l'air mélangé dans les poumons : c'est l'*inspiration pulmonaire* (2-3).

La glotte se ferme (3), mettant fin à la seconde phase de la ventilation pulmonaire. Un instant après, les narines s'ouvrent, et c'est une nouvelle période de ventilation bucco-pharyngienne.

Ce mécanisme de ventilation pulmonaire, on le voit, est tout différent de celui des Vertébrés supérieurs, où cette ventilation est assurée, la glotte restant constamment ouverte, par des mouvements d'expansion et d'affaissement de la cavité thoracique. Chez les Amphibiens, la cavité buccale fonctionne comme une pompe aspirante et foulante, foulant de l'air dans des poumons où la pression est toujours supérieure à la pression atmosphé-

(1) E. GAUPP, *Anatomie des Frosches*. 5. *Mechanismus der Athmung*, p. 200 (1904).

rique et qui, partant, restent fermés dans l'intervalle par un appareil occluseur proximal (larynx). Et il se fait, pour des raisons que nous chercherons plus tard, que la glotte s'ouvre à un moment où la pression buccale est sensiblement égale à la pression atmosphérique, de sorte que la ventilation pulmonaire débute par la phase expiratrice.

Ce mécanisme conserve la trace de l'origine de la première respiration aérienne des Vertébrés aquatiques : une déglutition plus ou moins modifiée d'air, dirigée vers des annexes du tube digestif. Il est intéressant de chercher à reconstituer son évolution, depuis le happement d'air, qu'on observe chez des poissons d'eau douce qui aèrent dans leur bouche l'eau qui va passer sur les branchies; d'étudier les diverses tentatives de respiration aérienne, soit dans des poches à parois rigides (comme le labyrinthe des Labyrinthidés), soit dans des sacs élastiques débutant par un appareil occluseur (poumons des Dipneustes et de Ganoïdes). Il sera avantageux d'étudier plus attentivement qu'on ne l'a fait le développement de la respiration aérienne au cours des métamorphoses de divers types d'Amphibiens.

Mais ce mécanisme est, chez les Grenouilles, bien autrement compliqué que le schéma que je viens d'en donner.

Tout d'abord, la fermeture des narines, au début de l'expiration pulmonaire, ne se produit qu'après l'ouverture de la glotte, et il existe un instant, court (1, N), où les poumons sont directement en communication avec l'extérieur, contrairement au principe posé par BAGLIONI ⁽¹⁾. De l'air peut ainsi s'échapper, qui ne sera pas foulé dans les poumons à l'inspiration immédiatement suivante; cet échappement tend à compenser l'acroissement de contenu que recevraient autrement les poumons ⁽²⁾.

⁽¹⁾ BAGLIONI, *Zur vergleichenden Physiologie des Atembewegungen der Wirbeltiere.* (ERGEBNISSE DER PHYSIOLOGIE, Bd 11, 1911.)

⁽²⁾ Au moment de l'ouverture de la glotte, le système respiratoire comprend un certain volume d'air pulmonaire (v) et un certain volume d'air bucco-pharyn-

Cette période d'échappement est variable. D'autre part, l'excursion du plancher buccal, pendant l'inspiration pulmonaire, définit la quantité d'air qui est refoulée dans les poumons, et la résistance tonique du plancher buccal au moment de l'ouverture de la glotte règle l'admission dans la bouche de la quantité d'air pulmonaire qui pourra s'échapper lors de l'oscillation buccale suivante.

En fait, le volume d'air compris dans les poumons subit, du chef des mouvements combinés des narines, de la bouche et du larynx, des variations considérables, souvent d'allure périodique, et les poumons peuvent se gonfler ou se vider, avec des alternatives lentes ou brusques : c'est là une ventilation secondaire, qui se superpose à celle qui résulte du mécanisme fondamental. A chaque variation du volume pulmonaire, les fibres musculaires lisses des poumons se contractent ou se relâchent, de manière à ramener la pression pulmonaire à une valeur constante, indépendante de l'état de réplétion des sacs eux-mêmes.

La succession des diverses manœuvres de ce mécanisme compliqué et leur réglage nécessitent l'intervention de réflexes nombreux, qui sont à peine soupçonnés. J'ai le sentiment que leur coordination est loin d'être poussée, chez les divers Amphibiens, aussi loin que chez les Anoures. Il y a là encore, dans le système nerveux, une évolution à suivre, dont on trouvera probablement le pendant dans le développement larvaire des Anoures.

gien (v'). Si les narines restaient fermées pendant toute la durée des échanges entre les poumons et la cavité bucco-pharyngienne, le volume $v + v'$ se trouverait réparti, à la fin de l'inspiration pulmonaire, de la manière suivante : une quantité plus petite que v' dans la cavité bucco-pharyngienne diminuée de capacité, et une quantité, conséquemment plus grande que v , dans les poumons; ceux-ci auraient gagné, à l'occasion des échanges, une quantité d'air en rapport avec la différence des niveaux occupés par le plancher buccal respectivement sur l'ordonnée 1 et sur l'ordonnée 3 de la courbe de ses excursions.

L'ensemble de ces points constitue un chapitre fort intéressant de physiologie comparée. Le sujet revient à résoudre, pour ainsi dire expérimentalement, un aspect de cette question de phylogénie : comment les Vertébrés inférieurs, aquatiques, se sont-ils adaptés à la respiration aérienne ? Comment sont nés les Amphibiens ? Je n'ai pas besoin de dire qu'il existe déjà sur les divers éléments de cette question des observations anatomiques et physiologiques nombreuses ; mais elles sont lacunaires et il convient de compléter et de coordonner les documents connus.

Dans la note actuelle, je rapporterai quelques observations sur la respiration des Grenouilles adultes pendant leur existence dans l'eau, spécialement lors de l'accouplement.

*
* * *

2. *Mouvements respiratoires de Grenouilles vivant dans l'eau.* — Quand une Grenouille, verte ou rousse, flotte tranquillement à la surface de l'eau, on lui voit effectuer les oscillations du plancher buccal, entrecoupées, à des intervalles plus ou moins éloignés, de mouvements de ventilation pulmonaire, qu'on peut observer chez les individus terrestres. Je reviendrai plus tard sur les facteurs qui règlent le rythme et la fréquence de ces divers mouvements. Le corps flottant, s'il est libre, oscille verticalement, selon les variations de volume que lui font subir les inspirations et les expirations alternantes.

Inquiétée, la Grenouille plonge au moyen de mouvements natatoires des membres postérieurs, et, ordinairement, elle lâche par les narines, en bulles, l'air qui rend sa plongée difficile, jusqu'au moment où, si elle ne peut pas s'accrocher à un objet submergé, elle se trouve plus dense que l'eau et reste passivement sur le fond de l'aquarium.

L'air ainsi abandonné est, en très grande partie, de l'air pulmonaire. Le volume, en effet, en est manifestement plus grand

que la faible diminution de capacité de la cavité buccale. D'ailleurs, avant sa plongée, la portion de la Grenouille qui émergeait était, au jugé, manifestement beaucoup plus volumineuse (deux, trois, quatre fois) que la capacité de la cavité bucco-pharyngienne; pour que l'animal devienne plus lourd que le volume d'eau qu'il déplace, il doit perdre un volume d'air sensiblement égal à celui de la portion émergée de son corps : quantité qui ne peut provenir, pour la plus grande part, que des poumons.

Il y a donc là des mouvements d'expiration pulmonaire avec narines ouvertes. J'ai décrit ⁽¹⁾ de semblables manœuvres, réputées exceptionnelles ⁽²⁾, chez des Grenouilles étalées sur la planche d'opération, quand j'augmentais artificiellement la pression pulmonaire. Une élévation de 3 à 4 centimètres d'eau suffisait. Après un délai de plusieurs secondes, pendant lequel la pression pulmonaire baissait en raison du relâchement de la paroi, la glotte s'ouvrait à deux ou trois reprises sans fermeture des narines, et ce n'était qu'après une série d'expirations directes que la vidange des poumons s'opérait par la méthode normale. Je ne m'explique pas encore la modalité de ces phénomènes réflexes.

Le lâcher d'air au moment de la plongée constitue un tout autre complexe d'opérations réflexes. L'émission de bulles d'air par les narines commence au début de la plongée, sous quelques centimètres d'eau; elle peut se réitérer plus bas; une grenouille calée sous 30 centimètres d'eau depuis cinq minutes peut encore émettre des bulles d'air quand, effrayée, elle se remet à nager. Cette manœuvre, comportant une contraction des muscles abdominaux, s'accompagne de l'ouverture, sous l'eau, des narines et, par conséquent, de l'inhibition du réflexe de fermeture des

(1) V. WILLEM, *Les mouvements respiratoires de la Grenouille* (p. 337 et graphiques 49, 20 et 21).

(2) BAGLIONI (Mémoire cité) pose comme principe que les narines et la glotte ne sont jamais ouvertes simultanément.

narines correspondant au mouillage du museau : c'est donc un ensemble compliqué de réflexes. Il n'est pas possible de le considérer, au même titre que les mouvements d'expiration rappelés ci-dessus, comme une réponse à des excitations intéro-réceptives. Il suit des excitations visuelles, par exemple, accompagne régulièrement des mouvements de fuite et doit être classé parmi les réactions qualifiées de « volontaires ».

Après un délai variable, de cinq à trente minutes, pendant lequel on ne perçoit ordinairement aucun mouvement de l'appareil respiratoire, la Grenouille remonte à la surface. Elle pousse ses narines au-dessus de l'eau et, grâce à quelques manœuvres de ventilation pulmonaire accompagnées de mouvements d'aspiration, regonfle ses poumons, de manière à flotter.

*
* * *

3. « *Immobilisation réflexe* » pendant l'accouplement. — Pendant la période d'accouplement, le système qui flotte ou qui plonge comprend deux individus qui respirent isolément et dont l'un ou l'autre peut prédominer au point de vue de la locomotion.

Au début, les deux conjoints respirent à la manière que je viens de décrire ; mâle et femelle nagent plus ou moins de concert pour plonger ou pour revenir à la surface ; tous deux, le museau au-dessus de l'eau, respirent activement ; le mâle coasse à la suite d'excitations variées, par exemple quand le couple se trouve secoué par les mouvements d'un voisin.

Mais bientôt, les allures du mâle, d'abord si excité et si vif, peuvent se modifier. Cramponné sur le dos de la femelle, les pattes postérieures repliées et immobiles, les yeux rétractés et clos, il se laisse transporter, inerte* ; à la surface, il ne fait aucun effort pour émerger ses narines et, si elles viennent à découvert, il n'effectue que de faibles oscillations du plancher buccal. On se trouve en présence d'un cas d' « immobilisation réflexe ».

On sait que dans les conditions ordinaires une Grenouille,

renversée sur le dos, se retourne immédiatement. Mais, dit RABAUD ⁽¹⁾, si une fois sur le dos, on appuie légèrement, au niveau de la ceinture scapulaire, sur la ligne médiane, l'animal replie ses pattes antérieures, ramène plus ou moins les pattes postérieures vers le corps et reste immobile, les yeux ouverts, pendant un laps de temps qui varie de une à dix minutes ⁽²⁾.

D'après ce que j'ai observé, les phénomènes sont, chez la Grenouille, moins simples que la description de E. RABAUD. Une Grenouille verte, vers l'époque de la reproduction, peut être « immobilisée » par des procédés variés.

1° Maintenu sur le dos par une pression légère exercée sur le sternum, elle se débat en coassant (surtout si c'est un mâle); si l'on accentue la pression, les pattes s'immobilisent dans la position qu'on leur donne, et le sujet, abandonné à lui-même, ne fait plus aucun effort pour se retourner; les mouvements respiratoires continuent, y compris les mouvements de ventilation pulmonaire.

Je n'observe pas le réflexe antagoniste décrit par RABAUD : une pression sur la région pelvienne, au moyen de l'index, détermine ordinairement la contraction des muscles abdominaux, laquelle peut s'accompagner d'un coassement, mais non la fin de l'immobilité : pour obtenir celle-ci, il faut, par exemple, pincer sérieusement un orteil.

2° Mais le même état d'immobilisation peut s'obtenir de bien d'autres manières : par la flexion en arrière de la tête, chez le sujet couché sur le dos; par la compression ventro-dorsale du bassin; par le retournement un peu brusque de l'animal main-

(1) E. RABAUD, *La « simulation » de la mort » chez les Vertébrés.* (BULL. Soc. ZOOLOGIQUE DE FRANCE, t. XLII, 1916.)

(2) Et l'immobilisation, ajoute RABAUD, peut être supprimée par une autre excitation périphérique : une pression exercée sur la ligne médiane, au niveau de la ceinture pelvienne, détermine la flexion et l'adduction des cuisses, qui se rapprochent l'une de l'autre; le mouvement entraîne le retournement de tout le train postérieur et, par suite, de l'animal tout entier, qui reprend son activité.

tenu en l'air par les deux pattes postérieures, serrées dans une main de l'opérateur et même par le simple serrement de ses pattes allongées; par la compression des yeux ⁽¹⁾.

L'« immobilisation » est plus ou moins accentuée : elle peut se traduire par une simple immobilité, sur le dos ou sur le ventre, avec les yeux ouverts et conservation des mouvements respiratoires; à l'extrême — et alors les yeux sont rétractés — il peut y avoir arrêt des mouvements respiratoires et insensibilité cutanée telle qu'on peut écraser l'extrémité d'un orteil sans « réveiller » le sujet.

Mais je n'insiste pas actuellement sur ces phénomènes et ne veux en retenir pour l'instant qu'une constatation : on peut, en tirant les deux bras d'un mâle dont le sternum est appuyé sur un support, le mettre en état d'immobilisation. On a de la sorte réalisé une compression de la région sternale analogue à celle qui résulte, chez le mâle en accouplement, de la flexion énergique de ses bras autour du corps de la femelle. On s'explique ainsi l'aspect inerte que présente quelquefois le mâle quand, les yeux rétractés, il laisse ses pattes postérieures fléchies suivre passivement, sous la résistance de l'eau, les mouvements natatoires d'extension et de flexion exécutés par la femelle.

Cet état passif n'est pas continu; il cesse à la suite d'influences que je n'ai pas déterminées encore; il commence, me semble-t-il, quand des mouvements natatoires de la femelle secouent le mâle qu'elle porte et amènent chez celui-ci, par voie réflexe, un renforcement de l'étreinte qui comprime sa région sternale.

La femelle aussi, dans certains cas, peut être en état d'immobilisation : il faut pour cela une compression de la région

(1) En général, me semble-t-il, par toute une série d'excitations cutanées, labyrinthiques, etc. Je n'insisterai pas actuellement sur ce sujet, qui mérite un examen plus approfondi; je soupçonne que l'origine de l'immobilisation, chez les Anoures, réside dans une excitation de centres localisés dans le cerveau moyen, sensibilisés au moment de la reproduction.

sternale par l'étreinte du mâle, ce qui n'a guère lieu, si j'en juge par mes échantillons, que chez la grenouille rousse; une pression latérale sur les flancs, comme celle qui résulte de l'étreinte d'un mâle à bras trop courts, ne suffit pas.

*
* * *

4. *Mouvements convulsifs de ventilation pulmonaire chez le mâle accouplé.* — Durant l'accouplement, on peut parfois observer chez le mâle en état d'immobilisation, sous l'eau, des mouvements convulsifs rythmiques du plancher buccal et des parois abdominales. Peu fréquents les deux ou trois premiers jours, leur fréquence s'accroît avec la durée de l'accouplement; leur rythme peut, dans certains cas, atteindre une oscillation par seconde.

Chaque complexe de mouvements comprend une expiration pulmonaire brusque, dont la secousse redresse la tête du sujet et fait tressaillir les flancs, et immédiatement ensuite vient une inspiration égale. Souvent, après quelques répétitions de la manœuvre, la phase expiratrice devient si courte et l'affaissement du plancher buccal, appliqué sur le dos de la femelle, si minime, que, si l'on n'est pas bien placé pour l'observation, on croirait que les mouvements à rythme accéléré débutent par une inspiration en secousse.

Le phénomène consiste donc en une série de mouvements de ventilation pulmonaire, débutant par l'ouverture de la glotte et l'expiration. Physiologiquement, il conduit à un mélange des masses d'air contenues respectivement dans la cavité des poumons et dans la cavité bucco-pharyngienne; on est donc amené à croire que le stimulus qui déclenche cette série de mouvements est la viciation plus grande de l'air pulmonaire.

Je me suis proposé de vérifier si ces mouvements convulsifs sont une manifestation de dyspnée. Pour cela, j'ai maintenu des Grenouilles sous l'eau, sans leur permettre de renouveler à la surface leur provision d'air : chaque sujet en expérience était

placé dans un bocal de quarante centimètres de hauteur, complètement rempli d'eau et couvert d'une plaque de verre. La Grenouille, qui avait au début de l'expérience gagné le fond du bocal en lâchant de l'air, remontait après un certain temps et venait se heurter à la plaque obturatrice; après des mouvements natatoires plus ou moins répétés, elle se laissait couler au fond, pour recommencer après un nouveau délai.

Une particularité qui frappe rapidement l'expérimentateur est la régularité avec laquelle le sujet effectue ses remontes à la recherche d'air nouveau. En voici le premier exemple, où sont notés, en minutes, les temps qui séparent les remontes successives (Grenouille verte mâle, 29. IV, 20) :

7, 1, 3, 3, 8, 9, 1, 4, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 4, 3, 4, 4, 4, 3, 7, 4, 5, 3, 4, 6, 4, 5, 6, 5, 5, 5, 7, 6, 6, 6, 7, 7, 7 $\frac{1}{2}$, 8 $\frac{1}{2}$. (Total : 3 heures 20 minutes.)

Comme on le voit par cette série de chiffres, les déplacements verticaux, d'environ 40 centimètres, s'espacent d'environ 4 à 5 minutes et, après 2 $\frac{1}{2}$ heures, les intervalles ont une tendance à s'allonger. — Comme point de comparaison, voici la série la moins régulière (Grenouille verte femelle, 30. IV, 20) constatée au cours de six expériences :

53, 3, 25, 1, 2, 2, 3, 2 (*) 19, 2 (*) 12, 2, 2, 10, 5, 2, 5, 2, 2, 7, 3, 11, 5, 3, 4, 8, 11 (**) 6 (**) 8 (**) 4. (Total : 3 heures 44 minutes.)

Or, dans les séries relativement irrégulières, j'ai vu que les plus longs intervalles suivent précisément les remontes où la Grenouille a fait, près de la surface, les mouvements de natation les plus vigoureux et les plus persévérants pour vaincre l'obstacle et atteindre l'atmosphère ⁽¹⁾. Quand, au contraire ⁽²⁾, la Grenouille s'est laissée couler à pic après un seul choc contre le couvercle, elle attend au fond un temps moins long; avant

(1) En (*) de la 2^e série, par exemple.

(2) En (**) de la 2^e série.

d'effectuer une nouvelle ascension. En outre, il arrive, lorsque l'expérience a été suffisamment prolongée ⁽¹⁾, que la Grenouille s'arrête à mi-chemin, incapable de faire les mouvements natatoires nécessaires pour atteindre le haut du bocal.

Je tire de semblables constatations la conclusion que la périodicité observée est due à l'influence, discontinue, de la fatigue résultant des mouvements de natation, fatigue qui inhibe pendant un temps plus ou moins long l'excitation continue, provenant de l'asphyxie. Il est possible que l'insuffisance de la restauration intervienne, avec les progrès de l'asphyxie, pour allonger les périodes.

Mais il se présente au cours de ces tentatives un autre phénomène, qui intervient comme facteur actif ou comme symptôme concomitant : l'état « cataleptique » du sujet.

Après une certaine durée de submersion, une heure ou une heure et demie par exemple, on constate que la Grenouille, qui se laisse couler après une ascension, commence à présenter les allures d'un sujet en « immobilisation réflexe » ; et les symptômes s'accroissent progressivement : relâchement des pattes postérieures, chute sur le dos ou sur le côté, fermeture des yeux. Arrivée au fond, elle met un certain temps avant de rétracter les membres postérieurs, d'ouvrir les yeux, de se rétablir dans la position normale ; puis, après un nouveau délai, réapparaissent les mouvements natatoires.

Quand, l'asphyxie n'ayant pas dépassé le stade de la première série ci-dessus ⁽²⁾, on enlève le couvercle du bocal de façon à permettre à la Grenouille d'atteindre l'air libre, il arrive qu'elle aspire immédiatement, dans la cavité buccale, une quantité d'air suffisante pour flotter ; et elle reste sans mouvement aucun, dans

(1) Les remontes immédiatement suivantes, par exemple.

(2) Dans les conditions où j'ai opéré, la submersion pouvait durer huit à dix heures, avant d'amener la mort du sujet. Je réserve pour une prochaine note l'analyse plus complète des phénomènes de l'asphyxie.

un état identique à celui d'une « immobilisation réflexe » très accentuée. Les mouvements respiratoires manquent; les membres postérieurs sont allongés et flasques; les membres antérieurs sont en état de relâchement musculaire; mais la plupart des excitations (pression sur les flancs, pincement ou attouchement d'un membre) déterminent une contraction des muscles abdominaux et des coassements, la seule réaction apparente dont soit capable l'animal, pendant sept à huit minutes. Puis la contractilité musculaire reparait dans les membres; ensuite la faculté du retournement et les symptômes cataleptiques disparaissent en dix à quinze minutes, dans l'ordre ordinaire. Tous phénomènes qui indiquent une relation étroite entre la sensibilité à la « catalepsie » et l'état asphyxique.

Mais dans le présent paragraphe, après les préliminaires qui précèdent sur les accès périodiques de catalepsie chez les Grenouilles en asphyxie, je ne relèverai qu'un point : c'est qu'au cours des expériences d'asphyxie citées ici apparaissent de temps à autre les mouvements spasmodiques de ventilation pulmonaire dont je cherchais l'origine. Or, je ne les ai vus apparaître que pendant les états « cataleptiques » prononcés; je ne les ai rencontrés que chez les individus (*R. esculenta*, mâles et femelles) prêts à s'accoupler ou chez ceux (*R. fusca*, mâles) qui avaient dépassé de peu de jours le temps du rut.

Je les tiens donc pour des réflexes asphyxiques spéciaux, associés à l'état cataleptique si fréquent, surtout chez le mâle, pendant la période de la reproduction.

*
* * *

5. *Suppression de la respiration pulmonaire chez la femelle pendant l'accouplement.* — Pendant l'accouplement, la pression qu'exercent les deux bras du mâle sur la poitrine de la femelle comprime plus ou moins les deux poumons de celle-ci, dans une mesure qui dépend beaucoup de la taille relative des deux conjoints. Ordinairement, dès le

deuxième jour de l'accouplement, chez la Grenouille rousse ⁽¹⁾, les deux poumons de la femelle sont vides d'air; je l'ai constaté directement par l'autopsie d'une demi-douzaine d'individus; bien plus, l'écrasement des organes est tel que, souvent, des Distomes logés dans les poumons (*Distomum cylindraceum*) en sont exprimés et sortent par les narines ⁽²⁾.

Tout au début de l'accouplement, on peut encore observer chez la femelle de petite taille, qui vient à la surface, des inspirations pulmonaires faibles, se traduisant par un léger soulèvement des flancs. Mais bientôt, les mouvements respiratoires de la femelle ne correspondent plus qu'à une ventilation bucco-pharyngienne.

Dans certains cas remarquables, j'ai pu voir, dans le couple revenu à la surface, la femelle seule exécuter des oscillations respiratoires du plancher buccal : une série de mouvements exagérés, mais qui ne conduisaient pas à un foulement d'air dans les poumons. En effet, *a*) la phase d'aspiration n'était pas accompagnée d'une secousse d'affaissement du plancher buccal, indiquant une expulsion d'air pulmonaire; *b*) le couple flottant ne se soulevait pas sur l'eau, à la suite de ces manœuvres, au-dessus du niveau initial, comme c'eût été le cas s'il y avait eu introduction d'air dans les flotteurs; *c*) l'autopsie, d'ailleurs, révélait la vacuité des poumons.

Or, le fait que la Grenouille femelle, en accouplement, cherche quelquefois, indépendamment du mâle, à remonter à la surface pour prendre de l'air, prouve que sa respiration cutanée est insuffisante. D'autre part, la suppression constante de la respiration pulmonaire, pendant une série de journées, témoigne de

(1) Le phénomène est moins accusé chez le Crapaud commun, espèce chez laquelle les deux bras du mâle ne se rejoignent pas sur la ligne médiane, et chez mes Grenouilles vertes, où les femelles sont souvent de taille beaucoup supérieure à celle des mâles.

(2) Observé une fois aussi chez un mâle.

l'existence d'une respiration bucco-pharyngienne. On a, dans les observations que je viens de rapporter, la preuve directe, qui manquait encore, de la respiration pharyngienne chez la Grenouille.

Une respiration bucco-pharyngienne a été préjugée chez les Amphibiens, à la suite de la constatation que les mouvements oscillatoires du plancher buccal peuvent exister seuls, chez la Salamandre et chez les Grenouilles, pendant un temps assez long, sans intercalation de mouvements correspondant à la ventilation pulmonaire. On concluait de ce fait que ces mouvements du plancher buccal ne doivent pas être uniquement des actes préliminaires de la respiration pulmonaire, mais qu'ils desservent une respiration spéciale, bucco-pharyngienne.

D'ailleurs, on faisait remarquer que la muqueuse de la bouche est richement vascularisée et que ses capillaires ont un aspect variqueux, provenant de diverticules nombreux de leurs parois, qui s'étendent jusque dans l'épithélium. OPPEL ⁽¹⁾ objectait à cela que l'épithélium ne paraît pas modifié en vue d'échanges gazeux et GAUPP ⁽²⁾ signale que la partie postérieure seule de la cavité buccale est irriguée par des branches, à sang veineux, de l'*arteria cutanea magna*, tandis que le reste est desservi par la *carotis interna*, qui charrie du sang très artérialisé.

On a rencontré un argument indirect dans l'existence d'un grand nombre d'Amphibiens urodèles, qui ne possèdent pas de poumons et qui présentent néanmoins, rapides et relativement amples, les mouvements oscillatoires du plancher buccal, qui ont une si grande importance dans la ventilation pulmonaire des autres Amphibiens. On a décrit chez eux une riche vascularisation des parois de la cavité buccale et de l'œsophage, et

⁽¹⁾ OPPEL, *Lehrbuch des vergleichenden mikroskopischen Anatomie*, Bd 2, p. 25, 1900.

⁽²⁾ GAUPP, *ouvrage cité*, p. 21.

WILDER ⁽¹⁾ parle, chez ces Amphibiens exceptionnels, d'un « poumon pharyngo-œsophagien » susceptible d'expansion et de contraction et ayant une importance respiratoire comparable à celle des poumons ordinaires.

MARACCI ⁽²⁾, le premier, en 1894, a défendu, physiologiquement et expérimentalement, l'importance d'une respiration bucco-pharyngienne chez la Grenouille et l'a considérée comme de beaucoup supérieure à celle de la respiration cutanée. Il observait que des Grenouilles auxquelles il avait extirpé les poumons survivaient plus longtemps que des sujets auxquels il avait tamponné la bouche et supprimé de la sorte la possibilité de respirer par la bouche et les poumons. Il constatait aussi que l'émission de CO₂ est plus petite dans ce dernier cas que dans le premier, où peut intervenir une respiration buccale. Mais les expériences de MARACCI sont sujettes à caution, comme l'a relevé KROGH ⁽³⁾ : il ne produit à l'appui de son affirmation que deux expériences, au cours desquelles il trouve pour l'émission de CO₂ des valeurs si supérieures à celles que les autres observateurs ont constatées chez la Grenouille, qu'on doit soupçonner dans ces expériences des erreurs de technique.

En réalité, nous ne possédions aucune preuve directe d'une respiration bucco-pharyngienne chez les Grenouilles; je crois l'avoir fournie, par la simple constatation de la vacuité des poumons chez nombre de Grenouilles femelles en accouplement.

⁽¹⁾ WILDER, *The pharyngo-oesophageal lung of Desmognathus*. (AMERICAN NATURALIST, vol. 35, 1901.)

⁽²⁾ MARACCI, *L'asphyxie chez les animaux à sang froid*. (ARCHIVES ITALIENNES DE BIOLOGIE, t. XXI, 1894.)

⁽³⁾ KROGH, *On the cutaneous and pulmonary respiration of the frog*. (SKAND. ARCHIV FÜR PHYSIOLOGIE, Bd 15, 1904.)

PHYSIQUE ET CHIMIE MATHÉMATIQUES. — Transformations
physiques et chimiques des systèmes de Gibbs,

par TH. DE DONDER, correspondant de la Classe.

A notre connaissance, il n'a pas encore été fait un exposé, à la fois simple, rigoureux et général des lois physiques et chimiques régissant les systèmes de Gibbs. Parmi les théoriciens qui ont le mieux réussi dans cette voie, nous citerons Planck ; sa Thermodynamique jette une grande clarté sur bien des parties de l'ouvrage génial de Willard Gibbs : *Équilibre des systèmes hétérogènes*. (Transactions de l'Académie du Connecticut, 1876.) Remarquons, cependant, que la méthode suivie par Planck conduit encore à des complications inutiles ; parfois, la compréhension est rendue difficile, et même impossible, par des hypothèses superflues ; la théorie développée par Planck se limite souvent à des cas particuliers.

Nous avons repris l'étude des systèmes de Gibbs, en adoptant un point de vue nouveau. Dans cette Note, nous nous proposons de résumer (*) nos hypothèses, notre méthode et les généralisations que nous avons ainsi obtenues. Il est essentiel de remarquer que nos systèmes de Gibbs effectuent de véritables transformations ; au contraire, dans les théories actuellement admises, ces systèmes sont toujours considérés à l'état d'équilibre.

(*) Un exposé détaillé sera donné dans nos « Leçons de Thermodynamique et de Chimie physique » ; la première partie de cet ouvrage paraîtra sous peu.

1. DÉFINITION DES SYSTÈMES DE GIBBS. — Considérons un système comprenant un ou plusieurs systèmes *uniformes* aux points de vue physique et chimique; chacun de ces systèmes uniformes s'appellera une *phase* du système. Soit φ le nombre des phases différentes : on dira que le système donné comprend φ phases.

Dans chacune de ces phases, la pression sera uniforme; celle qui règne dans la phase a ($a = 1, 2, 3, \dots \varphi$) sera désignée par le symbole p^a . De même, le volume de cette phase sera représenté par V^a et sa masse par m^a . La masse m du système total vaudra donc $\sum_a m^a$; elle sera supposée *constante*, pendant toutes les transformations du système; pour chaque transformation infinitésimale de ce système, on aura

$$\boxed{dm = 0} . \quad (1)$$

Nous supposerons que la température est la *même* dans toutes les phases contenues dans le système total; aussi, nous désignerons cette température par le symbole T dépourvu d'indice.

Nous considérerons un système de Gibbs comme une généralisation d'un système uniforme à masse constante.

Nous supposerons que toute transformation de ce système pourra aussi s'effectuer en sens *inverse*.

On aura

$$dQ = dU + \sum_a p^a dV^a, \quad (2)$$

où U représente l'énergie interne du système total, et

$$dQ = T dS, \quad (3)$$

où S représente l'entropie du système total. En rapprochant ces deux relations, nous pourrions écrire

$$dH = - SdT + \sum_a V^a dp^a, \quad (4)$$

en posant

$$H \equiv U - TS + \sum_a p^a V^a. \quad (5)$$

Poursuivons notre généralisation et admettons qu'on aura encore *identiquement*, comme pour les systèmes uniformes,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial T} \equiv -S, \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial p^a} \equiv V^a. \end{array} \right. \quad (7)$$

La fonction H dépend non seulement de la température T et des pressions p^a , mais aussi des masses contenues dans les diverses phases du système; celui-ci renferme *une ou plusieurs espèces de molécules*. Toutes les molécules *identiques* entre elles forment *un constituant* du système; s'il y a c espèces de molécules différentes, on dira qu'il y a c constituants dans le système.

Les masses des constituants contenues dans la phase a seront désignées par

$$m_1^a, m_2^a, \dots, m_\gamma^a, \dots, m_c^a; \quad a = 1, 2, 3, \dots, \varphi.$$

La somme des masses des divers constituants contenues dans la phase a sera désignée par m^a .

La somme des masses d'un même constituant γ contenues dans le système total sera représentée par m_γ .

Le potentiel thermodynamique H est une fonction de T , des p^a et des masses m_γ^a ($\gamma = 1, \dots, c$; $a = 1, \dots, \varphi$) contenues dans le système total. Nous donnerons plus loin les autres hypothèses relatives aux systèmes de Gibbs.

2. TRANSFORMATIONS D'UN SYSTÈME DE GIBBS. — Le potentiel thermodynamique H étant une fonction des variables T , p^a et m_γ^a , nous pourrions toujours écrire

$$dH = d'H + d''H, \quad (8)$$

en posant respectivement

$$'H \equiv \frac{\partial H}{\partial T} dT + \sum_a \frac{\partial H}{\partial p^a} dp^a \quad (9)$$

et

$$d''H \equiv \sum_a \sum_\gamma \frac{\partial H}{\partial m_\gamma^a} dm_\gamma^a.$$

En vertu des hypothèses (6) et (7), on aura

$$\boxed{d''H = 0}.$$

Systèmes de Gibbs à transformations physiques seulement. — Nous supposerons que dans toutes les transformations possibles du système, la masse m_γ de chaque constituant γ demeure invariable; on a donc les c liaisons différentielles

$$\boxed{dm_\gamma = 0} \quad \gamma = 1, \dots, c \quad (11)$$

Pour tout couple massique satisfaisant à la condition

$$dm_\gamma^a + dm_\gamma^{a'} = 0,$$

les autres différentielles massiques étant supposées nulles, on obtiendra une condition correspondante :

$$\boxed{\mathfrak{H}_\gamma^a = \mathfrak{H}_\gamma^{a'}} \quad (12)$$

en posant

$$\mathfrak{H}_\gamma^a \equiv \frac{\partial H}{\partial m_\gamma^a}. \quad (13)$$

Systèmes de Gibbs à transformations physiques et chimiques. — Considérons un système de Gibbs susceptible de se transformer physiquement et aussi chimiquement. Par transformation chimique, on entend une transformation dans laquelle certaines molécules changent d'espèces : il se produit des dissociations et des combinaisons; il en résulte que les constituants pourront changer

de masse; une partie de la masse d'un constituant servira à augmenter la masse d'autres constituants. Les accroissements (positifs ou négatifs) des constituants se font toujours suivant la *loi des proportions* bien connue en chimie; analytiquement, elle s'écrira, pour une transformation chimique déterminée, désignée par le symbole ρ ,

$$\frac{dm_{1\rho}}{n_{1\rho}M_1} = \dots = \frac{dm_{c\rho}}{n_{c\rho}M_c}. \quad (14)$$

Dans cette suite de proportions, les $M_1, \dots, M_c$ représentent respectivement les masses des molécules des constituants 1, 2, ..., c, ou des grandeurs proportionnelles, les môles de ces constituants, par exemple; les $n_{1\rho}, \dots, n_{c\rho}$ représentent des nombres positifs, négatifs ou nuls; $n_{\gamma\rho}$ sera nul si dans la réaction ρ considérée, la masse du constituant correspondant demeure invariable: alors, on pourra supprimer le rapport correspondant à ce constituant, dans (14).

Sommons les antécédents de (14); d'où

$$\sum_{\gamma} n_{\gamma\rho} M_{\gamma} = 0; \quad (15)$$

c'est l'équation de la transformation chimique ρ considérée.

Les masses M_{γ} étant positives, il faut que les $n_{\gamma\rho}$ ne soient pas tous de même signe. Les chimistes ont l'habitude d'écrire cette dernière équation en groupant dans un même membre tous les termes qui ont un signe commun; nous conviendrons que les termes du membre de gauche se retrouvent dans (15) avec un coefficient $n_{\gamma\rho}$ positif; ceux du membre de droite y figurent donc avec un coefficient négatif. Si l'un des constituants γ_1 du membre de droite ($n_{\gamma_1\rho} < 0$) se forme ($dm_{\gamma_1\rho} > 0$), tous les autres constituants du même membre se forment aussi et tous les constituants de l'autre membre diminuent de masse: on dit que la réaction ρ a lieu de gauche à droite; les rapports

(14) sont alors tous négatifs. Dans le cas contraire ($n_{\gamma 1\rho} < 0$, $dm_{\gamma 1\rho} < 0$), la réaction a lieu de droite à gauche; les rapports (14) sont tous positifs.

Supposons, pour simplifier l'exposé, que le système soit dépourvu de parois semi-perméables : les $(\varphi - 1)c$ conditions (12) seront satisfaites pour toutes les transformations de notre système. La relation (10) pourra donc s'écrire

$$\sum_i \mathfrak{H}_{\gamma} \sum_a dm_{\gamma}^a = 0, \quad (16)$$

en représentant par un même symbole $\mathfrak{H}_{\gamma}$ toutes les fonctions $\mathfrak{H}_{\gamma}^1, \dots, \mathfrak{H}_{\gamma}^{\varphi}$ égales entre elles, en vertu de (12).

La relation (16) devient, en vertu de (14),

$$\boxed{\sum_i \mathfrak{H}_{\gamma} n_{\gamma\rho} M_{\gamma} = 0} \quad (17)$$

S'il y a r réactions ou transformations chimiques possibles, on aura r relations ou conditions (17); celles-ci représentent autant de lois qui régiront les transformations physiques et chimiques du système de Gibbs étudié.

3. LOIS PHYSIQUES DES SYSTÈMES DE GIBBS. — En général, dans une transformation infinitésimale donnée, le système de Gibbs passera de l'état $T, p^1, \dots, p^{\varphi}, m_{\gamma}^a (\gamma = 1, \dots, c; a = 1, \dots, \varphi)$ à l'état infiniment voisin $T + dT, p^a + dp^a, m_{\gamma}^a + dm_{\gamma}^a$.

Chacune des conditions établies ci-dessus (12) devra être satisfaite par ce nouvel état; on aura donc

$$d\mathfrak{H}_{\gamma}^a = d\mathfrak{H}_{\gamma}^{a'}. \quad (18)$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathfrak{H}_{\gamma}^a - \mathfrak{H}_{\gamma}^{a'})}{\partial T} dT + \frac{\partial \mathfrak{H}_{\gamma}^a}{\partial p^a} dp^a - \frac{\partial \mathfrak{H}_{\gamma}^{a'}}{\partial p^{a'}} dp^{a'} \\ + \sum_{\gamma'} \left(\frac{\partial \mathfrak{H}_{\gamma}^a}{\partial m_{\gamma'}^a} dm_{\gamma'}^a - \frac{\partial \mathfrak{H}_{\gamma}^{a'}}{\partial m_{\gamma'}^{a'}} dm_{\gamma'}^{a'} \right) = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

si nous *admettons* que chaque $\mathfrak{H}^a$ ne dépend que de T , de p^a et des $m_1^a, \dots, m_c^a$.

Chacune des relations (19) exprime une loi différentielle physique du système de Gibbs. Nous allons passer à l'*interprétation physique* de (19).

Posons

$$r_{\gamma}^{aa'} \equiv \frac{\delta Q}{\delta m_{\gamma}^{a'}} \equiv - \frac{\delta Q}{\delta m_{\gamma}^a}, \quad (20)$$

où δQ représente la quantité de chaleur reçue par le système pendant une transformation virtuelle dans laquelle toutes les variables sont constantes, excepté m_{γ}^a et $m_{\gamma}^{a'}$.

Appelons $r_{\gamma}^{aa'}$ la chaleur latente de transformation relative au constituant γ passant de la phase a à la phase a' .

Le coefficient de dT dans (19) vaut la chaleur latente $r_{\gamma}^{aa'}$, divisée par la température T .

Dans l'interprétation des coefficients de dp^a dans (19), nous sommes amené à poser

$$v_{\gamma}^a \equiv \frac{\delta V^a}{\delta m_{\gamma}^a}; \quad (21)$$

v_{γ}^a est le volume spécifique du constituant γ dans la phase a .

Posons aussi

$$\Delta_{\gamma}^{aa'} \equiv v_{\gamma}^{a'} - v_{\gamma}^a, \quad (22)$$

et appelons ce symbole la *dilatation due au constituant γ passant de la phase a à la phase a'* .

Le coefficient de dp^a dans (19) v_{γ}^a .

Passons, enfin, à l'interprétation physique de la somme qui figure dans (19). Pour atteindre ce but, posons

$$\sigma_{\gamma}^a \equiv \frac{m_{\gamma}^a}{m^a}, \quad (23)$$

le symbole σ_γ^a représente la concentration du constituant γ dans la phase a par rapport à la masse m^a contenue dans cette phase a .

Introduisons maintenant une hypothèse, admise par Gibbs, à savoir que la fonction $\mathfrak{H}_\gamma^a$ ne dépend que des concentrations $\sigma_1^a, \sigma_2^a, \dots, \sigma_c^a$ des divers constituants contenus dans cette phase a , de la température T et de la pression p^a qui règnent dans ce corps $p^a V^a$.

Posons

$$c_{\gamma',\gamma}^a \equiv \frac{m_{\gamma'}^a}{m_\gamma^a}, \quad (24)$$

c'est la concentration, dans la phase a , du constituant γ' par rapport au constituant γ .

Par suite de transformations analytiques, que nous passons, l'équation différentielle (19) pourra s'écrire

$$\boxed{\begin{aligned} & \frac{r_\gamma^{aa'}}{T} dT + v_\gamma^a dp^a - v_{\gamma'}^{a'} dp^{a'} \\ & + \sum_{\gamma'} \left[\frac{\partial^2 H}{\partial m_\gamma^a \partial m_{\gamma'}^a} m_\gamma^a dc_{\gamma',\gamma}^a - \frac{\partial^2 H}{\partial m_{\gamma'}^{a'} \partial m_\gamma^a} m_{\gamma'}^{a'} dc_{\gamma',\gamma}^{a'} \right] = 0 \end{aligned}} \quad (25)$$

Ces relations sont extrêmement fécondes; elles fournissent les lois fondamentales de l'ébullition, de la sublimation, de la distillation, de la fusion d'un solide double, des eutectiques, de l'osmose, etc.

Généralisation de la loi de Braun. — Considérons un système de Gibbs comprenant autant de constituants que de phases. Supposons, en outre, que dans la phase 1 ne se trouve que le constituant 1; dans la phase 2, le constituant 2; et ainsi de suite, jusqu'à la phase $\varphi-1$, dans laquelle ne se trouve que le constituant $c-1$ (ou $\varphi-1$). Dans la dernière phase φ , il y a, au contraire, de tous les constituants 1, 2, 3, ... φ .

En opérant comme ci-dessus, nous trouvons, par des transformations purement analytiques, la loi de Braun généralisée

$$\boxed{\sum_a \left(\frac{r_a^{\alpha\varphi}}{T} \cdot \frac{\partial \sigma_a^{\varphi}}{\partial p} + \Delta_a^{\alpha\varphi} \frac{\partial \sigma_a^{\varphi}}{\partial T} \right) = 0} \quad (26)$$

$a = 1, 2, \dots, (\varphi - 1).$

Dans le cas où $c = 2$, on trouve la loi de Braun

$$\frac{r_1^{42}}{T} \cdot \frac{\partial \sigma_1^2}{\partial p} + \Delta_1^{42} \frac{\partial \sigma_1^2}{\partial T} = 0. \quad (27)$$

4. LOIS CHIMIQUES DES SYSTÈMES DE GIBBS SUSCEPTIBLES DE TRANSFORMATIONS PHYSIQUES ET CHIMIQUES. — En différentiant les relations (17), nous obtenons les lois chimiques différentielles des systèmes de Gibbs :

$$\sum_{\gamma} n_{\gamma\rho} M_{\gamma} \left[\frac{\partial \mathcal{H}_{\gamma}^{\alpha}}{\partial T} dT + \frac{\partial \mathcal{H}_{\gamma}^{\alpha}}{\partial p} dp + \sum_{\gamma'} \frac{\partial \mathcal{H}_{\gamma}^{\alpha}}{\partial m_{\gamma'}^{\alpha}} dm_{\gamma'}^{\alpha} \right] = 0, \quad (28)$$

où l'indice supérieur α est une fonction de γ et sert à indiquer dans quelle phase on a pris le constituant γ .

L'interprétation des coefficients de dT et de dp se fait encore d'une manière purement analytique et conduit à considérer une transformation virtuelle bien déterminée dans laquelle toutes les variables demeurent constantes, excepté les variables massiques qui figurent dans les relations suivantes :

$$\frac{\delta m_1^{\alpha(1)}}{n_{1\rho} M_1} = \dots = \frac{\delta m_c^{\alpha(c)}}{n_{c\rho} M_c} \equiv \delta \mu_{\rho}. \quad (29)$$

Si nous représentons par δQ la quantité de chaleur reçue par le système pendant cette transformation, nous poserons

$$r_{\rho} \equiv \frac{\delta Q}{\delta \mu_{\rho}}; \quad (30)$$

ce symbole s'appelle la *chaleur latente* de la réaction virtuelle (29).

Nous poserons de même

$$\Delta_p \equiv - \frac{\delta V}{\delta \mu_p}; \quad (31)$$

ce symbole s'appelle la *dilatation* due à la réaction virtuelle (29).

Par des transformations purement analytiques, nous mettons les relations (28) sous la forme

$$\frac{r_p}{T} dT + \Delta_p dp = \sum_{\gamma} n_{\gamma p} M_{\gamma} m_{\gamma}^{\alpha} \sum_{\gamma'} \frac{\partial^2 H}{\partial m_{\gamma}^{\alpha} \partial m_{\gamma'}^{\alpha}} dc_{\gamma\gamma'}^{\alpha}. \quad (32)$$

Dans le cas où α se réduit à une constante a , c'est-à-dire si toutes ces considérations se rapportent à l'unique phase a , les relations (32) pourront s'écrire

$$\boxed{\frac{r_p^a}{T} dT + \Delta_p^a dp = \sum_{\gamma\gamma'} \frac{\partial^2 H}{\partial m_{\gamma}^a \partial m_{\gamma'}^a} m_{\gamma}^a m_{\gamma'}^a \left(\frac{n_{\gamma p}}{v_{\gamma}^a} - \frac{n_{\gamma' p}}{v_{\gamma'}^a} \right) d \log \frac{v_{\gamma'}^a}{v_{\gamma}^a}}, \quad (39)$$

où

$$v_{\gamma}^a \equiv \frac{m_{\gamma}^a}{M_{\gamma}}. \quad (34)$$

Remarquons qu'entre r_p et r_p^a , il existe une identité remarquable; il en est de même pour Δ_p et Δ_p^a .

5. LOIS CHIMIQUES DES SYSTÈMES DE GIBBS SUSCEPTIBLES DE TRANSFORMATIONS CHIMIQUES SEULEMENT. — Pour fixer les idées, considérons le cas important où *chaque constituant* du système de Gibbs ne se trouve que dans *une seule phase* de celui-ci. En partant de la relation fondamentale (10), on obtiendra, par des transformations analytiques, la relation

$$\boxed{\frac{r}{T} dT + \Delta dp = \sum d\mu} \quad (35)$$

relative à la réaction chimique

$$\frac{dm_1}{n_1 M_1} = \dots = \frac{dm_c}{n_c M_c} = d\mu. \quad (36)$$

On aurait autant de ces relations (35) qu'il y aurait de réactions différentes (36).

Dans la loi (35), on a posé

$$\Sigma \equiv - \sum_{\gamma\gamma'} \frac{\partial^2 H}{\partial v_\gamma^\alpha \partial v_{\gamma'}^\alpha} \left(\frac{n_\gamma^\alpha}{v_\gamma^\alpha} - \frac{n_{\gamma'}^\alpha}{v_{\gamma'}^\alpha} \right)^2 v_\gamma^\alpha v_{\gamma'}^\alpha. \quad (37)$$

Nous verrons, un peu plus loin, que cette expression Σ est toujours *positive* pendant toutes les transformations d'un système de Gibbs.

Lois de van 't Hoff et de Le Chatelier. — Considérons une transformation *isobarique* de notre système de Gibbs; on aura, en vertu de (36),

$$\left(\frac{d\mu}{dT} \right)_p = \frac{r}{T \Sigma}, \quad (38)$$

l'indice p servant à rappeler que la pression demeure constante pendant la réaction chimique considérée.

L'interprétation physico-chimique de (38) constitue *la loi de van 't Hoff*.

Considérons maintenant une transformation *isothermique* de notre système; on aura, en vertu de (35),

$$\left(\frac{d\mu}{dp} \right)_T = \frac{\Delta}{\Sigma}. \quad (39)$$

L'interprétation physico-chimique de (39) constitue *la loi de Le Chatelier*.

Ces deux lois sont susceptibles de représentations graphiques remarquables qui fournissent de nouvelles interprétations connues sous le nom de *loi de Lenz* ou *loi de modération*.

6. RÈGLE DES PHASES. — Dans le cas où tout constituant peut passer d'une phase à toute autre, l'excès du nombre des variables *définies en chaque point* (T, p, σ_γ^a) sur le nombre de conditions auxquelles ces variables doivent toujours satisfaire, est égal à

$$\boxed{\nu = 2 + (c - r) - \varphi} \quad (40)$$

Le symbole ν indique le *nombre de degrés de liberté* ou la *variance* du système de Gibbs considéré. La relation (40) exprime la *règle des phases*.

Le problème des masses. — Ce problème consiste à déterminer les masses de chaque constituant dans chacune des phases.

Remarquons qu'on a (23)

$$m_\gamma = \sum_a \sigma_\gamma^a m^a. \quad (41)$$

$$a = 1, 2, \dots, \varphi.$$

Cas des transformations physiques. — Donnons-nous les masses totales m_γ des c constituants. On voit aisément qu'on devra encore se donner les valeurs de *deux* autres variables pour que le problème soit déterminé. Dans la discussion de ce problème, on est amené à distinguer trois cas, suivant que le système est invariant, monovariant ou plurivariant.

Cas des transformations chimiques. — Donnons-nous les masses totales m_γ de $(c - r)$ constituants. On voit aisément qu'on devra encore se donner les valeurs de *deux* autres variables pour que le problème soit déterminé. Dans la discus-

sion de ce problème, on est amené à distinguer trois cas, suivant que le système est invariant, monovariant ou plurivariant.

Le nombre $(c - r)$ n'est autre que le nombre des *constituants indépendants*.

7. TRANSFORMATIONS D'UN SYSTÈME QUELCONQUE. — Les systèmes réalisés dans la nature pourront être idéalisés et remplacés par nos systèmes de Gibbs. Cette substitution sera d'autant plus parfaite que le système réalisé est plus près d'un état d'équilibre. Quand le potentiel thermodynamique H du système réalisé atteint une valeur minimum, par rapport à tous les états voisins de même pression et de même température, le système considéré sera en équilibre.

Posons

$$\Delta H \equiv \delta'' H + \frac{1}{2!} \delta''^2 H + \frac{1}{3!} \delta''^3 H + \dots, \quad (42)$$

où le symbole δ'' sert à rappeler qu'il s'agit d'états infiniment voisins de l'état d'équilibre, ayant même pression et même température.

Ce minimum sera obtenu si l'on a

$$\begin{cases} \delta'' H = 0, \\ \delta''^2 H > 0. \end{cases} \quad (43)$$

La première condition est identique à la condition (10) qui a servi de base à toute l'étude de nos systèmes de Gibbs.

La seconde condition peut s'écrire, après de nombreuses transformations analytiques,

$$\delta''^2 H \equiv - \sum_a \sum_{\gamma\gamma'} \frac{\partial^2 H}{\partial m_\gamma^a \partial m_{\gamma'}^a} m_\gamma^a m_{\gamma'}^a (\delta \log c_{\gamma\gamma'}^a)^2 > 0. \quad (44)$$

Il en résulte immédiatement que, dans l'état d'équilibre, toutes les dérivées secondes du potentiel H :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial m_\gamma^a \partial m_{\gamma'}^a} \quad (45)$$

$\gamma \neq \gamma'$

sont *négatives*. Il s'agit, bien entendu, des dérivées secondes de H par rapport aux masses de deux constituants *différents* pris dans une même phase. Remarquons aussi que toutes les lois données ci-dessus ne dépendent que de ces dérivées secondes.

Toutes les dérivées (45) étant négatives, on voit immédiatement que l'expression $\sum$ fournie par (37) est toujours *positive*.

A partir d'un état d'équilibre d'un système, considérons tous les états voisins pour lesquels les dérivées secondes (45) sont *encore négatives*; l'ensemble de tous ces états constituera le domaine relatif à l'état d'équilibre considéré. Dans chacun de ses domaines, un système quelconque pourra être assimilé à l'un de nos systèmes de Gibbs, et cette assimilation sera d'autant plus parfaite que le système sera plus près d'un état d'équilibre.

Les transformations d'un système dans un de ses domaines ne peuvent être confondues avec des déplacements d'équilibre.

GÉODÉSIE. — Nouvelle mesure de la base géodésique de Lommel,

par M. DEHALU, professeur à l'Université de Liège ⁽¹⁾.

Je crois intéressant de faire connaître les résultats d'une nouvelle mesure de la base géodésique de Lommel exécutée sous ma direction, en septembre-octobre 1912, à l'aide du procédé Jäderin-Guillaume ⁽²⁾, au cours des opérations entreprises en vue de la confection de la carte générale des concessions minières de la Campine qui m'avait été confiée par l'Association charbonnière de ce bassin ⁽³⁾.

La base géodésique de Lommel est, comme on sait, divisée en deux sections, dont les extrémités ou termes sont marqués sur le terrain par des repères spéciaux qui sont décrits dans la *Triangulation du Royaume de Belgique*, 1^{re} partie, livre 2, p. 18.

Nous ajouterons seulement que les bornes en bronze surmontant les repères souterrains avaient été garnies, depuis une époque plus récente, de gaines en maçonnerie, puis enfoncées sous des buttes de sable, de manière à ne laisser à découvert que les parties supérieures des bornes.

Nous commençâmes par faire dégager les trois termes qui, les mesures effectuées, furent remis dans l'état où nous les avons trouvés. Tout ce travail, surveillé par les autorités militaires du camp de Beverloo, fut conduit avec la plus grande prudence et le souci de respecter l'œuvre des géodésiens de 1851.

Nos mesures furent effectuées à l'aide de deux fils de 24 mètres en invar qui avaient été étalonnés par le Bureau international des Poids et Mesures de Breteuil, Sèvres, et qui nous avaient

(1) Présenté par M. C. LE PAIGE.

(2) J.-RENÉ BENOIT et CH.-ED. GUILLAUME, *Les nouveaux appareils pour la mesure rapide des bases géodésiques*. Paris, Gauthier-Villars, 1906.

(3) Commencée en 1909, cette carte fut achevée en 1914, à la veille de la guerre. Les difficultés du moment n'ont pas encore permis la publication in extenso des résultats de cet important travail.

déjà servi à mesurer une base de 2,210 mètres environ dans la vallée de la Meuse, aux environs de Mechelen, en août 1910.

A Lommel, mes collaborateurs étaient : M. le capitaine G. Maury, actuellement directeur au Ministère des Colonies, feu le lieutenant M. Decraene, docteur en sciences physiques et mathématiques, tombé glorieusement au combat d'Over-de-Vaart, le 12 septembre 1914, et M. Ledoux, géomètre aux charbonnages de Beeringen. Une dizaine de soldats, mis obligeamment à notre disposition par M. le commandant Jauquet, complétaient nos équipes et assuraient, avec quelques-uns de nos aides habituels, le transport, tout le long de la base, du matériel nécessaire aux mesures des nombreuses portées.

Les journées des 27 et 28 septembre furent entièrement consacrées à l'instruction de nos brigades et à une première mesure de la base.

Sa longueur étant d'environ 2,300 mètres, nous pouvions considérer la vitesse de la marche réalisée comme satisfaisante pour un début. Nous nous promettions de faire mieux pour une seconde mesure; mais, malheureusement, les événements nous furent contraires.

Le 29 septembre, la pluie nous obligea à suspendre les opérations après la mesure de la dix-huitième portée; puis le rappel à Bruxelles, ce même jour, de M. le capitaine Maury, nous priva pour la suite d'une collaboration particulièrement précieuse. Le 30 septembre, nous achevâmes la première section et nous mesurâmes 19 portées de la seconde section. Pendant la nuit du 30 septembre au 1^{er} octobre, un ouragan détruisit le signal en bois que nous avions fait élever au-dessus du terme oriental et renversa les balises qui indiquaient l'alignement de la base.

Le 1^{er} octobre, vers 10 heures, le temps se remit au beau; mais le licenciement de la classe de milice nous priva des soldats du commandant Jauquet. Nous employâmes cette journée à réparer les dégâts de la nuit, tandis que le lieutenant Decraene nous quitta pour rejoindre son corps. Le 2 octobre, de jeunes

recrues, arrivées la veille au Camp, ayant été mises à notre disposition, nous nous décidâmes à poursuivre les opérations avec ce nouveau personnel, qu'il fallut réinstruire.

Malgré tous ces incidents, qu'il était nécessaire de rapporter parce qu'ils pourraient avoir exercé une influence sur nos résultats, la précision atteinte nous semble assez satisfaisante.

Le tableau suivant résume les valeurs obtenues pour les deux sections de la base. Les troisième et quatrième colonnes renseignent seulement les millimètres des longueurs mesurées dont les moyennes figurent dans la cinquième colonne :

SECTIONS.	Nombre de portées.	Mesures.			Erreurs probables.
		Première.	Deuxième.	Moyennes.	
A-C	55	69.45	72.68	1331071.07	± 1.09
B-C	40	44.52	46 90	969515.71	0.80
TOTAL.	95			2300586 78	

Pour obtenir la longueur finale de la base, il faut encore corriger le résultat ci-dessus de la réduction au niveau de la mer. Cette correction est donnée par la formule

$$x = L \frac{h}{R + h},$$

où L représente la longueur mesurée, h l'altitude de la base au-dessus du niveau de la mer et R le rayon terrestre. Prenant ici

$$h = 48 \text{ mètres} \quad \text{et} \quad R = 6.373.000 \text{ mètres},$$

on trouve

$$x = 17^{\text{mm}}95,$$

valeur qu'il faut retrancher de la base mesurée.

La valeur définitive de la base de Lommel réduite au niveau de la mer est alors

$$2.300.568^{\text{mm}}83.$$

Pour évaluer l'erreur probable de ce résultat, il faut analyser les diverses erreurs qui peuvent affecter les observations. Nous trouvons ainsi :

1° Erreur probable du prototype. On sait que l'étalement des fils est effectué au pavillon de Breteuil au moyen d'une base murale de 24 mètres. Sa longueur a été déterminée au moyen d'une règle prototype en invar de 4 mètres de longueur dont l'erreur probable peut être évaluée à $\pm 0^{\text{mm}}0001$; son effet sur la longueur de la base est $\pm 0^{\text{mm}}23$.

2° L'erreur probable de la base murale à un moment donné ne dépasse pas $\pm 0^{\text{mm}}01$; d'où, pour les 95 portées que comporte la base de Lommel, une erreur probable de $95 \times 0.01 = \pm 0^{\text{mm}}95$.

3° L'erreur probable de la détermination de la longueur d'un fil à l'aide de la base murale peut être estimée à $\pm 0^{\text{mm}}009$; comme nous avons fait usage de deux fils, l'erreur probable relative est ici

$$\pm \frac{0.009 \times 95}{\sqrt{2}} = \pm 0^{\text{mm}}60.$$

4° L'erreur probable qui pourrait résulter de l'ignorance de la température vraie des fils est ici vraisemblablement négligeable. En effet, les températures, prises au thermomètre fronde, n'ont varié que de 8° à 18° pendant la première mesure et de 11° à 17°5 au cours de la seconde. L'insolation fut faible dans la première opération et nulle dans la seconde. On peut donc admettre que les températures des fils furent voisines de celles de l'air au moment des observations. D'ailleurs un écart de quelques degrés serait sans influence appréciable, vu le faible coefficient de dilatation des fils.

5° L'erreur probable de la mesure est ± 1.35 ; elle a été déduite de la formule $\pm \sqrt{\Sigma \varepsilon^2}$, où ε est l'erreur probable de la mesure d'une section.

Nous pouvons donc conclure que l'erreur probable de la base de Lommel, telle qu'elle résulte de nos mesures, est

$$\pm \sqrt{0.23^2 + 0.95^2 + 0.60^2 + 1.35^2} = \pm 1^{\text{mm}}77.$$

La valeur de la base de Lommel, déduite des observations faites à Lommel en 1852 et adoptée pour le calcul de la triangulation de la Belgique, était

$$2.300.572^{\text{mm}}13$$

avec une erreur probable de $\pm 1^{\text{mm}}36$ ⁽¹⁾.

L'écart entre cette détermination et la mienne est de $3^{\text{mm}}30$ seulement ; il est de l'ordre des erreurs accidentelles des mesures.

L'intérêt de cette constatation est d'abord de montrer la précision des deux procédés et ensuite de justifier une correction systématique qui fut apportée après coup aux mesures faites en 1852 et qui s'élevait à $12^{\text{mm}}52$ pour la base totale. Elle résultait d'une comparaison faite, à Ostende, entre deux mesures obtenues, l'une avec des règles dont les barres de support avaient été fixées vers leurs extrémités et l'autre avec des règles entièrement libres. La différence obtenue fut appliquée proportionnellement à la base de Lommel, qui avait été mesurée avec des règles serrées ⁽²⁾.

Nos mesures semblent donc bien confirmer cette correction.

⁽¹⁾ Cf. *Triangulation du Royaume de Belgique*, 1^{re} partie, livre 2, pp. 200 et suivantes.

⁽²⁾ Cf. *Triangulation du Royaume de Belgique*, 1^{re} partie, livre 2, p. 306.

Assemblée générale extraordinaire du samedi 5 juin 1920.

Prennent place au bureau : MM. J. Brunfaut, président de l'Académie, directeur de la Classe des beaux-arts ; J. Lameere, directeur de la Classe des lettres et des sciences morales et politiques ; A. Gravis, directeur de la Classe des sciences ; Paul Pelseneer, secrétaire perpétuel.

Sont présents :

CLASSE DES SCIENCES. — MM. C. le Paige, J. Deruyts, Léon Fredericq, J. Neuberg, A. Lameere, Ch.-J. de la Vallée Poussin, Max Lohest, Fr. Swarts, Jean Massart, A. Demoulin, A. Rutot, V. Willem, P. Stroobant, Ch. Julin, J. Verschaffelt, G. Lecointe, Émile Marchal, J. Cornet, Pierre Nolf, J. Bordet, *membres* ; L. Crismer, Th. De Donder, *correspondants*.

CLASSE DES LETTRES ET DES SCIENCES MORALES ET POLITIQUES. — MM. Goblet d'Alviella, Paul Thomas, J. Leclercq, Maurice Wilmotte, H. Pirenne, A. Rolin, Maurice Vauthier, J. Vercoullie, G. De Greef, J.-P. Waltzing, E. Hubert, L. de la Vallée Poussin, Léon Parmentier, dom Ursmer Berlière, J. Bidez, G. Cornil, L. Dupriez, *membres* ; H. Carton de Wiart, Paul Hymans, P. Errera, Jean Capart, *correspondants*.

CLASSE DES BEAUX-ARTS. — MM. G. De Groot, Émile Mathieu, Louis Le Nain, Léon Frédéric, Lucien Solvay, G. Hulin de Loo, S. Dupuis, Fernand Khnopff, A. Dumont, Paul Bergmans, Adolphe Max, Ernest Verlant, *membres*.

Absences motivées : MM. de Hemptinne, membre ; Fourmarier, correspondant de la Classe des sciences ; Mahaim, membre, et Wodon, correspondant de la Classe des lettres ; L. Du Bois, membre de la Classe des beaux-arts.

Le procès-verbal de l'Assemblée du 20 mai est lu et approuvé.

PRÉROGATIVES ACADÉMIQUES.

M. le Président annonce à l'Assemblée que, conformément à la décision prise par l'Académie, il s'est rendu auprès de M. le Premier Ministre pour lui rappeler toutes les prérogatives revendiquées. M. le Premier Ministre lui a fait connaître qu'il a transmis à son collègue des Sciences et des Arts la demande de l'Académie, mais qu'à son avis, le nombre des prérogatives revendiquées est un peu exagéré. Le département des Sciences est occupé à examiner la question, fait une enquête sur la situation dans les pays étrangers et décidera d'après les résultats de son enquête.

M. PIRENNE insiste pour que la question reste à l'ordre du jour de l'Assemblée générale, pour le cas où la réponse attendue tarderait à être donnée.

M. SWARTS fait remarquer que l'enquête à laquelle il est fait allusion a déjà été faite par les auteurs du rapport transmis au Gouvernement et que c'est en se basant sur les résultats de cette enquête que les revendications académiques ont été formulées.

L'Assemblée décide que la question reste à l'ordre du jour.

CRÉATION D'UNE ACADEMIE DE LITTÉRATURE FRANÇAISE.

Après une discussion, à laquelle prennent part MM. Leclercq, Pirenne, Wilmotte, Hulin de Loo, Vauthier, comte Goblet d'Alviella, Carton de Wiart, L. de la Vallée Poussin, Lecointe, Rolin et Errera, une proposition de M. le comte Goblet d'Alviella, tendant à renvoyer la question à une Commission, est repoussée.

La proposition suivante, déposée par M. Swarts et formulant

un vœu émis par M. Pirenne, est finalement adoptée par 33 voix contre 13:

« L'Académie royale de Belgique, maintenant sa décision du 3 novembre 1919, de ne pas constituer une quatrième Classe pour les Littérateurs et de ne pas changer sa constitution actuelle, — voulant toutefois rendre hommage au développement et à l'éclat de la littérature belge de langue française, émet le vœu qu'il soit créé, en dehors d'elle, une Académie de Littérature française. »

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

- Alliaume (Maurice)*. Cours d'astronomie, partie générale élémentaire. Louvain et Paris, 1920; in-8° (pp. xiii-368).
- Duhamel (Georges)*. L'acide thyminique (solurol) dans la thérapeutique des maladies goutteuses. Paris, 1909; in-8° (156 p.).
- Mastrodomenico (Francesco)*. Il vuoto artificiale nella creazione. Barranquilla, 1920; in-8° (318 p.).
- Osborn (H.-F.)*. A Naturalist in the Bahamas. John. I. Northrop. October, 12, 1861; June 25, 1891. A memorial volume edited with a biographical introduction. New-York, 1910; in-8° (xv-281 p., planches, 1 portrait, rel. éditeur).
- Picard (Émile)*. Notice historique sur la vie et l'œuvre de lord Kelvin. Paris, 1919; in-4° (39 p.).
- Reynaud C.*. Étude sur le système solaire. Nouvelle loi des distances des planètes et des satellites. Paris, 1919; in-8° (82 p.).
- Rutot (A.)*. Le quartenaire du Nord de la France et de la Belgique d'après la classification de M. le prof. V. Commont. Bruxelles, 1920; extr. in-8° (pp. 31-42, pp. 151-196).
- Les grandes mutations intellectuelles de l'humanité, 2^e partie. Où allons-nous? Bruxelles, 1920; in-16 (188 p.).
- GAND. *Société royale de Médecine*. Le docteur Ch. de Bersaques. Gand, 1920; in-8° (12 p., 1 portrait).
-

TABLE DES MATIÈRES

Séance du 5 juin 1920.

M. le Directeur félicite M. Swarts, promu officier de l'Ordre de Léopold, avec rayure d'or	243
CORRESPONDANCE : Remerciements de la Société zoologique et de M. Poma, qui ont reçu des subventions de la Fondation De Potter, et de M. Kufferath à qui la Classe a accordé une mention au concours pour le Prix Léo Errera. — Une demande d'échange présentée par la Société hellénique d'agriculture. — Une demande de l'Union des associations internationales de voir l'Académie représentée à son Congrès. — M. Renier, directeur du service géologique, demande les quatre cartes d'un mémoire couronné de M. De Dorlodot. — L'École d'anthropologie de Paris demande à l'Académie de se faire représenter à la réunion préparatoire pour la fondation d'un Institut international. — M. Lecointe demande à être remplacé comme délégué de la Classe à la sous-commission de la publication du 150 ^e anniversaire de l'Académie. — M. Stroobant désigné pour le remplacer. — M. Spelkens adresse à la Classe trois mémoires. — Hommages d'ouvrages.	293
RAPPORTS : Sur les ouvrages présentés pour la quatrième période du prix E. Laurent, M. Hauman lauréat	295
COMITÉ SECRET	295
REPRÉSENTATION DE LA BELGIQUE AU « RAMSAY MÉMORIAL FUND »	295
INTERNATIONAL CATALOGUE OF SCIENTIFIC LITTERATURE.	295
SÉANCE PUBLIQUE ANNUELLE.	295
COMMUNICATIONS	296
PRIX E. LAURENT. — Rapports de MM. A. Gravis, Massart et Marchal	296

Communications et Lectures.

ZOOLOGIE. — <i>Observations sur la respiration des amphibiens</i> (1 ^{re} note) (1 diagramme), par Victor Willem	298
PHYSIQUE ET CHIMIE MATHÉMATIQUE. — <i>Transformations physiques et chimiques des systèmes de Gibbs</i> , par Th. De Donder	315
GÉODÉSIE. — <i>Nouvelle mesure de la base géodésique de Lommel</i> , par M. Dehalu.	329

Assemblée générale extraordinaire du 5 juin 1920.

PRÉROGATIVES ACADÉMIQUES	335
CRÉATION D'UNE ACADÉMIE DE LITTÉRATURE FRANÇAISE	335
BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.	336

ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

BULLETIN

DE LA

CLASSE DES SCIENCES

1920 — N° 7



BRUXELLES

MAURICE LAMERTIN

LIBRAIRE-ÉDITEUR

Rue Coudenberg, 58-62

M. HAYEZ

IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE

Rue de Louvain, 112

1920

Séance du samedi 3 juillet 1920, à 2 heures.

M. A. GRAVIS, directeur de la Classe.
M. PAUL PELSENEER, secrétaire perpétuel.

Sont présents : MM. G. CESARO, vice-directeur, C. le Paige, Léon Fredericq, A. Lameere, Ch.-J. de la Vallée Poussin, Max. Lohest, Jean Massart, A. Rutot, Victor Willem, P. Stroobant, Ch. Julin, J. Verschaffelt, Émile Marchal, J. Cornet, Pierre Nolf, *membres*; M. Stuyvaert, V. Grégoire, Th. De Donder, Paul Fourmarier, O. Van der Stricht, A. Dony-Hénault, *correspondants*.

Absences motivées : MM. Swarts, Demoulin et Lecointe, *membres*; H. de Dorlodot, *correspondant*.

M. le Directeur félicite M. Rutot élu membre honoraire de la « Society of Antiquaries of London ».

CORRESPONDANCE.

M. Dony-Hénault, correspondant, et Sir W. Pope, associé, remercient pour leur élection.

Le Secrétaire de l'Institut central de météorologie et de géodynamique de Vienne signale la lamentable situation des familles des fonctionnaires de cet Institut.

La Société belge d'otologie, de rhinologie et de laryngologie annonce que son 21^e Congrès se tiendra les 10, 11 et 12 juillet.

M. Gilkinet décline les fonctions de délégué de la Classe à la Commission de la Biographie nationale. M. Ch. Julin est élu pour le remplacer.

Le Secrétaire de la section d'océanographie physique de l'Union géodésique et géophysique internationale et de la section d'océanographie biologique de l'Union internationale des sciences biologiques fait connaître la constitution des bureaux de ces deux sections et signale l'opportunité de réunir celles-ci prochainement.

Cinq concurrents adressent des travaux pour le Prix Lemaire, et un concurrent soumet les siens pour le Prix Melsens.

— Conférence pour le Catalogue international de littérature scientifique : M. L. Fredericq est désigné pour y représenter l'Académie.

HOMMAGE D'OUVRAGE.

Algèbre à deux dimensions, par M. Stuyvaert.

— Remerciements.

JURY DU PRIX LEMAIRE.

(12^e période.)

Ce jury est formé de MM. de Hemptinne, Lagasse de Locht, Dufourny, Lambin et Van Brabant.

JURY DU PRIX MELSENS.

(4^e période.)

La Classe nomme pour juger ce Prix : MM. Swarts, Crismer, de Hemptinne et Verschaffelt.

**BIOLOGIE. — Observations sur la respiration
chez les Amphibiens,**

par VICTOR WILLEM, membre de la Classe.

(Deuxième note).

J'ai dit, dans une première note ⁽¹⁾, qu'il serait intéressant de suivre les transformations des procédés respiratoires pendant les métamorphoses des Amphibiens, dans le but de s'éclairer, par des observations et des expériences actuelles, sur le passage des Vertébrés aquatiques aux Vertébrés aériens. Sans vouloir prendre la loi biogénétique dans son acception primitive et considérer le développement ontogénétique comme une répétition des formes ancestrales, il est permis de voir dans les larves aquatiques libres des Amphibiens des êtres à respiration analogue à celle des Poissons, leurs ancêtres. Ces êtres, obligés de devenir aériens en l'espace de quelques semaines, constituent, pour l'étude de l'adaptation de Vertébrés branchiés à la vie aérienne, un matériel de choix, infiniment plus favorable que tout autre, auquel manquera la plasticité nécessaire. Et, abstraction faite de l'intérêt qu'il y a à constater les procédés individuels de cette adaptation chez des formes diverses, puis à les comparer entre eux, on peut encore espérer rencontrer dans cette étude des éclaircissements sur la transformation phylogénétique des Vertébrés branchiés en Vertébrés pulmonés.

Je viens de constater chez le Crapaud commun des aspects particuliers, et non connus, du passage de la vie aquatique à la vie aérienne. A aucun moment, notamment, il n'y a coexistence, chez cette forme, de la respiration branchiale et de la respiration

(1) *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, juin 1920 (p. 298).

pulmonaire, comme on l'observe chez les Grenouilles et chez les Urodèles; la respiration pulmonaire n'apparaît chez le jeune Crapaud qu'après sa sortie de l'eau. Je vais donc raconter ici, très succinctement et dans ses grandes lignes, la *succession des manœuvres respiratoires chez le têtard du Crapaud commun.*

I. Chez le têtard sans pattes, je vois l'eau entrer par la bouche, en saccades, sans reflux sensible au moment de sa fermeture. L'eau entre aussi par les narines et le reflux en est empêché, au moment de la phase expiratrice, par des valvules choanales, dont BATAILLON a signalé l'existence chez les Alytes ⁽¹⁾, sans en donner une description définitive. Je vois le liquide ⁽²⁾ sortir par le spiraculum, d'un mouvement régulier, à peu près uniforme, sans accélération sensible au moment de la compression de la cavité buccale : c'est que les fentes branchiales sont relativement resserrées; c'est que les déplacements, en arrière et en avant, de l'appareil branchial occasionnent dans la chambre péribranchiale des pressions contrariant celles qui résultent des variations de la capacité buccale; c'est que l'étroitesse du spiraculum met en jeu l'élasticité des parois de la cavité péribranchiale. J'infère tout au moins cette explication de la description qu'a donnée F.-E. SCHULZE d'une forme plus abordable à l'analyse, en raison de sa taille, *Pelobates fuscus* ⁽³⁾.

II. Mais après la sortie des pattes antérieures et le rétrécissement des ouvertures qui se sont produites dans la paroi ven-

(1) E. BATAILLON, *Recherches anatomiques et expérimentales sur la métamorphose des Amphibiens anoures.* (THÈSES DE PARIS, 1891.)

(2) L'animal est observé, sous le microscope binoculaire, dans de l'eau fortement chargée de Chlorophycées : *Rhaphidium* et *Scenedesmus*.

(3) F.-E. SCHULZE, *Ueber die inneren Kiemen der Batrachierlarven.* II^{te} Mittheil. Skelet, Muskulatur, Blutgefässe, Filtrationsapparat, respiratorische Anhänge und Atembewegungen erwachsener Larven von *Pelobates fuscus*. (ABHANDL. D. K. AKAD. D. WISS. Berlin, 1892.)

trale de la cavité péribranchiale, il persiste à celle-ci deux orifices en forme de fente qui encadrent les bases de chaque membre antérieur et qui vont se rétrécissant graduellement ; la quantité d'eau qui sort par ces spiracula devient de plus en plus faible. Par contre, l'orifice inspiratoire principal, la bouche, prend des dimensions beaucoup plus grandes. Et il vient un moment, transitoire, où l'on voit les orifices nasaux servir à la fois à l'entrée et à la sortie de l'eau respiratoire ; les valvules choanales cessent dorénavant de fonctionner.

Et plus tard, pendant la période qui correspond à la régression de la queue, les mouvements respiratoires se présentent comme suit :

La mandibule s'élève et s'abaisse, fermant et ouvrant alternativement la bouche. A la fermeture de la large fente buccale succède une légère hausse de la région hyoïdienne du plancher buccal, qui se relâche ensuite en même temps que la mandibule s'abaisse. Les narines restent constamment perméables.

La baisse du plancher buccal, qui assure l'inspiration, est due à la fois à l'abaissement de la mandibule et au retour de la région hyoïdienne centrale à sa position de repos. Ces deux mouvements sont simultanés, car l'entrée de l'eau dans la bouche se fait d'un mouvement régulier, monophasique, non brisé par une discordance éventuelle des deux manœuvres qui contribuent à agrandir la cavité buccale. L'eau entre en même temps par les narines, mais naturellement en beaucoup plus petite quantité.

Pour l'expiration, agit d'abord le relèvement de la mandibule, qui ferme la bouche ; il s'accompagne, avant la fermeture complète de celle-ci, d'un reflux de l'eau buccale. Il ne se traduit pas par une expulsion d'eau par les narines ; la sortie par les orifices nasaux est monophasique et correspond à la contraction du plancher buccal, phénomène qui prouve que cette dernière débute au plus tard lorsque la fente buccale se trouve fermée par la mandibule.

Intervient immédiatement ensuite le relèvement de la région centrale du plancher buccal. Quelquefois, ce relèvement se produit un peu avant l'achèvement de la fermeture de la fente buccale, et cette précocité se traduit par un reflux buccal en deux phases.

La quantité d'eau qui sort par les narines est faible, beaucoup plus petite que celle qui reflue de la fente buccale lors de la première manœuvre expiratoire, par les muscles mouvant la mandibule.

Si l'on observe une particule située devant la fente buccale, on lui voit effectuer, en raison de ces divers mouvements d'inspiration et d'expiration, des balancements en avant et en arrière, dont l'amplitude est inégale : le déplacement vers l'intérieur l'emporte sur le déplacement opposé et fait pénétrer la particule dans la cavité buccale, après un petit nombre de mouvements oscillatoires.

L'expiration proprement dite se fait par les deux fentes péribranchiales et surtout par les narines ⁽¹⁾. De l'eau entrée dans la cavité buccale lors de l'inspiration, une grande partie est expulsée par la bouche au moment du relèvement de la mandibule; une autre fraction est rejetée par les narines, probablement sans avoir atteint la cavité péribranchiale; et, conséquemment, une très faible fraction passe sur les branchies, qui commencent à diminuer d'importance. J'ai l'impression qu'il y a là l'indication d'une respiration bucco-pharyngienne relativement importante, dont la signification va grandir avec la réduction des branchies.

III. Son rôle devient prépondérant au stade suivant, quand la respiration branchiale se réduit à rien, par la fermeture des opercules et la régression des branchies.

L'animal, dont la queue est alors réduite à un court moignon,

(1) Ce courant d'expiration par les narines a été signalé par BATAILLON, chez l'Alyte.

effectue, quand il est immobile, de grands mouvements de la mandibule, accompagnés de mouvements propres du plancher buccal. L'observation des orifices externes des narines montre que les particules suspendues dans l'eau, en face de ces orifices, subissent des déplacements oscillatoires très peu amples, indiquant que les conduits nasaux interviennent très peu dans le renouvellement de l'eau buccale ; c'est donc la large bouche qui sert seule à l'entrée et à la sortie de l'eau servant à la respiration buccale.

Et l'on constate souvent que cette large bouche reste constamment béante, pendant des mouvements, plus ou moins amples, d'abaissement et de relèvement de la mandibule. Les plus grands, tout au moins, de ces mouvements sont diphasiques : au premier mouvement d'abaissement, le plus considérable, succède une faible dépression, qui coïncide avec un déplacement, vers l'arrière, de l'hyoïde. On voit ainsi apparaître pour la première fois les déplacements horizontaux de la masse hyoïdienne dans les manœuvres de la respiration buccale.

Le moment est venu de signaler plus expressément qu'au stade actuellement considéré, chez les jeunes Crapauds arrivés au terme de leur existence aquatique, il n'existe, en sus de la respiration cutanée que j'ai laissée de côté (et pour cause), que la respiration buccale, aquatique, dont j'ai indiqué les signes extérieurs. J'ai été surpris de constater, par la dissection d'une vingtaine d'exemplaires à ce stade, que les poumons ne fonctionnent pas encore : ils sont petits et remplis d'un liquide qui se trouble dans l'eau formolée. C'est là une constatation inattendue, car il résulte de la bibliographie, semble-t-il, que les larves d'Anoures posséderaient généralement des poumons fonctionnant, et BATAILLON dit expressément que les larves de *Bufo vulgaris*, encore dépourvues de pattes antérieures, viennent, dans de l'eau peu aérée, prendre de l'air à la surface par la bouche ⁽¹⁾.

(1) BATAILLON, *Mémoire cité*, p. 5. Le fait est exact : les têtards de Crapauds, par exemple ceux qui ne sont encore pourvus que d'ébauches de membres postérieurs,

C'est vers le stade considéré que les petits Crapauds cherchent à sortir de leur milieu original et grimpent obstinément sur les objets verticaux auxquels ils peuvent adhérer. S'ils se trouvent dans l'impossibilité d'émerger de l'eau, ils parviennent à y subsister, respirant par la bouche et par la peau, pendant un nombre de jours qui varie avec l'aération du liquide; mais la mort survient, tôt ou tard, par asphyxie. — Il est curieux de constater que ces jeunes Crapauds, capables pendant des journées de nager activement et de venir à la surface, n'effectuent jamais de manœuvre pour happer de l'air par la bouche, comme tant d'amphibiens aquatiques, adultes ou larvaires.

IV. Examinons maintenant les jeunes Crapauds à leurs débuts de l'existence aérienne.

La première modification qu'on perçoit dans leurs manœuvres respiratoires consiste en ce qu'ils tiennent leur bouche close; ce nouveau maintien entraîne une conséquence curieuse : l'incapacité temporaire de l'animal de contracter efficacement son plancher buccal. C'est que cette contraction expiratoire automatique se trouvait associée à la contraction alternative et rythmique des muscles de la mandibule. Celle-ci s'immobilisant, il faudra que les contractions réflexes produisant les oscillations du plancher buccal deviennent indépendantes du complexe dont

viennent à la surface de l'eau quand on les place dans un milieu relativement peu aéré. Ils se renversent le ventre en haut, la bouche venant en contact avec l'atmosphère, et ils exécutent ainsi les mouvements de respiration ordinaire; dans ces conditions, une petite bulle d'air se trouve happée de temps en temps, et quand le têtard se retourne, avec un mouvement d'expiration plus accentué, il peut sortir de sa bouche une à quatre petites bulles. Or, à ce stade, je ne découvre à la dissection aucune trace de poumons; par contre, chez les individus qui ont exécuté la manœuvre en question, je trouve des bulles gazeuses de même calibre dans le tube digestif, qui en est d'autant plus bourré, à partir de l'œsophage, que le têtard a moins trouvé d'aliments à ingérer et que sa manœuvre a duré longtemps.

Le happement d'air, qui est manifestement une manœuvre respiratoire, sert donc vraisemblablement à l'aération de l'eau qui va aux branchies et à une respiration intestinale rappelant, toute mesure gardée, celle des Loches.

elles faisaient partie et arrivent à se produire pendant une contraction tonique et persistante des muscles releveurs de la mandibule.

Le jeune Crapaud, pour m'exprimer familièrement, met souvent tout un jour à apprendre à respirer la bouche fermée. On voit apparaître dans le plancher buccal, par intervalles, des secousses musculaires irrégulières, localisées, correspondant à des contractions, non coordonnées, des groupes musculaires du plancher. Des tiraillements mal rythmés font osciller la mandibule, non encore serrée dans le cadre de la lèvre supérieure, par une contraction tonique suffisante de ses muscles releveurs.

Et de temps en temps, comme ces manœuvres informes n'ont encore aucune valeur pour la ventilation buccale, l'animal ouvre largement la bouche, en un grand bâillement.

Cependant, les balancements intermittents du plancher buccal s'unifient et se régularisent progressivement, pour aboutir à des séries d'oscillations rythmiques, à variations périodiques d'amplitude et de vitesse, au rythme rapide d'environ 180 par minute. Ces oscillations s'accompagnent d'un balancement synchrone des flancs, analogue à celui qui s'observe chez l'adulte : indication de déplacements antéro-postérieurs de l'hyoïde agissant sur les viscères abdominaux.

Les poumons étant vides d'air encore, le jeune Crapaud est, au point de vue respiratoire, vers la fin de la première journée de son existence aérienne, au stade des Salamandrines privées de poumons.

V. — Mais il va aller plus loin, par l'entrée en activité de la respiration pulmonaire.

Déjà dès les tout premiers temps de l'émersion, on lui voit effectuer, par intervalles fort espacés, des mouvements considérables de déglutition, s'accompagnant d'une rétraction des yeux. C'est l'indication, maladroite encore, de la future inspi-

ration pulmonaire. Les premières de ces manœuvres ne s'accompagnent pas, ni de la secousse caractéristique des flancs, ni d'une expansion perceptible de ceux-ci; l'exagération de ces mouvements de déglutition me rappelle les efforts inspiratoires de grenouilles à fistule pulmonaire ouverte et me fait supposer que le mécanisme de l'occlusion des narines ne fonctionne pas encore : l'air fuirait par les narines, au lieu de progresser distalement.

Vers le second jour, les mouvements sont moins forcés; mais la manœuvre semble ne conduire qu'à fouler quelques bulles d'air dans l'estomac, à en juger par des autopsies. Quoi qu'il en soit, rien ne passe encore dans les poumons, probablement en raison de l'inexpérience du larynx.

Et enfin, vers le troisième ou quatrième jour de l'existence aérienne, on trouve les poumons gonflés d'air; les signes extérieurs de la ventilation pulmonaire : les mouvements caractéristiques du plancher buccal, l'occlusion des narines, les mouvements des flancs se présentent comme chez l'adulte, avec un rythme plus rapide.

Si, alors, on remet l'« amphibien » dans l'eau, on le voit flotter à la surface et nager vigoureusement, quelquefois vers le fond. Mais, à la surface, il ne relève pas le museau de façon à faire émerger ses narines, et la respiration aérienne lui est impossible. Il se noie au bout d'un temps plus ou moins long, après avoir expulsé une partie de son air pulmonaire. Cette incapacité du jeune Crapaud de vivre dans l'eau persiste pendant une période longue, dont je n'ai pu encore déterminer la durée.

* *
*

Résumé. — Cette évolution des procédés respiratoires ne rappelle que de loin les étapes successives par lesquelles ont dû passer les ancêtres des Amphibiens; à aucun moment, en effet, on ne constate, au cours des métamorphoses du Crapaud commun, un stade correspondant au type des Dipnés : coexis-

tence de branchies et de poumons; de plus, il est des stades, dans ces métamorphoses, qui n'ont pu exister au cours de l'évolution passée, soit parce qu'ils se présentent avec un rang irrationnel au point de vue phylogénétique, soit parce que, persistant, ils entraîneraient la mort de l'animal.

1. Le têtard du Crapaud commun, globuleux, à branchies internes, présente, avec des conduits nasaux inspireurs, des mouvements respiratoires comparables à ceux d'un poisson qui posséderait un orifice branchial externe étroit. En eau peu aérée, il y a happement d'air et, peut-être, respiration aérienne intestinale.

2. Après la sortie des pattes antérieures, l'élargissement de la bouche et l'étroitesse des fentes péribranchiales s'accompagnent de l'accommodation des narines en conduits inspireurs et expirateurs. Puis la bouche ne se ferme plus à l'expiration et beaucoup d'eau reflue par la fente buccale; le mouvement de l'eau respiratoire témoigne d'une respiration buccale, dont l'importance grandit avec la régression des branchies.

3. Celles-ci disparues (vers le moment où la queue est réduite à un court moignon), le jeune Crapaud ne possède, à côté de la respiration cutanée, qu'une respiration bucco-pharyngienne, avec flux et reflux par la bouche. Ce stade ne peut se prolonger sans péril.

4. Sorti de l'eau, le jeune Crapaud apprend à exécuter, bouche fermée, les manœuvres d'une ventilation correspondant à une respiration bucco-pharyngienne aérienne : phase intercalée, analogue à la respiration des Urodèles sans poumons.

5. Ce n'est qu'après environ deux jours qu'il devient capable d'effectuer les manœuvres de la ventilation pulmonaire et qu'il commence à utiliser ses poumons comme organes respiratoires. Devenu animal aérien, il reste, pendant une longue période, incapable de retour à l'eau : il ne sait pas se tenir à la surface de manière à respirer.

PHYSIOLOGIE. — **De la nature du complément hémolytique,**

par P. NOLF, membre de la Classe.

Dans une note publiée en 1908 ⁽¹⁾, je pouvais déjà affirmer, sur la foi d'expériences non publiées à cette époque, que si l'hémolyse présente les plus grandes analogies avec la coagulation, il n'est cependant pas permis d'identifier le fibrinogène avec le complément hémolytique. Depuis lors, de nouveaux essais ont confirmé constamment cette manière de voir.

Les premières expériences ayant été faites au moyen de fibrinogène de cheval, elles n'étaient pas décisives, car de nombreux observateurs ont reconnu que les humeurs de cet animal contiennent un complément peu actif, qui, même lorsqu'il se fixe sur certaines hématies sensibilisées, est incapable d'en produire la destruction.

Il en est tout autrement du complément du chien, qui est abondant dans les humeurs de cet animal et qui opère facilement l'hémolyse de nombreux globules rouges et notamment de ceux du mouton, soit en collaboration avec l'anticorps naturel du sérum du chien, soit en association avec un anticorps d'immunisation, comme celui du lapin injecté de globules de mouton.

On extrait facilement le fibrinogène du plasma oxalaté du chien au moyen de la méthode habituelle qui consiste à précipiter le fibrinogène plusieurs fois par le chlorure sodique à demi-saturation, le précipité étant redissous dans de l'eau distillée additionnée ou non de très peu de carbonate sodique.

(1) P. NOLF, *De l'origine du complément hémolytique et de la nature de l'hémolyse par les sérums*. (BULL. ACAD. ROY. DE BELGIQUE [Classe des sciences], 1908, pp. 748-772.)

Dans l'expérience suivante, le fibrinogène de 250 centimètres cubes de plasma de chien avait été précipité trois fois et dissous finalement dans 100 centimètres cubes d'eau distillée, faiblement alcalinisée et presque exactement neutralisée après dissolution du fibrinogène. Cette solution donnait rapidement un caillot ferme quand on lui ajoutait quelques gouttes d'une solution de thrombine. Conservée pure à 0° ou à la température ordinaire, elle était parfaitement stable.

Elle fut essayée sur deux espèces d'hématies de mouton, conjointement avec le filtrat du même plasma traité par l'acide carbonique après dilution dans neuf volumes d'eau distillée. La première espèce d'hématies provenait d'un échantillon de sang oxalaté de mouton; ces hématies avaient été lavées plusieurs fois dans un volume considérable de solution isotonique de chlorure sodique; la seconde espèce, d'un mélange de sang de mouton et de quatre fois son volume de solution de saccharose à 7.8 %. On sait, depuis les recherches de GUGGENHEIMER ⁽¹⁾, que ces dernières hématies, que j'appellerai hématies au sucre, pour les différencier des premières, les hématies au sel, ont absorbé la globuline du plasma de mouton et qu'en présence d'un anticorps chauffé à 56°, elles se détruisent directement dans la fraction albumine du sérum de cobaye. Employer des hématies au sucre dans un milieu privé de globulines équivaut donc à employer des hématies au sel dans un milieu pourvu de globulines.

Les résultats d'hémolyse sont consignés dans le tableau qui suit. Il est bon d'ajouter que tous les milieux se coagulèrent, mais que les caillots de la solution de fibrinogène étaient plus denses que ceux de la fraction albumine; la première était donc plus riche en fibrinogène que la seconde.

(1) GUGGENHEIMER, *Studien über das Verhalten hämolytischer Komplemente im salzfreien Medium.* (ZEITSCHR. FÜR IMM., 1910, t. VIII, pp. 295-331.)

P. Nolf. — De la nature du complément hémolytique.

Solution isotonique de fibrinogène de chien.	Plasma du même chien dilué à $\frac{1}{10}$ traité par CO_2 et filtré.	Solution isotonique de chlorure sodique.	Sérum anti- mouton	Hématies de mouton au chlorure sodique.	Hématies de mouton à la saccharose	RÉSULTATS.
0.95 cc.	»	»	0.01 cc. (2 unités).	0.05 cc.	»	Pas d'hémolyse.
0.5	»	0.45 cc.	0.01	0.05	»	Idem.
»	0.95 cc.	»	0.01	0.05	»	Idem.
»	0.5	0.45	0.01	0.05	»	Idem.
0.95	»	»	»	»	0.05 cc.	Idem.
0.5	»	0.45	»	»	0.05	Idem.
0.95	»	»	0.01	»	0.05	Idem.
0.5	»	0.45	0.01	»	0.05	Idem.
»	0.95	»	»	»	0.05	Idem.
»	0.5	0.45	»	»	0.05	Idem.
»	0.95	»	0.01	»	0.05	Hémolyse intense.
»	0.5	0.45	0.01	»	0.05	Hémolyse faible.
»	0.25	0.7	0.01	»	0.05	Hémolyse très faible.

Il faut conclure de cette expérience qu'une solution de fibrinogène extrait d'un plasma, plus riche en fibrinogène que la fraction albumine du même plasma, est dépourvue de toute action hémolytique dans des conditions où la fraction albumine hémolyse très nettement. Il est donc certain que dans cette fraction, ce n'est pas le fibrinogène qui est facteur d'hémolyse. Cela ressort d'ailleurs à l'évidence du fait que le sérum, privé de fibrinogène, est aussi hémolytique que le plasma.

On peut ajouter que le fibrinogène du plasma n'intervient pas à côté de l'élément contenu dans le sérum et qu'il est incapable de le remplacer, même à forte concentration.

Dans une autre expérience, le fibrinogène fut extrait, non plus d'un plasma, mais de la dilution à $\frac{1}{5}$ de ce plasma dans l'eau distillée traitée par l'anhydride carbonique et filtrée. Le

fibrinogène de 150 centimètres cubes de ce plasma dilué fut précipité deux fois par le chlorure sodique (à une concentration correspondant sensiblement aux $\frac{2}{3}$ de la saturation) et redissous dans assez d'eau distillée pour que la solution fût approximativement isotonique (environ 30 centimètres cubes). Cette solution était stable et se coagulait rapidement par une solution active de thrombine. Elle fournissait des caillots plus denses que le plasma dilué à $\frac{1}{5}$ dont elle provenait.

Dans des essais d'hémolyse, elle ne donna que des résultats négatifs, comme le montre le tableau suivant :

Solution isotonique de fibrinogène de chien.	Fraction albumine d'un plasma à $\frac{1}{3}$ d'où provient le fibrinogène.	Solution de globuline de chien.	Solution isotonique de chlorure sodique.	Hématies de mouton sensibilisées (six unités).	RÉSULTATS.
0.5 cc.	»	»	0.45 cc.	0.05 cc.	Pas d'hémolyse; caillot.
0.3 .	»	»	0.65	0.05	Idem.
0.1	»	»	0.85	0.05	Idem.
0.5	»	0.05 cc.	0.4	0.05	Idem.
0.3	»	0.05	0.6	0.05	Idem.
0.1	»	0.05	0.8	0.05	Idem.
»	0.5 cc.	»	0.45	0.05	Hémolyse forte, mais incomplète; voile fibrineux.
»	0.3	»	0.65	0.05	Hémolyse forte; voile fibrineux.
»	0.1	»	0.85	0.05	Hémolyse faible; voile fibrineux.
»	0.5	0.05	0.4	0.05	Hémolyse complète; voile fibrineux.
»	0.3	0.05	0.6	0.05	Hémolyse presque complète; voile fibrineux.
»	0.1	0.05	0.8	0.05	Hémolyse incomplète; voile fibrineux.

Cette expérience démontre, en confirmation des précédentes, que l'élément actif de la fraction albumine doit être rangé parmi les substances protéiques les plus solubles du plasma. Elle échappe à la précipitation par les acides faibles en milieu dilué; elle échappe aussi à la précipitation par le chlorure sodique à demi-saturation et même aux $\frac{2}{3}$ de saturation.

Dans le phénomène d'hémolyse, elle se caractérise par son affinité pour les éléments actifs de la fraction globuline. J'ai montré précédemment que ceux-ci paraissent correspondre à la thrombine ou à ses constituants. S'il en est ainsi, l'affinité principale du fibrinogène et de l'élément actif de la fraction albumine, affinité qui les caractérise au point de vue fonctionnel, est la même.

La différence qui sépare du fibrinogène l'élément actif de la fraction albumine, c'est la plus grande solubilité de ce dernier et aussi la solubilité du complexe qu'il forme par son union avec la thrombine.

Or, l'étude des substances colloïdales de composition chimique simple, tels les hydroxydes et les sulfures inorganiques, nous a appris que ces substances peuvent donner des solutions de stabilité très diverses, suivant le procédé qui a servi à les préparer. Il paraît démontré que ces différences de stabilité sont principalement dues aux dimensions variables des micelles colloïdales, micelles plus volumineuses dans les solutions moins stables, moins volumineuses dans les solutions plus stables.

On peut se demander si la différence entre le fibrinogène et l'élément hémolytique de la fraction albumine n'est pas de même nature; si, en d'autres termes, ce dernier n'est pas une substance colloïdale de même origine que le fibrinogène, ayant la même signification physiologique, mais plus soluble. Suivant cette hypothèse, il y aurait non pas un fibrinogène de grandeur micellaire invariable, mais plusieurs ou plutôt une multitude, aucune micelle n'étant probablement l'équivalent absolu de sa

voisine. Dans cet ensemble, les micelles les plus grosses constitueraient ce que l'on convient d'appeler communément le fibrinogène, dont l'union à la thrombine donne la fibrine concrète; certaines des micelles les plus petites formeraient l'élément hémolytique de la fraction albumine. Des unes aux autres, il y aurait d'ailleurs tous les intermédiaires. Dans les solutions de fibrinogène préparées par la méthode de Hammarsten, les seules micelles présentes sont celles dont les dimensions considérables permettent la précipitation par les solutions concentrées de chlorure sodique.

Mais il se peut que, en raison même de ces dimensions considérables, ces micelles ne passent pas à travers certaines membranes qui sont perméables à des micelles plus petites de même composition chimique, comme l'ont démontré, pour les colloïdes inorganiques, les expériences d'ultrafiltration de Malfitano, Bechhold, etc. Or la fonction hémolytique nécessite la pénétration des éléments de l'hémolysine dans le stroma du globule à travers sa paroi. C'est peut-être uniquement parce que le fibrinogène ne peut pas, à cause de la grosseur de ses micelles, opérer cette traversée, que la fonction hémolytique lui fait défaut.

Dans cet ordre d'idées, il était intéressant de rechercher si le fibrinogène devenu assez stable par un long séjour à 0°⁽¹⁾ pour ne plus être précipité à l'état de fibrine concrète par la thrombine, n'a pas acquis la propriété d'hémolyser, à l'égal de la fraction albumine. L'expérience faite avec du fibrinogène de cheval donna un résultat négatif, qui ne peut pas être considéré comme définitif, étant données les faibles propriétés hémolytiques des humeurs de cet animal.

(1) P. NOLF, *Une propriété intéressante des solutions vieilles de fibrinogène.* (ANNALES DE L'INSTITUT PASTEUR, 1917, t. XXXI, p. 155.)

PHYSIQUE THÉORIQUE. — Sur l'explication
de quelques phénomènes optiques,

par E. HENRIOT (*).

Je voudrais attirer l'attention sur les possibilités d'explication que peut nous fournir la considération de certaines vitesses critiques réalisées à l'intérieur de substances (solides) où la matière est répartie avec une certaine régularité spatiale.

Pour introduire cette notion de vitesse critique, je vais utiliser le modèle que voici :

Supposons que nous ayons fixé, le long d'une corde tendue, des billes d'acier régulièrement espacées et distantes l'une de l'autre d'une longueur ϵ .

Si, ayant saisi une autre bille d'acier A, nous la déplaçons le long de la file de billes, nous devons vaincre un certain frottement moyen pour maintenir une vitesse constante v .

La corde étant élastique et pouvant vibrer avec une certaine période ν , il y aura une certaine vitesse v qui sera critique, c'est la vitesse

$$v = \epsilon \nu,$$

qui est telle que pendant le passage d'une bille à la suivante, la corde a effectué une vibration complète. Elle correspond à un phénomène de résonance entre la période des percussions et la période de la corde. D'autres vitesses seront à même de produire un tel phénomène; ce seront les vitesses

$$v = \frac{\epsilon \nu}{2}, \quad \frac{\epsilon \nu}{3}, \quad \dots, \quad \frac{\epsilon \nu}{p}.$$

Il s'agit ici d'une *absorption* d'énergie par la corde.

(*) Présentée par J.-E. Verschaffelt.

Réciproquement, si la corde vibre avec une certaine période, elle pourra entretenir le mouvement de la bille, si celle-ci possède une des vitesses ci-dessus, par un mécanisme analogue à l'entretien du mouvement d'un pôle d'alternateur par des pôles fixes et régulièrement espacés. La corde pourra *émettre* de l'énergie.

L'énergie cinétique de translation pourra ne pas être la seule que possède la bille A; celle-ci pourra elle-même être montée sur un support élastique et posséder une énergie cinétique et potentielle de vibration.

Nous pouvons transposer ce que nous venons de dire ci-dessus à ce qui se produirait si nous essayions de faire glisser l'un sur l'autre deux plans réticulaires contigus d'un même cristal. La vitesse de déplacement qui est telle que le passage d'une maille à la suivante s'effectue dans le temps de vibration d'un atome (période propre infra-rouge) sera une vitesse critique. Il suffit de faire l'hypothèse que cette vitesse critique est la vitesse moyenne d'un atome à la température de fusion, pour obtenir une relation entre la température de fusion, la période de vibration propre infra-rouge et le volume atomique. Cette relation est identique à celle qu'a donnée Lindemann et qu'il a obtenue à partir d'hypothèses différentes (*).

Dans un réseau supposé cubique, si V est le volume atomique, N la constante d'Avogadro, l'écartement de deux atomes sera

$$\varepsilon = \left(\frac{V}{N} \right)^{1/3}.$$

On aura donc, en désignant par T_s la température de fusion et M la masse atomique,

$$\frac{1}{2} M \varepsilon^2 \nu^2 = 1,25 \cdot 10^8 T_s;$$

d'où

$$\nu = 1,39 \cdot 10^{12} \sqrt{\frac{T_s}{M V^{2/3}}}.$$

(*) LINDEMANN, *Phys. Zeitschr.*, XI, 1910, p. 609, et *Congrès Solvay*, 1912, p. 281.

La formule de Lindemann doit, pour être complètement vérifiée par l'expérience, contenir le facteur empirique 2.8 au lieu du facteur 1.39, c'est-à-dire que les fréquences que nous trouvons sont à l'octave inférieure exacte de la fréquence infra-rouge donnée par l'expérience.

*
* *

La considération de la régularité dans l'espace peut être suggestive et paraît être féconde dans d'autres domaines.

Il est possible qu'elle joue par exemple un rôle dans l'effet photo-électrique. Si les atomes d'un métal sont disposés avec une suffisante régularité sur la surface, une onde plane tombant sur ces atomes communiquera, à chacun d'eux, une certaine quantité d'énergie. Étant tous identiques, ils vibreront en phase. Dans ces conditions, un électron libre lancé le long d'une file de molécules pourra prendre des vitesses privilégiées dans lesquelles il pourra, à la faveur de la régularité, emprunter de l'énergie à toute la file de molécules. De l'énergie, déjà distribuée entre différents atomes, mais non décoordonnée, pourra se regrouper sur l'électron A pour ces vitesses privilégiées. Il serait curieux de rechercher quelle doit être la régularité minima pour que ce groupement d'énergie puisse se reproduire. On conçoit que dans ces conditions l'électron puisse ramasser l'énergie convoyée par une surface relativement grande de l'onde. On lèverait ainsi la contradiction, souvent signalée, entre le temps minimum calculé pour l'émission d'un électron, dans l'hypothèse d'une densité uniforme de l'énergie sur l'onde, et entre ce temps minimum observé expérimentalement. Une certaine régularité serait ainsi favorable à l'effet photo-électrique. Je pense que l'on peut rapprocher des suggestions précédentes les résultats des expériences de M. E. Bloch sur l'effet photo-électrique dans le cas des solutions. L'eau et les solutions salines ne sont pas photo-électriques, mais une

trace d'une matière grasse déposée à la surface du liquide lui communique la propriété d'être photo-électrique. La régularité probable des molécules dans une lame mince suffirait peut-être à l'explication du phénomène.

*
* *

M. Perrin (*), dans des expériences récentes sur la fluorescence et la stratification des lames liquides minces, a décrit un curieux phénomène qui est peut-être justiciable de ces considérations. Une lame liquide est, d'après cet auteur, composée de plages correspondant à l'empilement régulier d'un nombre entier de couches mono-moléculaires. La lumière (qui n'agit pas par un effet calorifique secondaire) intervient énergiquement pour provoquer cette segmentation en plages. Elle semble amincir la lame aux endroits où elle la frappe en chassant les plans moléculaires dans les régions moins éclairées. Nous avons ici les conditions nécessaires à l'entretien du mouvement privilégié d'une file ou d'un plan moléculaire ou d'une molécule isolée, car il est vraisemblable que la régularité spatiale requise est réalisée ici.

*
* *

Nous avons vu que dans le cas de l'effet photo-électrique un électron pourra prendre des vitesses privilégiées.

$$v = \frac{ev}{p}.$$

L'énergie de translation qui correspond à cette vitesse n'est pas l'énergie totale. Si nous désignons cette dernière par $\frac{1}{2}mV^2$, il doit y avoir une relation entre l'énergie totale et l'énergie de translation, mais cette relation ne peut être obtenue

(*) PERRIN, *Notice sur les travaux scientifiques*. Gautnier-Villars, 1918.

que par des hypothèses nouvelles. Les expériences sur l'effet photo-électrique montrent que $\frac{1}{2}mV^2$ doit être proportionnel à ν , donc, d'après ce que nous venons de dire, à v . Une relation de cette forme existe entre l'énergie cinétique totale d'un électron et son énergie de translation (dans la direction de propagation de la lumière) lorsqu'il est entièrement libre et qu'il subit l'effet d'une onde électromagnétique. Les équations de son mouvement sont alors de la forme

$$p\ddot{x} = (c - \dot{z})f\left(t - \frac{z}{c}\right)$$

$$p\ddot{z} = \dot{x}f\left(t - \frac{z}{c}\right).$$

D'où, par division et intégration, en supposant $f \neq 0$,

$$\frac{1}{2}mV^2 = mc\dot{z} = mc\nu, \quad (1)$$

relation indépendante de l'amplitude et de la période. En l'absence de tout champ de rayonnement $f \equiv 0$, on aurait seulement

$$V = v.$$

La relation (1) n'est pas générale; elle ne tient pas compte de la réaction du rayonnement de l'électron. Je reviendrai ultérieurement sur sa validité et son invariance.

Si l'on applique cette équation au cas de l'électron photo-électrique, on a une relation qui a la forme que lui assigne l'expérience :

$$\frac{1}{2}mV^2 = \frac{mc\varepsilon\nu}{p},$$

où

$$m = 0,8 \cdot 10^{-2} ;$$

$c = 3.10^{10}$; ε est variable, mais peu d'un métal à l'autre. Dans

le cas de l'argent, le volume atomique étant 10 et la constante d'Avogadro $N=6,8.10^{23}$, on aura, pour l'ordre de grandeur de ε ,

$$\varepsilon^3 N = 10;$$

d'où

$$\varepsilon = \frac{1}{4,10^7} \quad \text{et} \quad c\varepsilon = 700.$$

$mc\varepsilon$ est de l'ordre de 500.10^{-27} , environ quatre-vingts fois plus élevé que la constante h de Planck. Il faut donc que, ou bien p soit différent de 1, ou que l'application sommaire de la relation entre V et v ne soit pas légitime.

La relation entre V et v n'est d'ailleurs valable que pour de petites vitesses, telles que celles qui sont réalisées ici. La fonction de Lagrange d'un électron dans un champ électromagnétique, pour des vitesses quelconques, dépend des potentiels vecteurs et scalaires F_x, F_y, F_z, ψ :

$$L = -mc^2 \left\{ \sqrt{1 - \beta^2} - 1 \right\} + \frac{e}{c} (\dot{x}F_x + \dot{y}F_y + \dot{z}F_z - \psi);$$

si l'on écrit les équations du mouvement

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

en procédant comme ci-dessus, on trouve une relation entre la fonction de Lagrange et la vitesse de translation $\dot{z}$:

$$L = mc\dot{z};$$

d'où, pour l'action,

$$\int L dt = mcx.$$

L'existence d'un quantum d'action h étant admise, nous aurons

$$h = mcx.$$

Une valeur critique de la fréquence correspondra au cas où le déplacement z , nécessaire à l'acquisition du quantum d'action, est égal à une longueur d'onde λ

$$h = mc\lambda_m ;$$

d'où

$$\lambda_m = \frac{h}{mc} = \frac{6.57.10^{-27}}{0.8.10^{-27} \times 3.10^{10}} = 2.7.10^{-10} \text{ cm.}$$

Pour cette longueur d'onde, la fréquence ν_m est telle que le quantum d'énergie est égal à l'énergie intrinsèque de l'électron

$$h\nu_m = mc^2.$$

Les rayons γ ont une longueur d'onde supérieure à cette limite, mais de peu :

$$\lambda = 7.10^{-10} \text{ cm.}$$

Le quantum d'énergie correspondant vaut déjà le tiers de l'énergie intrinsèque de l'électron.

TABLE DES MATIÈRES

Séance du 3 juillet 1920.

M. le Directeur félicite M. Rutot élu membre honoraire de la « Society of Antiquaries of London »	337
CORRESPONDANCE : MM. Dony Hénault et Sir W. Pope remercient de leur élection. — Le Secrétaire de l'Institut central de météorologie et de géodynamique de Vienne signale la lamentable situation des familles des fonctionnaires de cet Institut. — La Société belge d'otologie, de rhinologie et de laryngologie annonce son 21 ^e Congrès. — M. Gilkinet décline les fonctions de délégué à la Commission de la Biographie nationale. — M. Ch. Julin est élu pour le remplacer. — Le Secrétaire de la Section d'océanographie physique de l'Union géodésique et géophysique internationale et de la Section d'océanographie biologique de l'Union internationale des Sciences biologiques, fait connaître la constitution des bureaux de ces deux sections. — Des concurrents adressent des travaux pour le Prix Lemaire et le Prix Melsens. — Conférence pour le Catalogue international de littérature scientifique : M. L. Fredericq est désigné en qualité de délégué. — Hommage d'ouvrage	
JURY DU PRIX LEMAIRE	338
JURY DU PRIX MELSENS	338

Communications et Lectures.

BIOLOGIE. — Observations sur la respiration chez les Amphibiens (2 ^e note), par Victor Willem.	339
PHYSIOLOGIE. — De la nature du complément hémolytique, par P. Nolf . . .	348
PHYSIQUE THÉORIQUE. — Sur l'explication de quelques phénomènes optiques, par E. Henriot.	353

Le fonds des publications académiques ayant été systématiquement pillé par les Allemands il ne sera plus possible de donner suite aux demandes de combler les lacunes antérieures à 1919.

9-8-20.

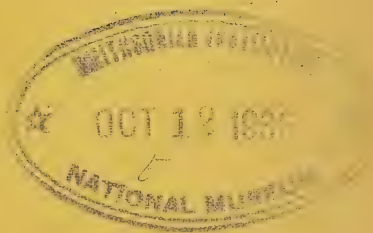
ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

BULLETIN

DE LA

CLASSE DES SCIENCES

1920 — N° 8



BRUXELLES

MAURICE LAMERTIN

LIBRAIRE-ÉDITEUR

Rue Coudenberg, 58-62

M. HAYEZ

IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE

Rue de Louvain, 112

1920

Séance du samedi 7 août 1920, à 2 heures.

M. A. GRAVIS, directeur de la Classe.

M. PAUL PELSENEER, secrétaire perpétuel.

Sont présents : MM. Léon Fredericq, J. Neuberg, A. Lameere, Ch.-J. de la Vallée Poussin, Max. Lohest, Fr. Swarts, A. Demoulin, A. Rutot, Victor Willem, Ch. Julin, Georges Lecointe, Émile Marchal, *membres*; M. Stuyvaert, V. Grégoire, O. Van der Stricht, Th. De Donder, Paul Fourmarier, O. Dony-Hénault, *correspondants*.

Absences motivées : MM. J. Deruyts, G. Cesàro, J. Massart, P. Stroobant, J. Verschaffelt, *membres*.

M. le Directeur exprime les regrets de l'Assemblée à l'occasion du décès de M. A. Gautier, associé de la Section des sciences mathématiques et physiques.

CORRESPONDANCE.

— L'Association pour l'enseignement des sciences anthropologiques annonce que la réunion préparatoire pour la fondation d'un Institut international d'anthropologie se tiendra à Paris le 9 septembre prochain.

— M. le professeur S. Monticelli adresse des renseignements sur la nouvelle organisation de la Station zoologique de Naples.

HOMMAGES D'OUVRAGES.

— *A propos de la prochaine disparition de l'anneau de Saturne*, par P. Stroobant.

— *Les progrès récents de l'Astronomie* (8^e année), par le même.

— *Leçons de Thermodynamique et de Chimie physique*, par Th. De Donder.

— Remerciements.

CATALOGUE INTERNATIONAL DE LITTÉRATURE SCIENTIFIQUE.

— M. Léon Fredericq expose que le catalogue anglais n'est pas tel qu'il puisse rendre de grands services. Il croit préférable pour les Belges de coopérer à la Bibliographie scientifique qui s'organise en France, dans des conditions meilleures. Il décline le mandat de représenter l'Académie à la Conférence du 28 septembre, à Londres.

Après une discussion à laquelle prennent part MM. Swarts et Lecointe, sans prendre aucune résolution définitive quant au principe, la Classe décide de se faire représenter, si possible, par un autre membre que M. Fredericq.

CONFÉRENCE DE L'UNION INTERNATIONALE DE LA CHIMIE PURE ET APPLIQUÉE.

Rapport de M. Swarts.

MESSIEURS,

Délégué de l'Académie royale, organisme adhérent de la Belgique, à la Conférence de l'Union internationale de la chimie pure et appliquée qui s'est réunie à Rome le 22 juin dernier, j'ai à vous rendre brièvement compte de ma mission.

Vous vous souviendrez que l'Union fut définitivement constituée à Bruxelles l'an dernier, au sein du Conseil international,

par les cinq nations fondatrices : Belgique, États-Unis, France, Grande-Bretagne et Italie.

Les statuts prévoyaient l'admission de droit des nations alliées qui en feraient la demande. Des invitations d'adhésion seraient adressées aux nations neutres.

Dans une réunion préparatoire, à laquelle ne prirent part que les délégations des nations fondatrices, furent admis comme membres de l'Union : le Canada, la Grèce, la Pologne, la Tchécoslovaquie, nations alliées, le Danemark, l'Espagne et les Pays-Bas, nations neutres.

Constituée en assemblée plénière par l'adjonction des délégations des nouveaux adhérents, la Conférence consacra ses premières séances à l'élaboration du règlement et à l'organisation de l'Union. Dans l'élaboration de ce règlement on résolut tout d'abord harmonieusement et dans le meilleur esprit de concorde son adaptation aux statuts de l'Union et du Conseil international de recherches.

Les stipulations les plus intéressantes du règlement sont :

1° La constitution d'un office permanent destiné à assurer les relations entre les divers organismes de l'Union et l'exécution des décisions et du programme du Conseil de l'Union ;

2° La création d'un conseil consultatif, divisé en nombreuses sections, dont les membres sont nommés par l'organisme officiellement adhérent.

La Conférence aborda ensuite l'examen des rapports présentés par diverses délégations.

Les décisions suivantes furent prises :

1° La Conférence émet le vœu que les conventions internationales signées à Paris le 16 octobre 1912, pour l'unification des résultats d'analyses des matières alimentaires et la création d'un bureau international de chimie analytique de ces matières, soient appliquées le plus rapidement possible par les nations adhérentes ;

2° Le Conseil de l'Union organisera un bureau d'étalons

chimiques divisé en trois sections : étalons physico-chimiques, produits purs pour recherches, produits techniques.

Il m'est agréable de signaler que c'est notre confrère M. Cusmer qui eut l'heureuse idée de cette institution; que c'est son rapport qui servit de base à la discussion et qu'à sa demande, c'est à la Belgique que fut confiée l'organisation de la section des étalons physico-chimiques, la Grande-Bretagne organisant la section des produits purs et la France celle des produits techniques.

Il est inutile que j'insiste sur les énormes avantages que le travail scientifique peut retirer d'une telle organisation.

La Conférence décida la constitution d'une commission provisoire pour l'établissement des étalons thermochimiques. Elle créera en son sein une commission internationale des poids atomiques. Une telle commission existe déjà, mais en font partie des chimistes des puissances centrales. L'Union pria MM. Clarke, Thorpe et Urbain, membres de l'ancienne Commission, de bien vouloir faire partie de la Commission à constituer par l'Union.

Sur la proposition de M. Maric, secrétaire de la Commission internationale des tables de constantes numériques, cette Commission sera rattachée à l'Union.

Parmi les questions discutées qui peuvent vous intéresser, je signalerai que l'Union décidera de faire étudier par une commission compétente la valeur juridique du pli cacheté.

Tel est, Messieurs, le résumé des travaux de la Conférence auxquels votre délégué a pris part.

Vous n'ignorez pas que les statuts de l'Union donnaient à la Belgique droit à deux délégués ayant droit de vote en matière administrative. Par un accord tacite, le choix de l'un d'eux fut réservé à la Société chimique de Belgique. Elle désigna M. Lucion, chef du laboratoire de M. Solvay. Je suis heureux de pouvoir dire ici combien fut étroite et constante notre collaboration et l'excellente impression que j'en conserve.

Mon rapport serait incomplet et marqué au coin de l'ingra-

titude s'il était muet sur la réception qui nous fut réservée. Certes, Rome, cette prestigieuse métropole de notre civilisation, constituait un cadre unique; l'Académie des Lincei dispose d'un palais où s'accumulent des trésors d'art comme seule la ville éternelle en possède, et qui rendit votre délégué quelque peu jaloux. Mais si toutes ces beautés devaient charmer nos yeux et notre esprit, à elles seules, elles ne nous eussent permis que de rapporter de Rome les impressions d'un touriste. Ce qui nous est allé au cœur, ce sont les délicates attentions, aussi discrètes que multiples, plus encore que la réception large et fastueuse dont nous fûmes comblés, tant par nos collègues italiens que par les représentants des pouvoirs publics.

Je ne puis oublier quelques grands industriels : MM. Parodi Delphino, Pomilio et Quartieri, qui firent aux membres de la Conférence les honneurs de leurs établissements. Ce serait dépasser les limites qui conviennent à ce rapport que de vous exposer ce que nous y vîmes; nous fûmes émerveillés de l'organisation et de la puissance de ces usines : certaines peuvent rivaliser avec les établissements les plus vantés de l'Allemagne; elles ont réalisé de la manière la plus parfaite et la plus complète cette intime collaboration de la science et de l'industrie, si nécessaire au progrès économique d'une nation.

Mais ces Messieurs ne nous ont pas seulement permis de juger du magnifique développement de l'industrie chimique de leur patrie; ils ont également voulu nous faire connaître le charme de l'hospitalité italienne, et, pour ma part, je ne saurais oublier l'accueil que M^{me} et M. Quartieri voulurent bien réserver en leur home à quelques-uns d'entre nous. F. SWARTS.

COMMUNICATIONS ET LECTURES.

Esquisse d'une monographie des couches quaternaires des carrières du Hainaut à Soignies, par A. Rutot. — Impression dans les Mémoires in-8°.

TRAVAUX A L'EXAMEN.

— *Note sur la composition du cyanure d'allyle*, par P. Bruylants, et *Sur quelques propriétés physiques de l'hydrogène telluré*, par le même. — Renvoi à l'examen de MM. Swarts et de Hemptinne.

— *Sur quelques cristaux du diopase du Katanga*, par E. Schoep. — Renvoi à l'examen de MM. Cesàro et Lohest.

COMMUNICATIONS ET LECTURES.

La notion de l'espèce en biologie,

par JEAN MASSART, membre de la Classe.

La définition classique de l'espèce : « *le plus petit ensemble d'organismes qui se ressemblent plus qu'ils ne ressemblent à d'autres, et qui transmettent leurs particularités à leurs descendants* », implique que la systématique fait appel à la fois à l'observation et à l'expérimentation. La nécessité de cette dernière n'est reconnue que depuis peu de temps.

C'est par l'observation que nous constaterons la ressemblance entre les individus d'un groupe et leur dissemblance d'avec ceux d'un groupe voisin. Mais il n'y a que l'expérimentation pour nous renseigner sur la transmissibilité ou la non-transmissibilité des caractères distinctifs. Pour séparer les caractères qui font vraiment partie du patrimoine de l'espèce, de ceux qui, — tout en étant peut-être plus apparents, — ne sont pourtant dus qu'aux conditions extérieures, il faut absolument connaître la progéniture et élever celle-ci dans des milieux divers.

Ainsi Laurent (1888) a montré que des Champignons très différents, appartenant aux genres *Cladosporium*, *Hormoden-*

dron, *Fumago*, et même des Levures, ne sont en réalité que des accommodats d'une seule espèce. L'observation faisait reconnaître ici de multiples espèces, tandis que l'expérimentation les ramenait toutes à un type unique.

Le plus souvent toutefois, l'expérience ne conduit pas à l'unification, mais au morcellement. Linné avait de l'espèce une notion beaucoup trop large et ne cadrant nullement avec sa définition. La plupart des groupements qu'il désigne d'un même nom sont en réalité des agglomérats spécifiques. Il avait d'ailleurs constaté par lui-même que ses espèces montrent souvent une assez grande diversité; seulement il attribuait celle-ci au milieu, et il admettait, — sans aucune preuve expérimentale, — que ces variations ne sont pas héréditaires.

C'est le botaniste Jordan qui fit le premier l'expérience décisive. Il sema séparément les graines d'un grand nombre d'individus différents appartenant à une même espèce linnéenne, et il constata que dans beaucoup de cas ces différences sont héréditaires. D'une seule espèce linnéenne il tira ainsi toute une collection de groupes, qui répondaient très exactement à la définition donnée par Linné lui-même : possession de caractères communs, qui sont héréditaires. Ainsi du seul *Draba verna* de Linné, Jordan put extraire environ 200 espèces, parfaitement stables et irréductibles.

Les expériences de Jordan, reçues d'abord avec hésitation, ont été répétées et vérifiées par d'autres botanistes, notamment en ce qui concerne *Draba verna*, par de Bary et par M. Rosen.

Dans ces dernières années, une analyse expérimentale encore plus précise et plus pénétrante a montré que les espèces jordaniennes sont elles-mêmes des agglomérats. Dans une race de Haricots, en apparence homogène, M. Johanssen (1903) a pu séparer plusieurs séries, différant par les dimensions des graines, et transmettant leur taille à leurs descendants, dans les limites de la fluctuation. En d'autres termes, chacune de ces lignées possède une moyenne de taille autour de laquelle elle oscille.

Les races d'Animaux et de Plantes domestiques sont l'équivalent exact des espèces jordaniennes. Nous pouvons donc dire que l'espèce linnéenne se résout en espèces jordaniennes, et chacune de celles-ci en lignées. M. Lotsy (1916, 1) a proposé le nom de *linnéon* pour l'espèce linnéenne, et celui de *jordanon* pour l'espèce jordanienne; on pourrait par analogie appeler la lignée, le *johannsenon*.

Si c'était seulement chez les êtres domestiques que des lignées parfaitement constantes se laissent isoler, ces recherches n'auraient peut-être pas une grande portée, puisqu'on pourrait douter de leur applicabilité aux organismes vivant à l'état de nature. Mais voici une autre expérience: Dans une population d'Infusoires du jordanon *Paramaecium caudatum*, qui habitait une eau croupissante, M. Jennings (1909) a séparé huit lignées distinctes. Leurs dimensions extrêmes sont comprises entre 45 et 310 μ . Dans chacune de ces lignées, les longueurs oscillent autour de 210, 200, 194, 176, 142, 125, 100, 95 μ .

Voici encore un cas: Dans une forêt où les Chênes sont suffisamment distants pour que les glands ne risquent pas de se mêler en tombant, on constate aisément que chaque arbre donne des semences toutes semblables entre elles, mais différentes de celles d'un autre Chêne. Les particularités les plus apparentes se rapportent à la longueur absolue, à la grosseur absolue, à la relation entre la longueur et la grosseur, à la couleur, à l'état brillant ou mat de la surface.

J'ai eu l'occasion de faire des observations de ce genre pendant les années 1915 à 1918, à Antibes (Alpes-Maritimes). Pendant l'hiver 1916-1917, j'ai récolté tous les glands intacts et bien formés, qui étaient tombés sous trente-deux *Quercus Ilex* (Chêne Yeuse ou Chêne vert) de la presqu'île de la Garoupe et de Juan-les-Pins. Tous les arbres poussent dans un rayon de moins d'un kilomètre; ils sont sauvages.

Le nombre des glands ramassés sous chaque arbre variait d'une soixantaine à plusieurs centaines. Au premier coup d'œil on voit

que chaque individu d'Yeuse donne une progéniture très homogène, mais qu'il y a de grandes différences entre les lots de graines.

Pour étudier l'étendue des fluctuations, les glands de chaque arbre sont rangés par ordre de taille (fig. 1).

La fluctuation ressort tout aussi clairement si, au lieu d'aligner tous les glands d'un lot, on en choisit douze à intervalles réguliers dans la longue file.

La figure 2 représente des rangées de cette sorte, fournies par quelques-uns des arbres dont j'ai examiné la progéniture. On y voit que la descendance de chaque individu est très homogène; il n'y a entre les glands que des inégalités de taille, inégalités qui oscillent autour d'une moyenne et qui doivent être attribuées à la fluctuation. Mais chaque lot a son allure bien typique. Ici les glands sont cylindriques, là ventrus; =

tantôt gros et courts, tantôt allongés et pointus; — les uns petits, les autres volumineux; — dans certains lots la fluctuation est faible, dans d'autres elle est considérable...

Nous ne savons malheureusement pas si le gland dont est sorti l'arbre mère était semblable à ceux qui proviennent de lui; nous ne savons pas davantage si les arbres que donneront les glands si semblables d'un même lot seront, eux aussi, semblables.

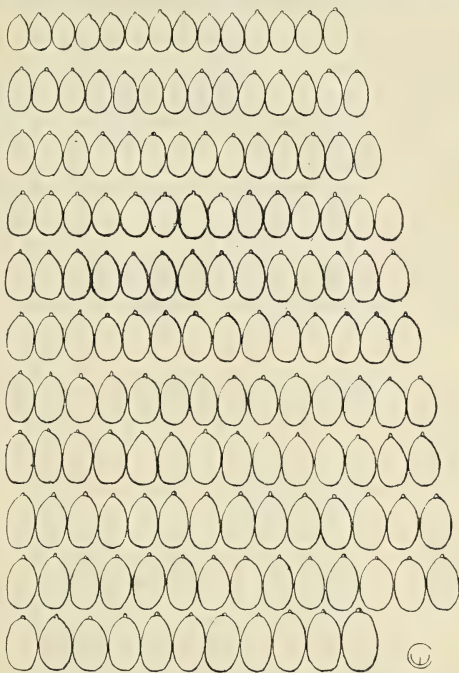


FIG. 1. — Glands d'un même individu de *Quercus flex*. Les 131 glands sont rangés par ordre de grandeur.

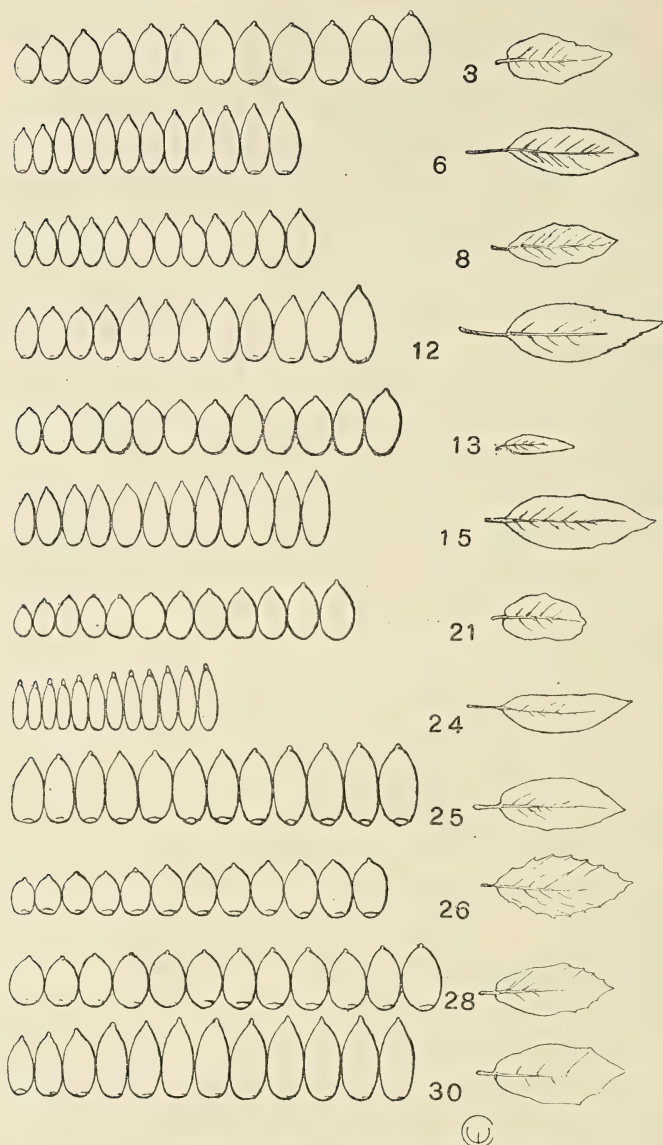


FIG. 2. — Rangées composées chacune de 12 glands d'un même individu de *Quercus Ilex*. Chaque rangée représente la fluctuation complète des glands d'un arbre; elle a été constituée en prenant parmi tous les glands ramassés sous un arbre, le plus petit, le plus gros et dix autres choisis à intervalles réguliers (voir fig. 4).

Nous ne connaissons, en somme, que les premières phases de l'ontogénie des descendants de chaque arbre; mais dans les limites de l'observation, le résultat est on ne peut plus démonstratif.

A plusieurs reprises j'ai constaté que des arbres croissant en un même point se ressemblent beaucoup, quant aux feuilles et quant aux glands. Comme *Quercus Ilex* ne drageonne pas, ces individus sont le produit d'autant de graines, et celles-ci dérivent sans doute d'un arbre plus âgé, ayant déjà disparu. Ceci indiquerait que les arbres frères restent semblables à l'état adulte, tout comme ils le sont dans le gland, et qu'ils donnent les mêmes descendants.

D'autre part je me suis assuré pour plusieurs arbres, notamment pour le n° 24 et pour le n° 30 que les glands produits quatre années de suite sont absolument les mêmes.

Une cinquantaine de glands de chaque lot, prélevés sans choix, furent semés au printemps de 1917. Les plantules provenant d'un même arbre se montrèrent aussi semblables que l'étaient les glands, et à ce point de vue l'expérience fut tout à fait concluante. Par contre, les différences entre les lots étaient assez peu marquées. On les distinguait à la dimension des feuilles, à leur teinte, à la longueur et au nombre des piquants marginaux, à leur pilosité, à l'ondulation plus ou moins accentuée de leur surface...; il y avait également des inégalités dans la vitesse de la germination : certains lots levaient au bout de peu de semaines, tandis que d'autres, dans des conditions identiques, ne poussaient qu'après un temps double; mais somme toute, les dissemblances n'étaient pas très apparentes. Il suffit d'ailleurs de regarder de jeunes Yeuses dans la forêt pour constater que le feuillage infantile varie peu d'un buisson à l'autre.

Autant les jeunes individus du Chêne vert se distinguent peu par les feuilles, autant les adultes sont disparates. Quand l'individu passe du stade infantile au stade adulte les feuilles épineuses font le plus souvent place à des feuilles inermes (fig. 3); plus

rarement quelques épines persistent (fig. 4). Quant à la dimension absolue des feuilles, à leur forme, à leur éclat, à leur teinte, à leur pilosité, à la longueur du pétiole, à la configuration de la pointe..., chacun de ces caractères varie énormément d'un arbre à l'autre, tout en étant constant pour toutes les feuilles d'un même individu adulte.



FIG. 3. — Rameaux de *Quercus ilex*, n° 10. En bas six rameaux de la base de l'arbre; en haut, huit rameaux de la partie supérieure, fertile.

La figure 2 donne une feuille moyenne, prise à chacun des arbres qui ont formé les rangées de glands. On voit que les feuilles sont étonnamment diverses et qu'il n'y a aucune relation entre leur forme et celle des glands.

Le similitude des feuilles d'un même arbre ne signifie

évidemment pas qu'elles sont exactement superposables : elles présentent en effet les mêmes variations que les glands. Ainsi, sur chaque rameau, les feuilles inférieures, moins bien nourries, sont plus petites que les feuilles du milieu ; quant aux dernières feuilles de chaque pousse, elles sont de nouveau sous-alimentées et réduites (fig. 3 et 4).



FIG. 4. — Rameau de *Quercus Ilex*, n° 25. En bas, trois rameaux de la base de l'arbre ; en haut, trois rameaux de la partie supérieure, fertile.

Un individu adulte de *Quercus Ilex* nous offre donc dans ses feuilles et dans ses glands trois sortes de variations :

1° Des différences produites par les conditions d'existence,

surtout par la nutrition. Suivant la position qu'elle occupe sur la tige, une feuille deviendra plus ou moins grande. De même, quand plusieurs glands sont portés par un rameau peu vigoureux, ils restent plus petits que le gland unique nourri par une forte branche. Ces différences sont le résultat de fluctuations; comme telles elles ne sont pas transmissibles.

2° Des différences dues à l'âge : les feuilles de la plante jeune sont épineuses, celles de la plante adulte sont d'habitude inermes. Ces différences sont héréditaires; elles font partie du stock de caractères de l'espèce linnéenne.

3° Des différences entre les individus; elles sont héréditaires et distinguent les lignées. Comment ces caractères distinctifs ont-ils été amenés : par mutation ou par hybridation? Nous examinerons plus loin cette question.

Nos observations et nos expériences sur *Quercus Ilex* prouvent donc que les différences constatées entre les arbres adultes sont permanentes et transmissibles. Cette constance est loin d'être admise par les botanistes. Voici, par exemple, ce que dit l'excellente *Flore de France* de Roux, t. XII, p. 321 (1910) :

OBSERVATIONS. — En ce qui concerne la forme des feuilles et leur dentelure, puis la forme des glands et leurs dimensions, disons que peu d'arbres présentent plus de variations que le *Quercus Ilex* L. Ces variations ont exercé la sagacité de plusieurs auteurs, parmi lesquels nous citerons, outre SAPORTA (*Prodrome d'une Étude comparative des Chênes vivants et fossiles...*, caractères propres à la végétation pliocène..., etc.); TENORE (*Syll. pl. Neap.*, p. 472); MARTIN-DONOS et TIMBAL-LAGRAVE (*in Bull. Soc. bot. Fr.*, XI, pp. XI et suiv.); GILLOT (*in Bull. Soc. bot. France*, XXIV, p. LVII); BORZI (*Fl. forest. ital.*, p. 409); LAGUNA (*Fl. forest. española*, p. 254); TRABUT (*Fl. d'Algérie*, pp. 824-825); PEREIRA COUTINHO (*in Bol. Soc. Brot.*, 6, p. 95); ALBERT et JAHANDIER (*Cat. pl. Var.*, pp. 439-444, avec 3 pl.), aux ouvrages desquels nous renvoyons nos lecteurs que l'étude de ces si nombreuses variations instables intéresserait plus particulièrement.

De même qu'un bouquet de *Quercus Ilex* comprend des types plus ou moins différents, une population quelconque de Végétaux ou d'Animaux est composée d'un mélange de lignées. Qu'on examine les *Papaver Rhoeas* ou les *Sonchus asper* et *S. oleraceus* d'un champ cultivé, les *Plantago Coronopus* d'un

pré salé, les *Lolium perenne* d'une prairie, les *Chenopodium album* d'un terrain vague...; une observation attentive y fait découvrir un mélange de formes diverses. Et si maintenant on sème séparément les graines de chaque individu, on isole sans peine plusieurs lignées, parfaitement constantes et irréductibles, où les moindres caractères se maintiennent inaltérés.

D'ailleurs il en serait exactement de même si l'on étudiait la population humaine d'une ville ou d'un village; ici aussi se révélerait la présence de lignées distinctes, dont les membres transmettent fidèlement leurs caractères à leur progéniture. Les particularités familiales sont en effet beaucoup plus stables qu'on ne l'imagine d'habitude; rappelons seulement que le menton des Habsbourg et le nez des Bourbons se sont montrés immuables à travers une longue suite de générations.

L'exemple des familles humaines prouve que malgré des croisements incessants, une lignée peut maintenir fidèlement ses caractères. Peut-être s'explique-t-on ainsi comment il se fait que tous les descendants d'un Chêne sont semblables, alors que les fleurs femelles dont ils dérivent ont reçu les pollens les plus disparates. Le problème est le même pour *Papaver Rhoeas* et *Lolium perenne*, qui sont autostériles.

*
* * *

C'est donc en dernière analyse la lignée qui correspond à la définition classique de l'espèce.

Faut-il essayer d'en donner une définition plus précise? M. Johannsen (1903), à qui on doit la connaissance de la lignée, la définit comme ceci : l'ensemble des individus dérivés d'un géniteur unique, autofécondé. Cette définition restreint la notion de lignée aux êtres autofertiles, ce qui nous paraît abusif. En 1909 il y ajouta une nouvelle restriction : le géniteur doit être, non seulement autofécondé, mais homozygote.

M. Lotsy (1916, 1) fait remarquer avec raison qu'il nous

serait radicalement impossible de décider si un individu est homozygote ou s'il ne l'est pas. Le seul procédé dont nous disposions est en effet l'analyse germinale par l'hybridation, et il est manifestement insuffisant.

D'ailleurs, à notre avis, il est tout à fait erroné d'exiger que le géniteur de la lignée soit homozygote, puisque nous connaissons des organismes qui appartiennent sûrement à une même lignée et qui dérivent d'un géniteur hétérozygote.

Les Quarantaines cultivées (*Matthiola annua*) sont d'habitude autofécondées. Or leur progéniture se dissocie régulièrement en individus à fleurs simples et individus à fleurs doubles, ce qui tient, d'après Miss Saunders (1911), à ce que les plantes à fleurs simples, seules fertiles, sont hétérozygotes. Dans ce cas, la lignée comprend donc des individus de deux formes : l'une, la double, est stérile ; l'autre, la simple, est hétérozygote et se disjoint à chaque génération.

Voici un exemple où les deux sortes d'individus issus de la dissociation sont l'un et l'autre fertiles. Chacun sait que beaucoup de Primevères (*Primula*) se présentent sous deux formes, à style long et à style court. La fécondation légitime est celle qui se fait entre un gamète mâle de l'une des formes et un gamète femelle de l'autre. Or les expériences de M. Gregory ont montré que le macrostyle est homozygote et le microstyle hétérozygote. Il en résulte qu'un macrostyle autofécondé donne uniquement des macrostyles, alors que dans les mêmes conditions un microstyle produit à la fois des microstyles et des macrostyles. Mais sauf pour les caractères dépendant de la microstylie ou de la macrostylie, les *Primula* dérivés d'un même couple, par fécondation légitime, sont semblables, ce qui signifie que la lignée renferme à la fois des individus à style long et des individus à style court.

Un pas de plus, et la dissociation donne des descendants les uns mâles, les autres femelles. C'est ce qui se rencontre chez beaucoup d'Insectes. On sait maintenant par les exemples

classiques d'*Anasa*, *Lygaeus*, *Tenebrio*, etc., que la femelle est homozygote et le mâle hétérozygote.

*
* *

Concluons: Il n'y a aucune raison pour exclure du concept de la lignée les organismes autostériles. Les exemples de *Papaver Rhoeas* et de *Lolium perenne*, où la fécondation ne se fait que par du pollen étranger et où la transmission des moindres particularités se fait pourtant avec une fidélité scrupuleuse, montrent que la notion de lignée peut être étendue aux êtres autostériles. D'autre part les Quarantaines et les Primevères nous apprennent que l'hétérogénéité de la progéniture se concilie parfaitement avec la pureté de la lignée.

*
* *

Demandons-nous à présent si dans les travaux de systématique et de biogéographie il faut dès maintenant abandonner les espèces linnéennes et les espèces jordaniennes, pour ne plus accorder d'attention qu'aux lignées. Évidemment non; ce serait d'ailleurs totalement impossible, — non pas tant parce que nous reculons devant la pulvérisation des espèces et l'extrême multiplication des noms, — que parce que, dans la plupart des pays et pour la plupart des Animaux et des Plantes, nous ne connaissons jusqu'ici que les gros ensembles formant les espèces linnéennes. Peut-être réussirait-on, par une observation attentive et longtemps continuée de très nombreux individus vivant dans des milieux variés, à y distinguer les espèces jordaniennes. Mais pour extraire de celles-ci les lignées, il faut forcément faire intervenir l'expérimentation, et celle-ci exige des installations scientifiques qui ne se rencontrent que sur un très petit nombre de points de la Terre.

Encore y a-t-il peut-être des cas où l'enchevêtrement des caractères est tellement inextricable qu'il faudrait un travail minutieux de plusieurs années pour le débrouiller. Regardons, par exemple,

les *Viola calcarata* d'un pâturage de montagne, dans les Alpes-Maritimes. Les caractères de couleur, de grandeur, de fertilité, de port de la fleur, sont tellement mélangés chez les divers individus, qu'on a l'impression que ceux-ci sont tous des hybrides. C'est seulement à la suite d'une longue série d'analyses germinales qu'on arriverait à séparer les multiples facteurs dont les combinaisons de toute nature donnent naissance au déconcertant brouillamini du pâturage alpestre.

Bien entendu, la systématique et la biographie doivent avoir pour idéal de pousser l'analyse de l'espèce jusqu'à la délimitation des lignées, faute de quoi, ces disciplines n'arriveront jamais à la précision. Pour ne citer qu'un cas, que valent nos connaissances actuelles sur la distribution géographique des espèces? Lorsqu'on déclare que telle espèce habite les côtes occidentales de l'Europe depuis le Portugal jusqu'en Scandinavie, on implique par là qu'il s'agit réellement d'une seule espèce, c'est-à-dire que les descendants d'un individu habitant la Norvège pourraient également bien vivre sur les rives du golfe de Gascogne. Mais qui nous dit que ce sous-entendu n'est pas faux? Rien ne prouve, en effet, qu'il n'y a pas, entre les lignées colonisant ces deux points des différences physiologiques rendant impossible l'acclimatation. L'expérience, pour autant que je sache, n'a pas été tentée; mais voici qui prouve l'existence de différences physiologiques : toutes les lignées de *Plantago Coronopus* de la côte belge que j'ai eues en culture étaient parfaitement autofertiles, tandis que les lignées de la côte d'Azur étaient sans exception autostériles¹.

*
* *

Une dernière question. L'origine des lignées se confond naturellement avec l'origine des espèces, mais cette origine quelle est-elle? Il ne me paraît pas douteux qu'elle soit triple : l'hybridation, la mutation générative et la mutation végétative.

Les exemples sont fréquents de types spécifiques dus au

croisement : la Poule Orpington, les Glaïeuls de Gand et de Nancy, etc. L'étude scientifique faite par de nombreux savants, à commencer par Mendel, ne laisse aucun doute sur la réalité du fait. Récemment M. Lotsy (1916,2) a décrit un intéressant hybride : *Antirrhinum rhinanthoides*, entre *A. majus* et *A. glutinosum*; il se comporte comme une vraie espèce linnéenne, comprenant de multiples lignées.

Que des espèces aient une origine hybride, cela n'est donc pas douteux. Mais nous ne pouvons pas suivre M. Lotsy (1916,1) quand il assure que nous ne connaissons pas de types spécifiques ayant une origine autre. On ne voit pas, par exemple, que le classique Mouton Mérinos de Mauchamps puisse être le résultat d'un croisement, car on cherche en vain quel serait le second ascendant.

Voici un autre cas, que je crois tout aussi probant : *Impatiens Sultani*, introduit de Zanzibar vers 1880, est une espèce parfaitement constante, se reproduisant toujours semblable à elle-même, tant par graines que par boutures. Dans un établissement d'horticulture d'Etterbeek, près de Bruxelles, elle produisit subitement en 1890, au milieu d'un semis en grande partie homogène, neuf plantes différentes, représentées chacune par un seul exemplaire, dont les fleurs avaient des formes et des coloris nouveaux. Ces plantes furent le point de départ d'autant de lignées tout à fait stables. Or, à cette époque on ne cultivait pas en Europe d'autres *Impatiens* avec lesquels *I. Sultani* aurait pu se croiser.

Mais à côté de ces cas de mutation générative, se manifestant lors de la conjugaison, on connaît aussi des mutations végétatives, qui surgissent en dehors de tout phénomène sexuel, et même chez des organismes privés de reproduction sexuelle. Rappelons seulement les spores, c'est-à-dire les mutations par bourgeons, qui ont donné les Brugnoniers, en partant de Pêchers. Mais les exemples les plus typiques et les plus intéressants sont ceux qui se rapportent à des êtres apogames, c'est-à-dire ayant perdu

la sexualité. *Lysimachia Nummularia* a donné une variété dorée, qui est cultivée communément dans les jardins. On connaît aussi un *Ficaria ranunculoides* à fleurs doubles. Quant à la stabilité de ces dérivés, elle a été démontrée par M^{lle} Terby (1919) pour 29 lignées de l'espèce jordanienne *Taraxacum intermedium*, appartenant à l'espèce linnéenne *T. officinale*.

RÉSUMÉ. — La définition classique de l'espèce ne correspond pas à l'espèce linnéenne, ni même à l'espèce jordanienne, mais à la lignée.

Un bon exemple de lignée est fourni par *Quercus Ilex*. Les glands d'un arbre sont semblables. Ils diffèrent souvent d'un arbre à l'autre, mais on rencontre parfois de petits groupes ayant les mêmes glands. Chaque arbre donne tous les ans des glands de la même forme. Les jeunes plantes provenant des glands d'un même arbre sont semblables, mais elles diffèrent de celles d'un autre individu. Chaque arbre a dans le jeune âge des feuilles plus épineuses.

Il y a beaucoup d'autres exemples de lignées stables chez les espèces sauvages.

Dans la définition de la lignée il ne faut faire intervenir ni l'autofécondation, ni l'homozygotie : on connaît en effet des lignées autostériles : *Lolium perenne* — et des lignées hétérozygotes : Quarantaines, *Primula*, Insectes.

La systématique et la biogéographie doivent provisoirement se contenter des espèces linnéennes et des espèces jordanienues.

Les lignées ont trois origines : l'hybridation, la mutation générative et la mutation végétative.

BIBLIOGRAPHIE.

R.-P. GREGORY, *Experiments with Primula sinensis* (JOURNAL OF GENETICS, t. I, p. 73, 1914). — *Note on the inheritance of Heterostylions in Primula acoulis*. (Hib., t. IV, 303, 1914.)

H.-S. JENNINGS, *Heredity and Variation in the simplest Organisms*. (THE AMERICAN NATURALIST, vol. XLIII, 1909, p. 322.)

JOHANNSEN, *Ueber Erblichkeit in Populationen und in reinen Linien*. Iena, Fischer, 1903.

— *Die exacte Erblichkeitslehre*. Iena, Fischer, 1909.

JORDAN. Ses premières publications sur l'espèce datent de 1853. Il résume ses idées dans : *Remarques sur le fait de l'existence en société à l'état sauvage des espèces végétales affines et sur d'autres faits relatifs à la question de l'espèce*. (CONGRÈS DE L'ASSOCIATION FRANÇAISE POUR L'AVANCEMENT DES SCIENCES, 1873.)

E. LAURENT, *Recherches sur le polymorphisme du Gladosporium herbarum* (ANNALES DE L'INSTITUT PASTEUR, 1888, vol. II, pp. 558 et 582). [Reproduit dans le *Recueil de l'Institut botanique de Bruxelles*, t. III, p. 43.]

J.-P. LOTSY, *Qu'est-ce qu'une espèce?* (ARCHIVES NÉERLANDAISES DES SCIENCES EXACTES ET NATURELLES, série II B, t. III, 1916, p. 57.)

— *Antirrhinum rhinanthoides*. (ARCHIVES NÉERLANDAISES DES SCIENCES EXACTES ET NATURELLES, série II B, t. III, 1916, p. 195.)

E.-R. SAUNDERS, *Further Experiments on the Inheritance of « Doubleness » and other characters in Stocks*. (JOURNAL OF GENETICS, t. I, p. 303, 1911.)

J. TERBY, Les Taraxacum de graine sont-ils différents des Taraxacum de bouture? (BULL. ACAD. ROY. DE BELG. CL. DES SCIENCES, 1919, p. 497.)

GÉOLOGIE. — A propos de l'origine de certaines failles des terrains primaires belges,

par P. FOURMARIER, Correspondant de la Classe.

Sous l'influence des poussées orogéniques, les terrains primaires de la zone hercynienne de nos régions sont coupés par de nombreuses failles longitudinales résultant soit de l'accentuation des plis secondaires, soit de la production des grands charriages; ces failles sont bien connues dans le terrain houiller, notamment où les travaux souterrains des charbonnages ont permis de déterminer leur allure en profondeur. Des cassures transversales affectent également le substratum ancien de la Belgique; on les considère comme étant en relation avec une zone affaissée de l'écorce terrestre, correspondant à la vallée inférieure du Rhin.

Mais, à côté de ces deux types de fractures, il en est un autre dont le mode de formation est encore assez obscur et qui

fera spécialement l'objet de la présente note. Ces cassures sont bien connues dans le versant nord du synclinal de Namur; elles sont à peu près parallèles à la direction générale du bassin, ou plutôt un peu obliques à celle-ci; les terrains situés au sud ont subi un mouvement relatif de descente, tandis que les failles de plissement montrent une descente de la région nord qui s'enfonce ainsi sous les terrains de la lèvre sud de la cassure.

Parmi les failles que j'ai en vue ici, l'une des plus typiques est sans contredit la faille de Landen, qui met en contact avec le silurien du Brabant le calcaire carbonifère supérieur et même, sur une petite partie de sa longueur, le terrain houiller du synclinal de Namur. Son mouvement apparent est donc bien une descente de la région sud; la surface de faille a été touchée par les travaux des mines qui ont exploité la couche d'oolithe du dévonien supérieur; son inclinaison est d'environ 70° au nord; sa direction est légèrement oblique à la direction du bord nord du synclinal de Namur.

La faille qui, à Horion-Hozémont, met également le calcaire frasien, le calcaire carbonifère et le houiller du versant nord du synclinal de Namur en contact avec le silurien du Brabant est du même type et a certainement la même signification.

Il est remarquable que ces failles, malgré l'amplitude de leur rejet, ont un développement longitudinal relativement restreint; c'est ainsi que la faille de Landen disparaît très rapidement à l'est du point où elle fait descendre le houiller au niveau du silurien.

Dans le nord du bassin houiller de Liège, l'exploitation de la houille a décelé l'existence de fractures du même type, à rejet moindre, mais identiques quant à leur direction et leur inclinaison; elles se caractérisent par leur peu de continuité en direction et, par suite, par la variabilité très grande de leur rejet; enfin, elles n'affectent qu'une certaine épaisseur de la formation houillère.

Dans le bassin du Hainaut, des faits analogues ont attiré

récemment l'attention. M. l'ingénieur Cambier, qui a si bien étudié la région nord de Charleroi, a observé plusieurs de ces cassures; elles ont une forte inclinaison et se caractérisent, comme dans le bassin de Liège, par la descente apparente de la lèvre sud; elles ont ainsi, quant au sens *apparent* du mouvement dans une coupe transversale, l'aspect des failles dites normales, et M. Cambier les désigne sous ce nom, par opposition aux autres failles longitudinales à pendage sud qui sont du type des failles inverses ⁽¹⁾, le toit étant remonté par rapport au mur.

Les failles dites « normales » de la bordure nord du bassin du Hainaut paraissent être en relation avec les mouvements anticlinaux, soit longitudinaux, soit transversaux ⁽²⁾.

M. Cambier croit pouvoir y rattacher les accidents si particuliers du bassin houiller du Hainaut connus sous le nom de *puits naturels*, dont l'origine, restée si énigmatique jusqu'à présent, a été ordinairement attribuée à des effondrements résultant de la production de vides dans le calcaire carbonifère sous-jacent, voire même à l'action d'eaux souterraines ayant traversé le terrain houiller. Leur section transversale parfois très faible par rapport à leur hauteur, certaines irrégularités dans cette section et la terminaison de quelques-uns de ces puits sortant avant d'atteindre la surface du houiller, rendent ces explications peu plausibles. Il ne reste plus alors qu'à rechercher la cause de ces accidents dans des actions tectoniques ⁽³⁾.

(1) J'estime que dans l'état actuel de la science, les termes de failles « normales » et « inverses » devraient disparaître de la nomenclature géologique.

(2) Voir R. CAMBIER, *Étude sur les failles du bassin houiller belge dans la région de Charleroi*. (ANN. SOC. GÉOL. DE BELGIQUE, t. XLIII, MÉM., 1920.)

(3) Voir à ce sujet : F.-L. CORNET et A. BRIART, *Notice sur les puits naturels du terrain houiller*. (BULL. ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 2^e série, t. XXIV, 1870.)

J. CORNET et G. SCHMITZ, *Note sur les puits naturels du terrain houiller du Hainaut et le gisement des iguanodons de Bernissart*. (BULL. SOC. BELGE DE GÉOL., t. XII, MÉM., p. 301, 1898.)

J. SMEYSTERS, *Notice sur quelques puits naturels du terrain houiller de Charleroi*. (ANN. SOC. GÉOL. DE BELGIQUE, t. XXXI, MÉM., p. 237.)

M. l'ingénieur J. Dubois, très versé également dans toutes les questions relatives à la structure du bassin de Charleroi, suppose que certains de ces puits sont en relation avec les plissements et sont dus à des décollements peu profonds ⁽¹⁾.

M. R. Cambier a fait observer à ce sujet qu'il semble y avoir une communauté d'origine entre ces puits naturels et les failles normales de la bordure nord du bassin houiller du Hainaut; d'après lui, le massif du Brabant, faisant office de masse résistante, aurait provoqué les décollements invoqués par M. Dubois.

Le phénomène est donc général sur toute l'étendue du versant nord du synclinal de Namur, au voisinage de l'anticlinal siluro-cambrien du Brabant.

Ces failles que je viens de décrire se présentent ainsi d'une manière toute spéciale et diffèrent profondément des failles de plissement et des charriages, même lorsqu'elles sont presque parallèles à la direction générale des couches; lorsqu'elles font un angle plus grand avec cette direction, elles ont, au contraire, une grande analogie avec les failles transversales en relation avec la zone affaissée de l'Est de la Belgique.

Il y a donc là un phénomène intéressant à préciser dans l'évolution de la tectonique des terrains paléozoïques de la Belgique.

Les dislocations de l'écorce terrestre peuvent avoir des amplitudes extrêmement variables; le rejet des failles peut atteindre plusieurs kilomètres; il peut être réduit à une fraction de centimètre; la cause et le mode de production peuvent néanmoins être identiques; la grandeur du déplacement est proportionnelle à l'intensité de l'effort.

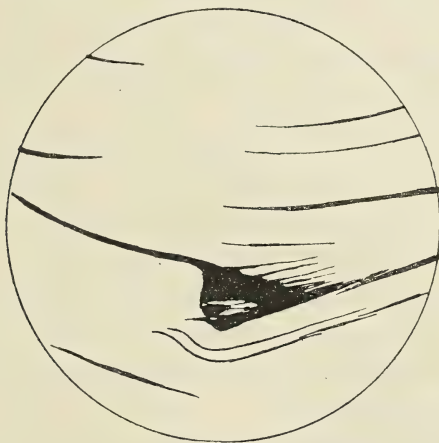
Il est souvent plus facile d'expliquer la production d'une dislocation de faible amplitude, parce que l'œil peut embrasser l'ensemble du phénomène. C'est pourquoi je crois intéressant

(1) *Annales Soc. géol. de Belgique*, t. XLIII. (BULL., Procès-verbal de la séance du 17 novembre 1919.)

de soumettre à l'Académie un échantillon provenant du terrain houiller de Liège et qui permet de concevoir la façon dont ont pu se produire les cassures du type des failles normales que j'ai en vue dans cette étude.

Il s'agit d'un fragment de carotte provenant du sondage du Bonnier à Grâce-Berleur, effectué il y a une vingtaine d'années par les charbonnages d'Espérance et Bonne-Fortune, du Bonnier et de Patience-et-Beaujonc, dans le but de reconnaître le bord nord du bassin de Liège.

Cet échantillon est formé de schiste noir, à grain fin, à rayure grise; la stratification est nettement indiquée par des zones brunes, ferrugineuses, parallèles au feuilletage de la roche; on remarque que l'inclinaison n'est que de quelques degrés; en ce qui concerne le sens de cette inclinaison, on peut admettre qu'elle est dirigée vers le Sud-Est conformément à l'allure générale des couches dans cette partie du bassin de Liège.



Le schiste est traversé par un réseau de veines parallèles entre elles, légèrement courbes sur une partie de leur longueur et quelque peu obliques à la direction des strates; leur remplissage consiste partie en pholélite, partie en quartz fibreux.

Le déplacement des parois suivant la verticale est à peine

sensible; par contre il s'est fait un glissement dans le sens horizontal lors de la production des veines, puisque leurs lèvres montrent des stries de glissement très nettes disposées à peu près horizontalement.

L'échantillon montre la terminaison de quelques veines dans le sens horizontal; il en laisse voir également qui se terminent en coin dans le sens vertical.

Ce réseau de petites veines traversant le fragment de schiste du sondage du Bonnier a pris naissance sous l'action d'une poussée sensiblement horizontale comme le montre la disposition des stries de glissement. Une autre particularité vient encore à l'appui de cette manière de voir : l'une des veines montre un renflement brusque de son remplissage et ce changement paraît dû à un véritable refoulement de la masse du schiste, à un décollement des deux lèvres de la cassure. C'est un phénomène que l'on observe fréquemment dans les fractures de refoulement à faible inclinaison provenant de l'accentuation d'un pli; dans le cas qui nous occupe ici, le déplacement de la matière se fait suivant une surface presque verticale; en outre, ce mouvement correspond à une courbure des veines en direction et les veinules les plus proches épousent son allure.

Le remplissage de cette partie renflée est constitué par du quartz fibreux et de la pholélite comme dans les veines, mais aussi par une véritable brèche formée de petits fragments de schiste séparés par de minces veinules; la partie renflée n'a qu'une faible extension suivant la verticale, car elle ne se montre plus sur la face inférieure de l'échantillon, qui n'a cependant que 7 centimètres de hauteur.

Je crois pouvoir établir une comparaison entre les veines de l'échantillon du sondage du Bonnier et les failles à fort pendage découpant le versant nord de notre bassin houiller de Sambre-Meuse.

De part et d'autre, on observe la même atténuation rapide tant en direction qu'en profondeur; au charbonnage du Bonnier,

j'ai pu observer un véritable réseau de ces fractures et j'ai remarqué qu'à la disparition de l'une d'entre elles correspond la naissance d'une autre; c'est ce que montre aussi l'échantillon du sondage malgré ses petites dimensions.

Les observations sur ce fragment de schiste démontrent que dans un banc de roche conservant une allure régulière, il peut s'être fait des déplacements de la matière de part et d'autre de fractures fortement redressées sans que les bancs voisins aient été nécessairement influencés.

Nous pouvons étendre ces conclusions à une masse plus considérable de terrains; mais au lieu de fentes intéressant un banc ou une partie de banc de roche, nous aurons affaire à des failles à forte pente ayant un rejet appréciable; il n'empêche que, comme les petites veines, elles peuvent être attribuées à des poussées horizontales, aussi bien que les failles peu inclinées provoquées par l'accentuation directe du plissement.

A l'appui de cette thèse, je signalerai qu'au charbonnage de la Concorde, j'ai observé la présence de stries de glissement horizontales sur l'une des parois d'une faille verticale, très légèrement oblique à la direction générale des couches et provoquant un mouvement apparent d'affaissement de la région s'étendant au Sud, c'est-à-dire répondant strictement au type des failles que j'ai envisagées précédemment.

Dans son travail déjà cité, M. Cambier fait observer que dans la région nord de Charleroi, certains puits naturels sont alignés suivant les fractures de ce type.

Le renflement que j'ai signalé dans le remplissage d'une des petites veines de l'échantillon du sondage du Bonnier est en quelque sorte l'explication des phénomènes de ce genre. Sous l'action de la poussée, il s'est produit un décollement suivant l'une des cassures du schiste, et le vide ainsi formé s'est rempli de débris et de produits d'exsudation de la roche. Si l'on imagine le même phénomène se produisant sur une grande échelle, on trouvera soit un simple décollement avec remplissage de terrains

éboulés, soit une cassure se divisant en deux branches sur une partie de sa longueur, de manière à isoler un bloc plus ou moins étendu, limité en profondeur comme en direction et qui a subi un déplacement apparent par rapport aux régions avoisinantes.

On s'expliquerait ainsi l'alignement de certains puits naturels suivant les failles à forte inclinaison.

On pourrait s'étonner de ce que les efforts de compression auxquels fut soumise l'écorce terrestre puissent provoquer des mouvements tels que celui que j'ai envisagé, c'est-à-dire le déplacement horizontal des masses de terrains de part et d'autre d'une cassure fortement inclinée.

Les recherches expérimentales peuvent jeter quelque lumière sur la solution de ce problème.

Dans ses remarquables expériences de tectonique ⁽¹⁾, M. le professeur Max Lohest a comprimé du sable fin entre deux planchettes faisant un angle dièdre; il a constaté qu'il se produit dans la masse du sable un réseau de fissures qu'il a comparées au clivage schisteux.

Si l'on observe attentivement ce qui se passe au cours de l'expérience, on constate que ces fissures s'orientent généralement suivant deux directions principales, dont l'une est parfois presque parallèle à l'arête du dièdre; on remarque en outre que, de part et d'autre de ces fentes, le sable se déplace horizontalement, ou plus exactement un peu obliquement, de manière à provoquer une légère dénivellation le long de ces fissures ⁽²⁾. L'expérience réalise donc ce que montre l'échantillon de schiste décrit ci-dessus et, par conséquent, elle donne aussi l'explication du mode de production des failles envisagées, soit dans le terrain houiller, soit à la bordure du bassin (faille de Landen, faille de Horion-Hozémont).

⁽¹⁾ *Annales Soc. géol. de Belgique*, t. XL, MÉM., 1913.

⁽²⁾ La composante verticale est cependant moindre que la composante horizontale.

Dans ce travail préliminaire, je ne prétends pas résoudre définitivement la question de l'origine de ces accidents tectoniques. J'ai voulu seulement montrer que le problème est très complexe et qu'en réalité les efforts auxquels les roches ont été soumises ne sont pas aussi simples que nous sommes portés à nous le figurer d'après le déplacement apparent.

Il resterait à examiner à quel moment ces déformations se sont produites, mais il faudrait alors reprendre toute la question de l'âge relatif des divers types de fractures qui découpent les terrains anciens de la Belgique; c'est là une étude de grande envergure, demandant des observations nouvelles et qui fera l'objet d'un mémoire que je soumettrai prochainement à la Société géologique de Belgique.

CHIMIE. — Contribution à l'étude du trifluortoluène,

par FRÉD. SWARTS, Membre de l'Académie.

J'ai été amené récemment à reprendre l'étude du trifluortoluène, que j'avais obtenu en 1898 par l'action du trifluorure d'antimoine sur le chloroforme benzoïque ⁽¹⁾. J'avais signalé alors la résistance du chaînon CFl_3 , notamment à l'action des agents d'hydrolyse.

Dans ce travail j'avais indiqué que dans la préparation du trifluortoluène il est nécessaire de mettre en œuvre un grand excès de $\text{C}_6\text{H}_5\text{CCl}_3$ et d'opérer sur de petites quantités de matière, le trichlorure d'antimoine et le fluorure de silicium, ce dernier produit par contact du verre avec SbFl_3 provoquant à chaud une carbonisation importante. De plus il faut conduire l'opération rapidement. J'ai reconnu que l'opération s'exécute beaucoup plus commodément et avec de meilleurs rendements

⁽¹⁾ *Sur quelques dérivés fluorés du toluol.* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, t. XXXV, pp. 375-420.)

dans un appareil en platine. On peut réduire l'excès de chloroforme benzoïque à 100 % et mettre en œuvre une molécule-gramme de fluorure d'antimoine en une même opération.

Le ballon de platine, auquel est adapté un réfrigérant descendant, reçoit 400 grammes de $C_6H_5CCl_3$ et 180 grammes de $SbFl_3$; on chauffe rapidement à 125° - 140° , et l'on maintient cette température en évitant de dépasser 140° . Bientôt le fluoroforme phénylique distille vivement et en moins de vingt minutes l'opération est terminée. 400 grammes de chloroforme phénylique traités par 180 grammes de fluorure d'antimoine fournissent 140 grammes de produit brut.

J'ai essayé d'utiliser le résidu à une seconde opération, en y ajoutant 200 grammes (1 molgramme) de $C_6H_5CCl_3$ et 180 grammes de $SbFl_3$. A 130° la réaction s'est emballée; il se produisit des torrents de HCl et je n'obtins que 109 grammes de produit brut. Le contenu du ballon était transformé en une masse charbonneuse, imprégnée de $SbCl_3$ et dans laquelle je n'ai plus trouvé trace de chloroforme benzoïque. On ne saurait donc recommander d'opérer en présence d'un excès de chlorure d'antimoine.

J'ai entraîné le produit brut à la vapeur d'eau; après dessiccation il a été rectifié sur P_2O_5 . Aux dépens de 240 grammes, j'ai isolé 205 grammes de trifluortoluène bouillant de 102.5 à $103^{\circ}.2$ (Bav. 759.6). Sur un échantillon j'ai déterminé le point de solidification du trifluortoluène, lequel cristallise vers -30° . La cristallisation se fait comme celle de la glace, avec formation d'une couche transparente, adhérente aux parois.

La détermination fut faite à l'air libre sur 160 grammes; le point de solidification initial était de $-29^{\circ}.28$. J'ai décanté 46 grammes d'eaux mères. La masse cristalline fut fondue et distillée sur du sodium; le point de solidification fut repris, mais en opérant à l'abri de l'humidité atmosphérique. J'ai trouvé $-29^{\circ}.05$, la surfusion initiale étant limitée à 1° . La température de solidification resta absolument constante pen-

dant toute la durée de la congélation. Les épreuves de fractionnement, tant par cristallisation que par distillation, ne permirent pas d'isoler des fractions à point d'ébullition plus élevé ou plus bas.

Si je suis entré dans quelques détails au sujet de ces mesures c'est afin de montrer que le trifluortoluène est un corps très facile à obtenir rapidement à un haut degré de pureté.

Son point de solidification est de $-29^{\circ}.05$; j'estime l'approximation obtenue à $\pm 0^{\circ}.05$.

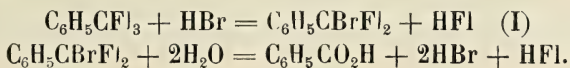
J'ai repris l'étude de l'hydrolyse du trifluortoluène en employant, non pas l'eau pure, mais une solution deux fois normale d'HCl.

Après quinze jours de chauffe en vase clos à 150° , l'attaque du chaînon fluoré est encore insignifiante.

Des essais nombreux de substitution bromée effectués en vases clos sur des dérivés fluorés m'ayant montré qu'à température élevée et à l'intervention de la silice du verre, l'acide bromhydrique peut provoquer un remplacement du fluor par le brome, le fluor passant à l'état de SiF_4 , j'ai essayé d'appliquer cette réaction à l'attaque du chaînon CFl_3 . Pour éviter la corrosion du verre et la rupture du tube, j'ai opéré en présence de silice amorphe employée en léger excès.

J'ai chauffé le trifluortoluène en présence de quatre fois son poids d'acide bromhydrique fumant ($D = 1.79$). A 125° il n'y a pas d'action sensible, mais 48 heures de chauffe à 160° amènent une transformation quantitative en acide benzoïque.

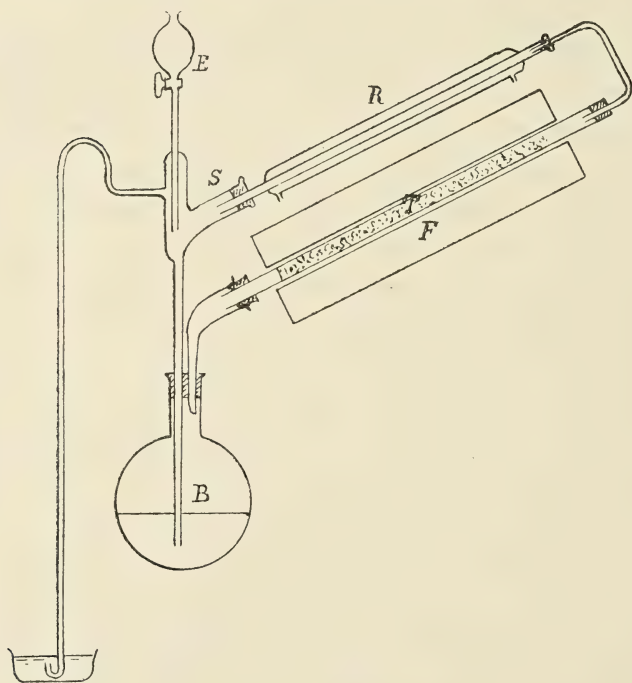
Le mécanisme de la réaction est probablement le suivant : la très grande différence d'affinité du fluor et du brome pour l'hydrogène tend à déterminer une substitution du premier par le second dans le chaînon CFl_3 ; l'équilibre est rompu, à l'intervention de la silice et par hydrolyse du dérivé fluobromé, lequel passe à l'état d'acide benzoïque.



La détermination de l'ordre de la réaction permettrait d'établir le nombre d'atomes de fluor remplacés dans la réaction (I).

Action des métaux sur le trifluortoluène. — On sait que $C_6H_5CCl_3$ se laisse aisément réduire par les métaux, notamment par le cuivre. Les essais de réduction que j'avais effectués jadis par la même méthode sur $C_6H_5CFI_3$ en opérant en tubes scellés, d'abord à 150° puis à 120° , n'avaient conduit à aucun résultat.

J'ai repris l'étude de cette réaction en employant comme réducteurs le fer et le cuivre et en opérant de manière à soustraire éventuellement le produit de la réaction au contact prolongé du métal à haute température et à éviter ainsi des décompositions catalytiques. Le dispositif expérimental est le suivant :



Le trifluortoluène était placé dans le ballon B, muni d'une rallonge ascendante dans laquelle débouchait un tube T en cuivre

rouge étiré de 16 millimètres de diamètre intérieur et de 80 centimètres de long, renfermant une couche de 50 centimètres de longueur de cuivre réduit, maintenue par des tampons de toile métallique. Les vapeurs sortant de ce tube étaient ramenées dans un réfrigérant R; le liquide condensé reflua dans le ballon par la rallonge S. A celle-ci était soudé un ajutage portant l'entonnoir à robinet E et un tube manométrique M plongeant dans une cuvette à mercure.

Le tube T était placé dans le four électrique à résistance F, qui l'entourait sur une longueur de 55 centimètres.

Par l'entonnoir à robinet R, j'ai d'abord déplacé l'air de l'appareil par CO_2 , puis j'ai introduit 60 grammes de trifluortoluène, lequel fut ensuite porté à l'ébullition. La chauffe fut réglée de manière que dans la rallonge S se fit un reflux de liquide condensé à raison de deux ou trois gouttes par seconde, ce qui correspond à un passage à travers le tube de 3 grammes de vapeur à la minute.

Le four fut ensuite réglé de façon à réaliser une température de 350° à 10 centimètres de son extrémité supérieure.

L'opération était arrêtée chaque soir; elle fut poursuivie de manière à réaliser une durée effective de 30 heures de chauffe à 350° . A de longs intervalles se dégageait une bulle de gaz qui, recueillie sur le mercure, fut reconnue comme étant du fluorure de silicium.

Le chauffage du four fut arrêté et le trifluortoluène maintenu en douce ébullition de manière à épuiser le contenu du tube par distillation ascendante. Le trifluortoluène fut ensuite rectifié. Il passa intégralement à la distillation entre $101^\circ.8$ et 103° , sauf un résidu pesant $0^{\text{gr}},6$ et qui se prit partiellement en cristaux.

J'ai traité ce résidu par une solution aqueuse de soude caustique, dans laquelle les cristaux se sont dissous lentement, le résidu insoluble étant du trifluortoluène inaltéré. La solution alcaline, traitée par HCl , fournit par épuisement à l'éther $0^{\text{gr}},019$ d'acide benzoïque.

La formation d'acide ou plus exactement d'anhydride benzoïque est due à l'attaque du verre par le fluoroforme phénylique, et elle se fait dans le tube reliant le réfrigérant au tube de cuivre qui reçoit des vapeurs de fluoroforme phénylique portées à haute température. Elle est d'ailleurs fort peu importante.

J'ai repris la même expérience en remplaçant le cuivre par de la tournure de fer. Elle a été poursuivie pendant trois jours, à raison de neuf heures de chauffe par jour.

Après rectification du trifluortoluène j'ai obtenu un résidu très faible qui, traité par la soude, s'est dissous presque intégralement, laissant 0^{gr},004 d'un produit cristallin que je n'ai pas identifié. La solution alcaline fournit, par l'action de HCl, quelques milligrammes d'acide benzoïque.

Conclusion: Ces essais confirment, en les amplifiant, les résultats que j'avais déjà obtenus : même à 350°, ni le fer, ni le cuivre ne réduisent le chaînon CFl_3 dans $\text{C}_6\text{H}_5\text{CFl}_3$, qui montre ainsi une extraordinaire stabilité.

Nitration du trifluortoluène. — Dans mon premier travail sur le trifluortoluène, j'avais signalé que la nitration se fait en métaposition, ce que j'avais démontré par transformation du dérivé nitré en acide isophtalique. Il n'avait pas été fait de déterminations quantitatives : mes conclusions reposaient sur le fait que je n'avais pas observé la formation d'isomères.

Dans son livre sur la *Substitution dans le noyau benzénique*, M. Holleman affirme (p. 479) que lorsque dans un radical on remplace l'un des éléments par un substituant ayant même pouvoir d'orientation que le radical lui-même, le pouvoir d'orientation de ce dernier n'est pas modifié. Il invoque précisément comme preuve que lorsque dans la chaîne latérale du toluène on introduit un halogène, la substitution se fait encore en ortho et para, comme dans le toluène lui-même. Cette

affirmation est en discordance avec les résultats que j'avais obtenus, car le fluor est, comme les autres halogènes, un substituant de première classe.

J'ai estimé qu'une vérification quantitative s'imposait, en vue d'établir la proportion de métadérivé qui se forme.

Je donnerai ici le résultat d'une expérience qui a été conduite sans pertes.

La nitration a été faite à froid : la réaction étant très lente, j'ai pu mettre en œuvre un fort excès d'acide nitrique.

J'ai amené goutte à goutte 42 grammes de trifluortoluène dans 100 grammes d'acide nitrique pur de densité 1,495, refroidi à 0°; l'introduction prit une heure sans qu'il se fît une élévation sensible de température. Je maintins encore dans la glace pendant une heure et demie, puis déversai sur de la glace. J'obtins par décantation 46^{gr},4 de produit brut, lequel fut distillé au bain-marie sous 40 millimètres de pression; le résidu pur distillable pesait 26^{gr},55. Le liquide distillé, rectifié, passa intégralement à la distillation entre 102° et 103°; la distillation au bain-marie sous 40 millimètres n'entraîne par conséquent pas de pertes en dérivé nitré.

Le nitrotrifluortoluène brut fut chauffé ensuite à 150° sous 160 millimètres de pression, de manière à éliminer plus parfaitement le trifluortoluène inaltéré, ainsi qu'un peu d'acide nitrique retenu. Le point de solidification du résidu était de —4°.80. J'ai chauffé à nouveau à 120° sous 30 millimètres jusqu'à distillation d'une seule goutte de liquide. Après cette opération, le point de solidification monta à —3°.95. J'ai distillé une partie du produit sous la pression atmosphérique; le point de congélation du liquide distillé était de —4°; la distillation ne produit donc pas de fractionnement.

Pour déterminer la proportion des différents isomères, j'ai cherché d'abord à transformer le trifluornitrotoluène en acide nitrobenzoïque; la séparation des acides nitrobenzoïques isomères est en effet assez facile. Mais j'ai reconnu qu'il était plus

avantageux de procéder par transformation en trifluortoluidine, dont les dérivés acétylés devaient se prêter éventuellement à une séparation par cristallisation fractionnée.

20 grammes de nitrotrifluortoluène ont été réduits par le fer en présence d'une petite quantité (4 grammes) d'acide sulfurique dissous dans 400 centimètres cubes d'eau. La toluidine produite a été entraînée par la vapeur d'eau et enlevée par l'éther. La bouillie d'hydroxyde ferrique fut également épuisée par l'éther. Le résidu de distillation de la solution éthérée fut chauffé à 90° sous pression réduite, puis acétylé par l'anhydride acétique dissous dans l'acide acétique glacial.

L'acétotrifluortoluidine brute fut dissoute dans l'eau bouillante et soumise à une série de cristallisations fractionnées répétées. J'ai isolé ainsi 21^{gr},97 de métatrifluoracétotoluidine fondant à 103°.5, alors que le rendement total eût dû être de 22^{gr},21.

De l'ensemble des eaux mères, réduites à 50 centimètres cubes, se séparèrent quelques conglomerats cristallins disposés en sphérules et très différents des longues aiguilles que forme la métatrifluortoluidine. Il me fut facile de les trier.

Par évaporation presque complète des eaux mères, j'obtins une quantité totale de 0^{gr},152 de ce second produit de nitration, dont le point de fusion, peu net, était de 145°. Il fut recristallisé de l'eau bouillante; j'isolai ainsi encore une petite quantité de métadérivé et quelques milligrammes d'un isomère fondant nettement à 151°.5. Cette masse était trop faible pour que je pusse l'identifier. Je recueillis en outre quelques aiguilles, très déliées, fusibles à 86° et plus solubles que le métadérivé. Leur poids était si minime que je n'ai pu les soumettre à une nouvelle purification. C'est probablement le dérivé ortho, le produit fondant à 151°.5, le moins fusible, étant l'isomère para.

Il ressort de ces observations que la nitration de l' α trifluortoluène se fait en métaposition au moins pour 99 %, la proportion des autres isomères ne dépassant pas 0.7 %. Ainsi se

trouvent confirmées quantitativement les conclusions de mes premières recherches.

J'ai eu connaissance au cours de ce travail d'un mémoire d'Elisabeth Spreckels (*Berichte*, t. LII, p. 315), qui réussit à nitrer le chloroforme benzoïque dissous dans CCl_4 , à l'intervention de N_2O_5 . En transformant le produit de nitration en acides nitro-benzoïques, elle a reconnu que la proportion de métadérivé s'élève à 75 %. Le chaînon CCl_3 , comme CFl_3 , oriente donc essentiellement en métaposition, mais pour ce dernier la formation du métadérivé est presque exclusive.

J'ai également essayé la nitration en laissant arriver HNO_3 dans le trifluortoluène chauffé à $77^\circ.5$, mais la réaction n'est plus régulière. Le produit obtenu se dissout partiellement dans l'eau, en la colorant en jaune, et cède à une solution de Na_2CO_3 40 % de son poids. Dans ces conditions l'étude du rendement n'avait plus rien d'intéressant au point de vue du pouvoir d'orientation du chaînon CFl_3 .

Je me suis heurté au même écueil dans les essais de bromuration.

J'ai d'abord tenté la bromuration en chauffant au reflux des quantités équimoléculaires de brome et de $\text{C}_6\text{H}_5\text{CFl}_3$ en présence de AlBr_3 ; il ne se fit pas de substitution.

J'ai chauffé alors, dans les mêmes conditions, à 170° pendant six heures. La substitution se fit très incomplètement; elle s'accompagna d'une réaction du chaînon CFl_3 sur le verre. J'ai enlevé l'excès de brome par Na_2SO_3 . En lavant ensuite par NaOH (qui n'attaque pas le groupement CFl_3) j'ai retrouvé dans la solution aqueuse de l'acide benzoïque et de l'acide m. bromobenzoïque. La formation de ce dernier n'est pas concluante, la bromuration ayant pu porter sur l'acide benzoïque primitivement formé. L'intervention du verre dans la réaction rend impossible toute étude du mode d'action du brome sur le trifluortoluène; cette recherche ne sera possible qu'en opérant dans un appareil en platine.

L'étude de la nitration de l' α trifluortoluène et les résultats obtenus par E. Spreckels pour l' α trifluortoluène démontrent que la proposition formulée par Holleman n'est pas conforme aux faits. On comprend d'ailleurs difficilement pourquoi, si sa thèse était exacte, CH_2OH , orientant en ortho-para, COOH , qui n'est en somme que du méthyle complètement substitué par OH et que l'on peut considérer comme analogue à CCl_3 ou à CFI_3 , orienterait en méta, à moins d'admettre une influence spécifique de la double liaison carbonyle. Or dans la nitration de l'acétophénone il se fait 45 % d'ortho-para pour 55 % de métadérivé (à 0°). En remplaçant dans $\text{C}_6\text{H}_5\text{COCH}_3$ le méthyle par OH, dont le pouvoir d'orientation vers 2 et 4 est bien supérieur à celui de CH_3 , on élève à 80 % dans les mêmes conditions la proportion de l'isomère 3 (Holleman), alors que cette proportion devrait diminuer.

Comme je l'ai déjà fait observer dans un autre travail, c'est l'accumulation, sur l'atome lié au noyau benzénique, de groupements qui le sursaturent qui provoque l'orientation en méta. Dès lors on conçoit que lorsque l'oxygène, élément plus que bivalent, se substitue à l'hydrogène du méthyle, le pouvoir d'orientation se modifie de manière à diminuer la quantité d'ortho et du para dérivé. C'est aussi pourquoi le remplacement de H aldéhydique dans l'aldéhyde benzoïque $\text{C}_6\text{H}_5\text{CHO}$ par le méthyle, moins saturant que l'hydrogène, amène une régression dans la proportion du méta dérivé produit par nitration. Dans l'alcool benzylique et le chlorure de benzyle la sursaturation du carbone méthanique est encore insuffisante pour provoquer une orientation importante vers la métaposition.

Laboratoire de chimie générale,
Université de Gand.

Sur l'hydrogénation catalytique des dérivés organiques fluorés,

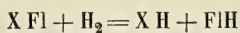
par FRÉD. SWARTS, Membre de l'Académie.

(Première communication.)

On sait que l'action de l'hydrogène moléculaire, catalysée par les métaux du huitième groupe, donne lieu, chez les dérivés organiques halogénés, à une substitution de l'halogène ; il suffit de rappeler notamment les travaux de Sabatier et de Rosenmund à ce sujet. Cette réduction est à ce point complète qu'on a proposé de l'utiliser au dosage des halogènes dans les substances organiques. La présence de liaisons multiples ne protège pas l'halogène, dont la substitution précède la simplification de ces liaisons.

Jusqu'à présent aucun travail n'a eu pour objet la réduction catalytique de composés organiques fluorés.

Si la stabilité plus grande de la liaison C.-Fl., qui ressort notamment de la thermochimie des combinaisons organiques fluorées, devait opposer une résistance plus marquée à la déhiscence de cette liaison, d'autre part, l'énorme affinité du fluor pour l'hydrogène favoriserait la réduction. La chaleur de substitution de l'hydrogène par le fluor est d'environ 20 calories; comme la chaleur de formation de l'acide fluorhydrique est de 39 calories, la réaction



doit dégager 19 calories, tandis que la réduction du dérivé chloré n'en fournirait en moyenne que 13 à 14. Il est donc probable que la réduction des combinaisons organiques fluorées serait plus facile que celle des dérivés chlorés correspondants.

J'ai d'abord tenté la réduction de quelques dérivés aroma-

tiques fluorés, dans lesquels la tendance à l'hydrogénation du noyau pouvait être prédominante.

Mon premier essai porta sur le fluorbenzène, que je soumis à l'action de l'hydrogène en employant le procédé devenu classique de Sabatier.

J'ai opéré dans un tube de verre, chauffé électriquement à 200° et renfermant de la ponce au nickel. Le fluorbenzène, chauffé vers 40°, fut entraîné à l'état de vapeur par le courant d'hydrogène.

L'hydrogénation se fit fort mal : il se produisit du fluorure de silicium et bientôt toute réaction cessa. Je trouvai le nickel recouvert d'une couche de fluorure, laquelle devait nécessairement paralyser son action.

Cet insuccès me fit renoncer à l'emploi du nickel et je lui substituai le noir de platine. J'ai préparé celui-ci par réduction à froid de H_2PtCl_6 en solution alcaline par l'aldéhyde formique, lavage à froid et dessiccation, soit sous l'exsiccateur, soit à l'étuve. Je n'ai pas observé de différence, au point de vue de l'activité, entre le noir desséché à la température ordinaire et celui séché à 100°.

Toutes les opérations ont été conduites de la même manière :

La réaction s'exécutait dans un ballon à fond rond de 300 centimètres cubes, fermé par un ajutage rodé portant un tube plongeur et un tube de sortie munis de robinets. L'appareil était fixé sur le chariot d'un appareil à secouer, à mouvement horizontal d'une amplitude de 8 centimètres environ.

L'hydrogène (de la Compagnie L'Oxhydrique) était débité par une burette à gaz graduée de 800 centimètres cubes de capacité, qu'un jeu de robinets permettait de remplir et d'évacuer sans devoir ouvrir l'appareil. Le remplissage se faisait toujours dans les mêmes conditions de pression, si bien que la mesure du temps nécessaire à l'absorption du volume du gaz emprisonné permettait d'apprécier la vitesse du phénomène. Pour remplir la burette je coupe momentanément la communication avec

le reste de l'appareil : l'absorption se poursuit évidemment pendant la durée de l'opération aux dépens du gaz renfermé dans le ballon, mais l'erreur résultant de ce fait est peu considérable, le temps nécessaire au remplissage de la burette ne dépassant pas trente secondes ; cette erreur affecte d'ailleurs toutes les mesures de la même manière.

Entre la burette et l'appareil à catalyse étaient intercalés deux barboteurs contenant une solution de KMnO_4 , un barboteur renfermant une solution à 5 % de AgNO_3 . Un tube à CaCl_2 complétait le dispositif d'épuration.

Avant de lancer l'hydrogène dans l'appareil à catalyse, je déplaçais l'air de ce dernier par un courant de CO_2 , maintenu pendant une heure, de manière à éliminer autant que possible l'oxygène occlus dans le platine. Puis je balayais toute l'atmosphère par 2 lit. 4 d'hydrogène. Le robinet de sortie étant alors fermé, l'appareil à secouer était mis en mouvement ; la vitesse a varié dans mes expériences entre 200 et 350 secousses par minute ; son réglage était obtenu à l'aide d'un frein. Je ne suis pas parvenu à assurer une agitation de vitesse absolument constante pendant toute la durée d'une expérience, en raison de l'extension de la chaîne ou de la courroie de transmission que je devais retendre de temps à autre.

Réduction de l'acide fluorbenzoïque. — Cette réduction fut opérée en solution aqueuse du sel de sodium. Pour éviter l'empoisonnement éventuel du catalyseur par le fluorure de silicium, j'avais dissous l'acide p. fluorbenzoïque dans deux molécules de NaOH , de manière à transformer en fluorure HFl qui eût pu se former.

J'ai mis en œuvre 14^{gr}, 1 de mol. gr. d'acide p. fluorbenzoïque ; son sel de sodium étant peu soluble dans l'eau, j'ai dû porter le volume de la solution à 240 centimètres cubes, ce qui rendit l'agitation assez difficile. J'ai ajouté 10 grammes de noir de platine. Le déplacement de l'air par CO_2 étant impossible en

présence d'une solution alcaline, le noir de platine renfermait de l'oxygène, ce qui devait augmenter le volume d'hydrogène absorbé.

Au début, la fixation de l'hydrogène se fit assez rapidement, à raison de 22 centimètres cubes à la minute, 2,680 centimètres cubes ⁽¹⁾ furent fixés à cette vitesse constante. Puis la vitesse tomba brusquement. Pour reconnaître si ce ralentissement était dû à un empoisonnement du catalyseur, je remplaçai ce dernier par du platine frais; la vitesse d'absorption n'en fut pas modifiée. Celle-ci alla décroissant : de 3 centimètres cubes à la minute, elle tomba peu à peu à 50 centimètres cubes à l'heure.

Après avoir absorbé 0.3 mol. gr. d'hydrogène, j'arrêtai l'opération. La solution aqueuse, séparée du noir de platine et diluée à 500 centimètres cubes, fut additionnée de la quantité d'H₂SO₄ normal, équivalente à la soude mise en œuvre, sans qu'il se fit un précipité. Un excès d'acide sulfurique détermina la précipitation d'une petite quantité d'un liquide huileux, qui se figea partiellement à la longue, en même temps que se séparaient des cristaux durs et adhérents au verre. L'huile figée fut reprise par l'alcool; les cristaux, insolubles dans l'alcool, furent identifiés comme Na₂SiF₆.

La solution alcoolique évaporée abandonna des paillettes cristallines qui, après séjour sur plaque poreuse, furent recristallisées de l'eau bouillante. Elles présentent tous les caractères de l'acide benzoïque. Leur point de fusion 121°.5 et un dosage acidimétrique ont d'ailleurs permis leur identification.

0.1523 gr. d'acide neutralisant 25.05 c ⁵ NaOH ^{n/20} .
Calculé pour C ₆ H ₅ Co ₂ H 24.97 c ⁵ .

La solution aqueuse, séparée de l'huile, fut épuisée par l'éther : la solution étherée donna par évaporation 8^{gr},2 de résidu qui, cristallisé de l'alcool, fournit encore une certaine

(1) Les volumes de gaz sont réduits à 0° et 760 millimètres.

quantité d'acide benzoïque et un liquide visqueux, lequel, repris par une grande quantité de C_6H_6 , laissa une phase aqueuse. De la solution benzénique se séparèrent par évaporation spontanée de magnifiques tables prismatiques, fusibles à $29^{\circ}.5$ et dont une deuxième cristallisation éleva le point de fusion à $30^{\circ}.5$. Ce corps est de l'acide hexahydrobenzoïque.

Analyse : 0.2202 gr. de substance ont donné 0.1897^{gr}H₂O et 0.5580^{gr}CO₂

Id. 0.2332 gr. idem 0.1998^{gr}H₂O et 0.5614^{gr}CO₂.

	C.	H.
Calculé pour $C_6H_{11}CO_2H$	65.58	9.44
Trouvé	65.49 — 65.65	9.49 — 9.44

Dosage acidimétrique :

0.1110 gr. d'acide neutralisant 17.24 c³ NaOHⁿ/₂₀.

Calculé pour $C_6H_{12}CO_2H$ 17.32.

L'hydrogénation de l'acide p. fluorbenzoïque comporte donc deux stades : l'un conduit à la formation d'acide benzoïque ; dans le second l'acide benzoïque est réduit en acide hexahydrobenzoïque. Une transformation intégrale en ce dernier eût exigé 4 mol. d'hydrogène ; ayant arrêté l'opération après fixation de 3 mol. H₂, j'ai pu saisir l'acide benzoïque non encore réduit.

L'allure de l'absorption démontre que ces réactions ont des vitesses très différentes. La fixation rapide à vitesse constante de 1 mol. gr. d'hydrogène résulte évidemment à la défluoruration de l'acide fluorbenzoïque : le volume de gaz fixé à la vitesse de 22 centimètres cubes à la minute (2690 c³) correspond sensiblement à $\frac{1}{10}$ mol. gr. d'hydrogène, c'est-à-dire à la réduction de l'acide fluorbenzoïque en acide benzoïque ; l'excédent est dû et à l'oxydation de l'hydrogène par l'oxygène fixé sur le platine et aussi à un commencement de réduction concomittante du benzoate de sodium déjà formé.

L'hydrogénation du benzoate de sodium correspond à la seconde phase d'absorption dont le début est caractérisé par une

chute brusque dans la vitesse d'absorption. C'est donc une réaction lente et, de plus, de vitesse décroissante.

Hydrogénation du fluorbenzène. — J'ai opéré sur le fluorbenzène pur; en l'absence de dissolvant 40 grammes de C_6H_5Fl et 15 grammes de noir de platine furent mis en œuvre.

L'absorption de l'hydrogène est assez rapide : 800 centimètres cubes furent fixés en trente-cinq minutes, l'appareil recevant 260 secousses à la minute; elle se maintient constante pendant un certain temps puis diminue graduellement. Il n'y a pas paralysie du catalyseur, mais la réduction donne lieu à la formation d'acide fluorhydrique et secondairement de fluorure de silicium. Ce dernier s'accumule peu à peu dans le ballon, diminuant ainsi la concentration de l'hydrogène dans la phase gazeuse et par conséquent la vitesse d'absorption. Il suffit de balayer l'atmosphère par un courant rapide d'hydrogène pour voir la vitesse reprendre sensiblement sa valeur primitive. Cependant, il se produit progressivement un léger ralentissement, que l'élimination de $SiFl_4$ ne corrige plus : après fixation de 24,600 centimètres cubes la burette-jauge ne se vidait plus qu'en quarante minutes.

L'absorption cessa brusquement au moment où le volume d'hydrogène absorbé atteignit 35,750 centimètres cubes.

Le ballon contenait deux phases liquides, l'une étant une solution de fluosilicates de sodium et de calcium. Le verre était très fortement attaqué.

Après addition d'eau, le produit fut distillé à refus au bain-marie, le distillat étant recueilli dans une rallonge plongeant dans de la glace. La phase non aqueuse s'y prit en une masse cristalline. En décantant sans perte, j'obtins 31 grammes de ce produit.

Après dessiccation sur $CaCl_2$, j'en ai, sans lui faire subir de purification, déterminé les points de fusion et d'ébullition : ceux-ci étaient respectivement $+ 6.05$ et $80^{\circ}.7$.

Ces constantes sont celles du cyclohexane, pour lequel M. Timmermans donne (V. *Tables des constantes numériques*, 1912, p. 594)

$$P.f = + 6^{\circ}.45.$$

$$P.e = 80^{\circ}.7.$$

Une combustion faite sur un échantillon distillé leva tout doute.

0.2105 gr. de substance ont donné 0.6596^{gr}CO₂ et 0.2751^{gr}H₂O.

	C.	H.
Calculé pour C ₆ H ₁₂	85.61	14.38
Trouvé	85.41	14.53

La réduction catalytique du fluorbenzène en présence du noir de platine fournit donc immédiatement du cyclohexane remarquablement pur, le point de fusion du produit brut n'étant inférieur que de 0.45 à celui du cyclohexane pur.

La transformation se fait d'ailleurs avec un rendement presque théorique : les 35,600 centimètres cubes d'hydrogène absorbés représentent 0,158 mol. gr. qui eussent dû former 0,397 de cyclohexane, ou 33^{gr},8, dont j'en ai isolé 31. Les 40 grammes de fluorbenzène devaient donner 35 grammes de cyclohexane : la différence entre le rendement réel et le rendement théorique est due à l'entraînement d'une partie du fluorbenzène et du cyclohexane, très volatils tous deux, par le courant d'hydrogène lors des balayages de SiF₄.

La fixation de l'hydrogène sur le fluorbenzène en présence du platine se fait donc à la fois par réduction de l'angle fluoré et sutination simultanée de l'anneau benzénique. Je n'ai, en effet, pas observé de variation brusque dans la vitesse d'absorption, comme dans le cas du p. fluor-benzoate de sodium.

On pourrait objecter que les deux réactions sont successives, mais de vitesse sensiblement égale. Pour vérifier l'exactitude de cette hypothèse, j'ai fixé sur du fluorbenzène la moitié de la quantité théorique d'hydrogène.

Le produit de la réaction fut agité avec deux fois son poids d'acide nitrique réel pendant deux heures. Après lavage à l'eau suivi de dessiccation, j'ai séparé le cyclohexane par rectification

(P. d'ébullition 80.5). Le résidu de distillation, constitué par les dérivés nitrés, fut réduit par le fer en présence d'acide sulfurique et l'aniline obtenue, extraite par l'éther, acétylée par l'anhydride acétique.

L'acétanilide obtenue fut recristallisée de l'eau chaude. J'obtins essentiellement les aiguilles caractéristiques de la p. fluoracétanilide (p. f. 148); par les cristallisations fractionnées successives, je parvins à isoler une très minime quantité d'acétanilide, cristallisant en paillettes et fusibles à 115°.

Il résulte de là que le benzène ne se transforme pas complètement à mesure qu'il se forme, mais, d'autre part, le fait qu'il n'est présent qu'en proportion très faible à côté de fluorbenzène inaltéré démontre que si sa vitesse d'hydrogénation est inférieure à la vitesse de réduction du fluorbenzène, elle est cependant du même ordre de grandeur.

J'espère pouvoir communiquer sous peu des recherches quantitatives à ce sujet.

La réduction lente, progressive de la vitesse que je signalais plus haut peut d'ailleurs avoir une autre cause; la formation d'eau par l'action de l'acide fluorhydrique sur le verre transforme la phase liquide en un système à deux phases. Cette eau, ainsi que la silice et les fluosilicates formés peuvent enrober plus ou moins le platine, diminuer les contacts et modifier la surface du platine de manière à rendre l'absorption de l'hydrogène et du fluorbenzène moins aisée.

J'ajouterai en terminant qu'il est assez intéressant de constater que le fluorure de silicium et l'acide fluorhydrique ne paralysent pas l'action catalytique du platine.

*
* *

Comme le chlore, le fluor se laisse donc enlever par l'hydrogène dans les deux dérivés aromatiques substitués que j'ai étudiés. J'ai démontré (voir notamment la précédente commu-

nication) que dans le trifluortoluène la mobilité du fluor est presque nulle, et l'étude thermochimique ⁽¹⁾ de cette combinaison a établi que la chaleur de substitution de l'hydrogène par le fluor dans le chaînon CH_3 du toluène est très sensiblement supérieure à celle de l'hydrogène du noyau (22.7 cal. au lieu de 15.8). Il était donc possible que la réduction du chaînon CFI_3 ne se fit pas. L'expérience a vérifié cette prévision.

Hydrogénation de l' α -trifluortoluène $\text{C}_6\text{H}_5\text{CFI}_3$.

L'expérience a été conduite comme pour le fluorbenzène. J'ai exécuté plusieurs opérations en vue d'obtenir une quantité assez forte d'hexathydrotrifluortoluène. Le poids de trifluortoluène mis en œuvre a varié de 50 à 70 grammes, celui du noir de platine de 15 à 17 grammes.

L'absorption de l'hydrogène est rapide : à raison de 250 secousses par minute, 800 centimètres cubes d'hydrogène sont absorbés en des temps variant de 7 à 12 minutes, suivant l'activité du catalyseur. La réaction donne lieu à un dégagement de chaleur très sensible qui maintient la température à 40° environ pendant toute la durée de l'expérience.

La vitesse d'absorption est absolument constante, si les conditions d'agitation restent invariables, jusqu'à la fin de l'opération; elle tombe alors brusquement. En moins d'une minute, je la voyais passer de 120 centimètres cubes à la minute à 2 ou 3 centimètres cubes, pour se réduire à zéro après deux à trois minutes.

Il ne se fait pas trace de fluorure de silicium.

Pour isoler le produit de la réaction, je le distille, en présence de son poids d'eau, dans le ballon même où j'ai effectué l'hydrogénation. Il forme avec l'eau un mélange binaire bouillant à 85°, ce qui permet de le distiller sans perte.

(1) Voir F. SWARTS, *Études thermochimiques sur les combinaisons organiques fluorées*. (JOURNAL DE CHIMIE PHYSIQUE, t. XVII, p. 1)

Voici les données d'une opération : 50 grammes de $C_6H_5CF_3$ et 15 grammes de noir de platine ont été mis en œuvre ; 22,550 centimètres cubes d'hydrogène furent fixés : le volume calculé pour la fixation de 3 molécules d'hydrogène eût été de 23,010 centimètres cubes ; le déficit est dû à ce que le déplacement de l'atmosphère de CO_2 par H_2 au début de l'expérience entraîne un peu de trifluortoluène. Le rendement en produit d'hydrogénation brut est de 49^{gr},3 (calc. 52 gr.)

Le trifluorméthylcyclohexane brut a été chauffé à 60° pendant une heure avec son poids d'acide nitrique à 95 %, pour transformer éventuellement en dérivé nitré le trifluortoluène qui aurait échappé à l'hydrogénation, puis maintenu trente-six heures à froid au contact de HNO_3 . Après lavage et avec une solution alcaline, il fut séché et rectifié.

Il bout intégralement sans laisser de résidu à 107°.1 dès la première rectification. (Baromètre = 761^{mm}.2 [corrigé].)

Analyse : 0.4148 gr. de substance ont donné 0.2712^{gr} H_2O et 0.8371^{gr} CO_2 .

	C.	H.
Calculé pour $C_6H_{11}.CF_3$	55.22	7.29
Trouvé	55.00	7.26

L'hydrogénation porte donc exclusivement sur l'anneau aromatique avec obtention d'un dérivé fluoré du groupe de l'hexaméthylène.

Ce résultat m'a conduit à tenter l'hydrogénation de l' α difluortoluène $C_6H_5.CHF_2$. Dans la formation de ce dernier, la chaleur de substitution du fluor à l'hydrogène est moindre que pour le trifluortoluène, mais elle est encore supérieure de près de 5 calories à celle qu'on observe dans le fluorbenzène.

Hydrogénation de l' α difluortoluène. — J'ai fait deux fois cette expérience, une fois sur 39 grammes, la seconde fois sur 41 grammes de substance, en présence de 12 grammes de noir de platine.

L'absorption se fait avec une vitesse très sensiblement égale

à celle du trifluortoluène; elle donne également lieu à une élévation sensible de température. Il se produit un peu de fluorure de silicium. Ici encore la réaction s'arrête brusquement, après absorption d'un volume d'hydrogène très légèrement supérieur à celui qu'exige la fixation de 3 molécules d'hydrogène; 39 grammes de difluortoluène ont absorbé 20,730 centimètres cubes de gaz au lieu de 20,610.

Le produit, entraîné par distillation en présence d'eau, fut séché et rectifié.

La distillation ne se fait pas à température absolument constante; elle commence à 105°, mais le thermomètre s'élève rapidement à 123° pour se fixer entre 124 et 125°.3. Après quatre rectifications j'ai isolé un produit bouillant à la température constante de 125°.25 (Bar. = 760). Par contre je n'ai pu isoler des têtes le produit à point d'ébullition voisin de 105°, la quantité de matière dont je disposais étant insuffisante (6^{gr},5 de liquide distillant de 107 à 124°).

Le corps bouillant à 125°.25 est du difluorméthylcyclohexane.

Analyse : 0.3860 gr. de substance ont donné 0.8531^{gr}CO₂ et 0.309^{gr}H₂O

	C.	H.
Calculé pour C ₆ H ₅ CHFl ₂	62.65	9.02
Trouvé	62.66	8.93

Quant au liquide plus volatil, distillant vers 105°, c'est à n'en pas douter du méthylcyclohexane. La formation d'une petite quantité de SiFl₄ pendant la réduction indique une défluoruration dans une réaction secondaire quantitativement de minime importance, le méthylbenzène formé subissant ensuite l'hydrogénation.

Tout en ne se laissant réduire que très lentement, le chaînon CHFl₂ du difluortoluène montre ainsi une moindre résistance à l'hydrogénation que le groupement CFl₃ du trifluortoluène. Les données thermochimiques permettaient de prévoir ce fait.

*
* * *

Les résultats obtenus avec le di- et le trifluortoluène m'ont amené à étudier la réduction catalytique de l' α difluorchlor-toluène $C_6H_5CClFl_2$.

J'ai mis en œuvre 50 grammes de $C_6H_5CClFl_2$ en présence de 17 grammes de noir de platine. Au début, l'absorption de l'hydrogène est assez rapide : 800 centimètres cubes en une demi-heure, puis la vitesse de réaction diminue peu à peu. Il se fait du fluorure de silicium et de l'acide chlorhydrique et le catalyseur finit par perdre toute activité, même lorsqu'on balaie complètement l'atmosphère par un courant d'hydrogène. La paralysie du catalyseur est due à l'acide chlorhydrique; les expériences précédentes ont, en effet, démontré que le fluorure de silicium est sans action.

Le produit de la réaction fut distillé; la distillation commence à 104° ; le thermomètre s'élève sans se fixer à 135° , puis rapidement à 141° - 143° . Par rectification, j'ai récupéré $37^{gr},5$ de $C_6H_5CClFl_2$ inaltéré bouillant de $141^\circ.7$ à $142^\circ.6$, 8 grammes de têtes passant de 104° à 132° et $3^{gr},2$ de 132° à 141° .

Le fractionnement des têtes étant impossible, vu leur faible masse, j'ai cherché à établir qualitativement leur composition. En chauffant en tube scellé à 150° pendant un jour avec de l'acide bromhydrique, j'ai transformé le difluorchlorotoluène en acide benzoïque, lequel fut enlevé par la soude. Il resta $4^{gr},25$ de liquide.

Ce dernier avait une densité de 0.863; il renferme un composé fluoré, que j'ai décelé en vaporisant une petite quantité du produit à travers un tube de verre chauffé au rouge.

J'ai traité par HNO_3 fumant; après lavage à l'eau, le produit fut agité avec une solution de Na_2CO_3 . Cette solution évaporée fut acidifiée par H_2SO_4 ; j'obtins un précipité cristallin d'acide benzoïque. La formation de ce dernier décèle la présence, dans le produit initial, d'aldéhyde benzoïque provenant de l'hydrolyse par $HBr + Aq$ du difluortoluène.

Le liquide insoluble dans l'eau fut distillé. J'obtins 2^{gr},8 de produit bouillant de 104° à 107°, d'une densité de 0.81 et qui est du méthylcyclohexane associé à une petite quantité de difluorméthylcyclohexane, dont j'ai recueilli quelques gouttes en passant à la distillation de 121° à 125°.

Au-dessus de 125°, le thermomètre monta rapidement au delà de 165°.

Le résidu de distillation pesait 0^{gr},4; il avait l'odeur caractéristique des dérivés nitrés. Je l'ai réduit par le fer et l'acide sulfurique. L'aniline formée fut caractérisée comme toluidine par transformation en méthylfuchsine.

La réduction catalytique du chlordinfluortoluène serait donc d'abord une réaction de déchloruration. Le difluortoluène passe ensuite partiellement à l'état de dérivé hexahydrogéné, une autre partie est réduite à l'état de toluène, lequel à son tour devient du méthylcyclohexane.

Il n'est cependant pas certain que la formation du toluène et du méthylcyclohexane soit précédée de la formation de difluortoluène. Le voisinage du chlore rend le fluor plus mobile dans le chaînon CClFl_2 et il est aussi possible qu'une partie du toluène soit formée dans une réduction primaire, entreprenant les trois atomes d'halogène à la fois. Ce qui m'amène à émettre cette interprétation, c'est le fait que la formation de fluorure de silicium est plus importante dans la réduction du difluorchlor-toluène que dans l'hydrogénation de l' α difluortoluène.

J'ai également essayé l'hydrogénation d'un composé de la série grasse, l'alcool bifluoré. L'expérience n'a donné aucun résultat, l'absorption de l'hydrogène étant nulle. Après avoir agité pendant six heures, j'ai balayé l'atmosphère en présentant à l'orifice de l'appareil un papier de tournesol bleu; ce dernier n'a pas rougi. La formation d'acide fluorhydrique est, par conséquent, nulle.

*
* *

Les expériences dont je viens d'exposer les résultats ne constituent que le début d'une série de recherches, mais, dès à présent, elles permettent certaines observations intéressantes.

Elles démontrent la grande différence entre la résistance au déplacement du fluor par l'hydrogène suivant que cet halogène est porté par le noyau aromatique ou fait partie d'un chaînon CHFl_2 ou CFl_3 , et la possibilité d'hydrogéner le noyau sans affecter la chaîne latérale et d'obtenir ainsi des dérivés fluorés du groupe de l'hexaméthylène.

Lorsque la réaction est simple, comme dans le cas du trifluortoluène, elle se fait avec une vitesse constante. Elle est donc indépendante de la concentration du composé aromatique restant, et cela non pas approximativement, mais d'une manière presque absolue. La vitesse ne commence à se réduire que lorsque cette concentration est tombée aux trois centièmes de sa valeur primitive.

Lorsque la réaction comporte deux stades et que la vitesse de l'un d'eux est négligeable vis-à-vis de celle de l'autre, ce dernier évolue à vitesse constante; le cas du fluorbenzoate de sodium en offre un exemple.

Le difluortoluène nous offre un autre exemple d'une réaction de l'espèce; mais ici c'est la réduction de l'angle fluoré qui est insignifiante vis-à-vis du processus d'hydrogénation; la vitesse de la réaction globale est encore uniforme et indépendante de la concentration.

Cependant, quoique le nombre des cas étudiés ne soit pas élevé, on observe aussi parfois que la vitesse de réaction ne reste pas constante. C'est ce que j'ai constaté pour la réduction du fluorbenzoate de sodium, dans la phase d'hydrogénation proprement dite.

De l'indépendance de la vitesse de réaction et de la concentration du corps constituant la phase liquide, on conclurait que l'ordre de la réaction est nul.

En fait, le phénomène comporte deux processus : l'un, de

vitesse mesurable, est l'absorption de l'hydrogène par le catalyseur; l'autre, la réaction chimique proprement dite, est celui dans lequel l'hydrogène absorbé par le catalyseur réagit sur le composé organique. Si la vitesse de ce second processus est tellement grande qu'il puisse être considéré comme instantané, la vitesse mesurée sera exclusivement celle du processus d'absorption. C'est le cas pour le trifluortoluène et pour le difluortoluène.

Dans la réduction du p. fluorbenzoate de sodium, la réaction chimique se dédouble à son tour en deux transformations successives, dont l'une n'a plus une vitesse telle qu'elle puisse être considérée comme instantanée, comme le démontre l'accroissement lent de la durée d'absorption d'un volume donné d'hydrogène à mesure que l'hydrogénation du noyau progresse, tandis que la substitution du fluor par l'hydrogène se fait avec une vitesse trop grande pour être mesurable.

On ne saurait conclure que quel que soit le composé organique soumis à l'hydrogénation catalytique, la vitesse de réaction doit être la même, lorsque la réaction chimique est instantanée. La vitesse d'absorption par le catalyseur est fonction de facteurs d'ordre physique qui jouent ici un rôle prépondérant : frottement interne, tension superficielle du liquide, attraction intermoléculaire du liquide et du platine.

Ce qui démontre notamment ce rôle de la nature spécifique du liquide, c'est la comparaison que j'ai faite des vitesses d'hydrogénation du toluène et du trifluortoluène en présence de deux échantillons de noir de platine aussi semblables que possible. Dans les deux cas, la vitesse était constante, mais alors que pour le toluène 800 centimètres cubes étaient absorbés en 29', le trifluortoluène les absorbait en 12',30''.

Le rôle considérable que jouent les forces dites moléculaires ressort aussi d'une observation que j'ai faite dans l'hydrogénation du trifluor et du difluortoluène. Tant que la réaction se fait, toute la paroi du ballon est recouverte d'une émulsion de noir de

platine dans le liquide. Au moment où l'hydrogénation se termine, on voit brusquement cette émulsion se résoudre ; le platine se sépare du liquide, qui reprend une transparence complète, quelque énergique que soit l'agitation.

On ne saurait invoquer, pour expliquer ce changement brusque dans l'état physique du système hétérogène, une modification dans la viscosité ou la tension superficielle du liquide : au moment où la réaction se termine cette viscosité est trop peu différente de celle du produit d'hydrogénation.

Il semble que tant que le liquide est apte à réagir sur l'hydrogène fixé par le catalyseur, les forces attractives moléculaires sont accrues de l'attraction chimique, laquelle serait suffisante pour maintenir l'émulsion. Ce serait là un exemple curieux d'un phénomène chimique provoquant une attraction décelable.

La température ne semble jouer qu'un rôle très accessoire dans la vitesse du phénomène. Ceci ressort tout d'abord du fait qu'une fois la réaction amorcée, la vitesse d'absorption est sensiblement la même au début, lorsque le liquide n'a pas encore eu le temps de s'échauffer sensiblement, et plus tard après qu'en raison du caractère exothermique de la réaction, la température s'est élevée vers 40°.

Dans les expériences que j'ai décrites, l'appareil n'était pas placé dans un thermostat : il était impossible, sans provoquer des projections violentes d'eau, d'agiter avec l'énergie convenable un appareil aussi volumineux dans un thermostat du type usuel.

Pour apprécier l'influence de la température, j'ai placé le ballon dans un cylindre fermé, muni de deux tubulures grâce auxquelles pouvait circuler un courant d'eau assez rapide pour maintenir le ballon à température constante ; l'eau était fournie par un thermostat de grande capacité. Le cylindre était fixé sur le chariot de la machine à agiter. Une opération fut exécutée dans ces conditions sur le trifluortoluène à la température de 17°.5. La vitesse d'absorption fut sensiblement la même que lorsque je laissai la température s'élever : à une vitesse d'agita-

tion de 250 tours, 800 centimètres cubes furent absorbés en 7',45'' à 17°.5; sans refroidissement la durée d'absorption était de 7',25''.

Je n'ai pas réussi jusqu'à présent à réaliser des mesures comparatives ayant une signification rigoureusement quantitative. Parmi les raisons qui rendent cette réalisation très difficile, il faut observer qu'on ne peut garantir que dans deux expériences successives le catalyseur soit resté identique à lui-même, et, de fait, je n'ai pu constater que dans deux opérations faites sur le même composé, à l'aide du même échantillon de catalysation et dans les mêmes conditions, les vitesses d'absorption restassent absolument identiques. Le lavage, la dessiccation modifient toujours quelque peu l'état des surfaces du catalyseur.

Un second facteur qu'il est difficile de reproduire absolument est l'agitation. Or, celle-ci joue un rôle capital dans la vitesse d'absorption. Lorsque l'appareil est au repos, l'absorption est presque nulle. Entre certaines limites elle croît proportionnellement à la vitesse d'agitation, comme le prouvent les données suivantes : n étant le nombre de tours de la manivelle actionnant le chariot et t le temps nécessaire à l'absorption de 800 centimètres cubes :

n	t (en minutes)	$n \times t$
240	9	1890
240	8	1920
256	7	1892
280	6	1880

(L'expérience a été faite sur le trifluortoluène).

Le mécanisme intime de la réduction catalytique en milieu hétérogène ne nous est en somme guère connu, et pour le pénétrer il faudra déterminer séparément l'influence de chacun des facteurs qui peuvent intervenir. Ces facteurs sont multiples et cette étude promet d'être longue et délicate.

Je terminerai cette note par une courte description des deux dérivés fluorés du groupe de l'hexaméthylène que j'ai obtenus.

Le *trifluorméthylcyclohexane* est un liquide incolore, d'une odeur assez agréable, rappelant celle de beaucoup de dérivés hexaméthyléniques; sa densité est de 1,0870₂ à 15°, de 1,09800 à 11°.5. Il bout à 107°,05 sous 761^{mm},5 et ne se congèle pas à — 78°.

Ses indices de réfraction à 11°.5 sont

$$\begin{aligned} n_x &= 1.37661 \\ D &= 1.37945 \\ \beta &= 1.38379 \\ \gamma &= 1.38704 \end{aligned}$$

Le *difluorméthylcyclohexane*, liquide incolore, d'odeurs semblable à celle du trifluorméthylcyclohexane, bout à 125°.25 sous 759 millimètres; sa densité à 17°.5 est de 1,01675.

Il est assez intéressant de remarquer que tandis que l'hydrogénation du noyau élève le point d'ébullition (de 4°) dans le trifluortoluène, il l'abaisse (de 6°.5) dans le difluortoluène, comme dans le toluène lui-même.

L'étude des propriétés chimiques de ces deux corps fera l'objet d'une prochaine communication.

*
* * *

En raison de l'isolement complet créé par l'occupation ennemie et l'impossibilité de recevoir les revues étrangères jusqu'en ces derniers mois, je n'ai eu connaissance que lorsque le présent travail était presque terminé d'un mémoire publié en 1915 (*Recueil des Travaux chimiques des Pays-Bas*, p. 261), par M. Boeseken, dans lequel est étudiée également la réduction catalytique en présence du platine.

Ces recherches ont été faites dans un but un peu différent des miennes; leur auteur a surtout cherché à établir l'allure des réactions et non à préparer les produits d'hydrogénation. Aussi a-t-il opéré sur de petites quantités de matière, ce qui lui permit d'employer un appareil de faibles dimensions et d'user

d'un dispositif assurant un meilleur réglage de la vitesse d'agitation que celui dont je disposais.

Ses conclusions sont analogues aux miennes.

M. Boeseken avait observé, comme moi, la constance de la vitesse et le faible coefficient thermique de la réaction. Il en a conclu que la vitesse mesurée est celle d'absorption, mais surtout de diffusion, de l'hydrogène et de la substance à hydrogéner, la réduction se faisant à une vitesse très grande par rapport à la diffusion.

Cependant il définit l'activité du catalyseur comme la mesure du nombre d'atomes de platine atteints au même instant par le mélange $H_2 + X$, X étant le corps réductible. Cette interprétation me paraît présenter un point faible, car il est clair que la vitesse de diffusion de X doit dépendre de sa concentration dans le liquide. Si cette concentration n'est pas constante, la vitesse de la réaction en dépendra, car le catalyseur ne peut absorber continuellement de l'hydrogène que si ce dernier est enlevé à mesure qu'il se fixe, et cet enlèvement sera d'autant plus rapide que les molécules du corps réductible accèdent plus rapidement au catalyseur.

Laboratoire de chimie générale.
Université de Gand.

ANALYSE MATHÉMATIQUE ET GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE.

Sur les équations de Moutard à solutions quadratiques

(suite) (*).

par A. DEMOULIN, membre de l'Académie.

IV.

18. On a vu (nos 4 et 5) que pour obtenir les transformations T_m et Θ_m de l'équation (e), il faut intégrer le système (19). Nous avons mis celui-ci sous la forme (20), les coefficients α_{ik} et β_{ik} étant définis par les équations (21).

Si les solutions $z_1, z_2, \dots, z_p$ satisfont à la relation

$$(88) \quad \sum_i^{1\dots p} z_i^2 = 0,$$

on peut poser $U = V = 0$, et il vient

$$\alpha_{ik} = \frac{1}{m} \left(z_i \frac{\partial z_k}{\partial u} - z_k \frac{\partial z_i}{\partial u} \right), \quad \beta_{ik} = -\frac{1}{m} \left(z_i \frac{\partial z_k}{\partial v} - z_k \frac{\partial z_i}{\partial v} \right).$$

Le système (20) peut donc s'écrire

$$(89) \quad \begin{cases} \frac{\partial H_i}{\partial u} = \frac{1}{m} \sum_k^{1\dots p} \left(z_i \frac{\partial z_k}{\partial u} - z_k \frac{\partial z_i}{\partial u} \right) H_k, \\ \frac{\partial H_i}{\partial v} = -\frac{1}{m} \sum_k^{1\dots p} \left(z_i \frac{\partial z_k}{\partial v} - z_k \frac{\partial z_i}{\partial v} \right) H_k, \end{cases}$$

et, en vertu de (23), il possède l'intégrale

$$(90) \quad \sum_i^{1\dots p} H_i^2 = C.$$

(*) La première partie de ce mémoire (nos 1 à 17) est insérée dans le *Bulletin* de la séance du 4 mai 1920.

19. Nous allons montrer que si $\sum_i^{1..p} z_i^2$ est $\neq 0$, un changement d'inconnues permet de remplacer le système (20) par un autre système linéaire admettant une intégrale de même forme que (90).

Dans le cas présent, l'intégrale (23) peut s'écrire

$$\sum_j^{1..p} H_j^2 - \frac{\left(\sum_j^{1..p} z_j H_j\right)^2}{\sum_j^{1..p} z_j^2} - \frac{(2U - m)(2V + m)}{(U + V)(V - U + m)^2} \left(\sum_j^{1..p} z_j H_j\right)^2 = C.$$

Si l'on pose

$$(91) \quad \cos \sigma = \frac{V - U + m}{U + V},$$

d'où

$$(92) \quad \sin \sigma = \frac{\sqrt{(2U - m)(2V + m)}}{U + V},$$

cette intégrale devient

$$(93) \quad \sum_j^{1..p} H_j^2 - \frac{\left(\sum_j^{1..p} z_j H_j\right)^2}{\sum_j^{1..p} z_j^2} - \frac{\operatorname{tg}^2 \sigma}{U + V} \left(\sum_j^{1..p} z_j H_j\right)^2 = C.$$

Le premier membre de cette égalité est égal à la somme des carrés de p fonctions linéaires et homogènes des H_j , linéairement indépendantes. Pour le démontrer, posons

$$(94) \quad m_j^{(4)} = \frac{z_j}{\sqrt{U + V}}, \quad j = 1, 2, \dots, p,$$

d'où, en vertu de (8),

$$\sum_j^{1..p} (m_j^{(4)})^2 = 1,$$

puis introduisons, avec M. Bianchi (*loc. cit.*), le déterminant orthogonal

$$\Delta = \begin{vmatrix} m_1^{(1)} & m_2^{(1)} & \dots & m_p^{(1)} \\ m_1^{(2)} & m_2^{(2)} & \dots & m_p^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_1^{(p)} & m_2^{(p)} & \dots & m_p^{(p)} \end{vmatrix}.$$

Les éléments des $p - 1$ dernières lignes sont des fonctions de u, v , assujetties à la seule condition d'assurer au déterminant Δ la propriété que nous lui avons supposée.

En vertu de la notion même de déterminant orthogonal, on a

$$(95) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_j^{1\dots p} (m_j^{(i)})^2 = 1, \quad i = 1, 2, \dots, p. \\ \sum_j^{1\dots p} m_j^{(i)} m_j^{(i')} = 0, \quad i, i' = 1, 2, \dots, p; i \neq i'. \end{array} \right.$$

Ces égalités sont équivalentes aux suivantes :

$$(96) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_i^{1\dots p} (m_j^{(i)})^2 = 1, \quad j = 1, 2, \dots, p, \\ \sum_i^{1\dots p} m_j^{(i)} m_{j'}^{(i)} = 0, \quad j, j' = 1, 2, \dots, p; j \neq j', \end{array} \right.$$

qu'on peut écrire comme il suit :

$$(96') \quad \left\{ \begin{array}{l} (m_j^{(1)})^2 + \sum_i^{2\dots p} (m_j^{(i)})^2 = 1, \quad j = 1, 2, \dots, p, \\ m_j^{(1)} m_{j'}^{(1)} + \sum_i^{2\dots p} m_j^{(i)} m_{j'}^{(i)} = 0, \quad j, j' = 1, 2, \dots, p; j \neq j'. \end{array} \right.$$

Les éléments $m_r^{(i)}$ de Δ satisfont aux relations différentielles

$$(97) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial m_r^{(i)}}{\partial u} = \sum_k^{1\dots p} p_{ik} m_r^{(k)}, \\ \frac{\partial m_r^{(i)}}{\partial v} = \sum_k^{1\dots p} q_{ik} m_r^{(k)}, \\ i, r = 1, 2, \dots, p, \end{array} \right.$$

étant posé

$$(98) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{ik} = \sum_r^{1...p} m_r^{(k)} \frac{\partial m_r^{(i)}}{\partial u} = - \sum_r^{1...p} m_r^{(i)} \frac{\partial m_r^{(k)}}{\partial u}, \\ q_{ik} = \sum_r^{1...p} m_r^{(k)} \frac{\partial m_r^{(i)}}{\partial v} = - \sum_r^{1...p} m_r^{(i)} \frac{\partial m_r^{(k)}}{\partial v}. \end{array} \right.$$

Les quantités p_{ik} , q_{ik} , qui ont été appelées par M. Guichard les rotations du déterminant Δ , satisfont aux relations

$$(99) \quad \left\{ \begin{array}{ll} p_{ik} + p_{ki} = 0, & p_{ii} = 0, \\ q_{ik} + q_{ki} = 0, & q_{ii} = 0. \end{array} \right.$$

Au premier membre de (93), la somme des deux premiers termes est égale à

$$\sum_i^{2...p} \left(\sum_j^{1...p} m_j^{(i)} H_j \right)^2.$$

On a, en effet,

$$\begin{aligned} \sum_i^{2...p} \left(\sum_j^{1...p} m_j^{(i)} H_j \right)^2 &= \sum_i^{2...p} \sum_j^{1...p} \sum_{j'}^{1...p} m_j^{(i)} m_{j'}^{(i)} H_j H_{j'}, \\ &= \sum_j^{1...p} \sum_{j'}^{1...p} H_j H_{j'} \sum_i^{2...p} m_j^{(i)} m_{j'}^{(i)}, \end{aligned}$$

ou, en tenant compte des égalités (96'),

$$\begin{aligned} \sum_i^{2...p} \left(\sum_j^{1...p} m_j^{(i)} H_j \right)^2 &= - \sum_j^{1...p} \sum_{j'}^{1...p} H_j H_{j'} m_j^{(1)} m_{j'}^{(1)} + \sum_j^{1...p} H_j^2 [1 - (m_j^{(1)})^2] \\ &= \sum_j^{1...p} H_j^2 - \sum_j^{1...p} \sum_{j'}^{1...p} H_j H_{j'} m_j^{(1)} m_{j'}^{(1)} - \sum_j^{1...p} H_j (m_j^{(1)})^2 \\ &= \sum_j^{1...p} H_j^2 - \left(\sum_j^{1...p} m_j^{(1)} H_j \right)^2, \end{aligned}$$

ou, en vertu de (94) et de (8),

$$\sum_i^{2...p} \left(\sum_j^{1...p} m_j^{(i)} H_j \right)^2 = \sum_j^{1...p} H_j^2 - \frac{\left(\sum_j^{1...p} z_j H_j \right)^2}{\sum_j^{1...p} z_j^2}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Eu égard à cette égalité et à (94), l'intégrale (93) peut s'écrire

$$(100) \quad \sum_i^{2\dots p} \left(\sum_j^{1\dots p} m_j^{(i)} H_j \right)^2 - \operatorname{tg}^2 \sigma \left(\sum_j^{1\dots p} m_j^{(1)} H_j \right)^2 = C,$$

et, si l'on pose

$$(101) \quad \begin{cases} X_1 = \operatorname{tg} \sigma \sum_j^{1\dots p} m_j^{(1)} H_j, \\ X_i = \sum_j^{1\dots p} m_j^{(i)} H_j, \quad i = 2, \dots, p, \end{cases}$$

elle devient

$$(102) \quad -X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_p^2 = C. \quad (*)$$

Les fonctions $X_1, X_2, \dots, X_p$ sont linéairement indépendantes, car, si l'on désigne par $H_1, H_2, \dots, H_p$ les coordonnées d'un point de l'espace à p dimensions, les équations $X_1 = 0, X_2 = 0, \dots, X_p = 0$ définissent p hyperplans passant par l'origine et orthogonaux à p directions deux à deux orthogonales, de cosinus directeurs $m_1^{(i)}, m_2^{(i)}, \dots, m_p^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, p$).

En résolvant le système (101) par rapport à $H_1, H_2, \dots, H_p$, on trouve

$$(103) \quad H_j = m_j^{(1)} X_1 \cot \sigma + \sum_i^{2\dots p} m_j^{(i)} X_i.$$

20. Nous allons substituer au système (20) celui auquel satisfont les fonctions $X_1, X_2, \dots, X_p$; ce nouveau système sera plus simple que le premier, car il admettra l'intégrale (102).

Exprimons d'abord les coefficients α_{ik}, β_{ik} , définis par les for-

(*) En vertu des formules (101), $X_2, \dots, X_p$ sont déterminées sans ambiguïté; il n'en est pas de même de X_1 , car σ étant donné par son cosinus, $\operatorname{tg} \sigma$ n'est définie qu'au signe près.

mules (21), au moyen des éléments du déterminant Δ . La première des formules (21) donne

$$(104) \quad \left\{ \begin{array}{l} -2(2U - m)(V - U + m)\alpha_{ik} \\ = U'z_i z_k + 2(V - U + m)z_i \frac{\partial z_k}{\partial u} + 2(2U - m)z_k \frac{\partial z_i}{\partial u}. \end{array} \right.$$

On a, en vertu de (94),

$$(105) \quad z_i = m_i^{(4)} \sqrt{U + V}, \quad z_k = m_k^{(4)} \sqrt{U + V},$$

d'où, en dérivant par rapport à u ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_i}{\partial u} &= \frac{\partial m_i^{(4)}}{\partial u} \sqrt{U + V} + m_i^{(4)} \frac{U'}{2\sqrt{U + V}}, \\ \frac{\partial z_k}{\partial u} &= \frac{\partial m_k^{(4)}}{\partial u} \sqrt{U + V} + m_k^{(4)} \frac{U'}{2\sqrt{U + V}}. \end{aligned}$$

Or, à cause des relations (97),

$$\frac{\partial m_i^{(4)}}{\partial u} = \sum_r^{1\dots p} p_{1r} m_i^{(r)}, \quad \frac{\partial m_k^{(4)}}{\partial u} = \sum_r^{1\dots p} p_{1r} m_k^{(r)}.$$

Par suite

$$(106) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z_i}{\partial u} = \sum_r^{1\dots p} p_{1r} m_i^{(r)} \cdot \sqrt{U + V} + m_i^{(4)} \frac{U'}{2\sqrt{U + V}}, \\ \frac{\partial z_k}{\partial u} = \sum_r^{1\dots p} p_{1r} m_k^{(r)} \cdot \sqrt{U + V} + m_k^{(4)} \frac{U'}{2\sqrt{U + V}}. \end{array} \right.$$

Si l'on porte, dans (104), les valeurs (105) et (106) de z_i , de z_k et de leurs dérivées, il vient

$$(107) \quad \alpha_{ik} = \alpha m_i^{(4)} m_k^{(4)} + \alpha' m_i^{(4)} \sum_r^{1\dots p} p_{1r} m_k^{(r)} + \alpha'' m_k^{(4)} \sum_r^{1\dots p} p_{1r} m_i^{(r)},$$

étant posé

$$(103) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= -\frac{U'(U+V)}{(2U-m)(V-U+m)} = -\frac{\frac{\partial \sigma}{\partial u}}{\sin \sigma \cos \sigma}, \\ \alpha' &= -\frac{U+V}{2U-m} = -\frac{1}{1+\cos \sigma}, \\ \alpha'' &= -\frac{U+V}{V-U+m} = -\frac{1}{\cos \sigma}. \end{aligned} \right.$$

En partant de la deuxième des formules (21) et en procédant comme plus haut, on trouvera

$$(109) \quad \beta_{ik} = \beta m_i^{(1)} m_k^{(1)} + \beta' m_i^{(1)} \sum_r^{1...p} q_{1r} m_k^{(r)} + \beta'' m_k^{(1)} \sum_r^{1...p} q_{1r} m_i^{(r)},$$

étant posé

$$(110) \quad \left\{ \begin{aligned} \beta &= \frac{V'(U+V)}{(2V+m)(V-U+m)} = -\frac{\frac{\partial \sigma}{\partial v}}{\sin \sigma \cos \sigma}, \\ \beta' &= -\frac{U+V}{2V+m} = -\frac{1}{1+\cos \sigma}, \\ \beta'' &= \frac{U+V}{V-U+m} = \frac{1}{\cos \sigma}. \end{aligned} \right.$$

L'équation (103) donne

$$(111) \quad \left\{ \begin{aligned} H_i &= m_i^{(1)} X_1 \cot \sigma + \sum_l^{2...p} m_i^{(l)} X_l, \\ H_k &= m_k^{(1)} X_1 \cot \sigma + \sum_l^{2...p} m_k^{(l)} X_l. \end{aligned} \right.$$

Remplaçons H_i et H_k par ces valeurs dans la première des équations (20) :

$$(112) \quad m_i^{(1)} \frac{\partial}{\partial u} X_1 \cot \sigma + \sum_l^{2...p} m_i^{(l)} \frac{\partial X_l}{\partial u} = -\frac{\partial m_i^{(1)}}{\partial u} X_1 \cot \sigma - \sum_l^{2...p} \frac{\partial m_i^{(l)}}{\partial u} X_l \\ + \sum_k^{1...p} \alpha_{ik} \left(m_k^{(1)} X_1 \cot \sigma + \sum_l^{2...p} m_k^{(l)} X_l \right).$$

Pour obtenir la valeur de $\frac{\partial}{\partial u} X_1 \cot \sigma$, multiplions l'équation (112) par $\sum_i^{1...p} m_i^{(1)}$; il viendra, en tenant compte de (95),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} X_1 \cot \sigma &= -X_1 \cot \sigma \sum_i^{1...p} m_i^{(1)} \frac{\partial m_i^{(1)}}{\partial u} - \sum_l^{2...p} X_l \sum_i^{1...p} m_i^{(1)} \frac{\partial m_i^{(l)}}{\partial u} \\ &+ X_1 \cot \sigma \sum_i^{1...p} \sum_k^{1...p} \alpha_{ik} m_i^{(1)} m_k^{(1)} + \sum_l^{2...p} X_l \sum_i^{1...p} \sum_k^{1...p} \alpha_{ik} m_i^{(1)} m_k^{(l)} \end{aligned}$$

ou

$$(113) \quad \frac{\partial}{\partial u} X_1 \cot \sigma = A + B + C + D,$$

A, B, C, D désignant les termes du second membre, pris dans l'ordre où ils sont écrits. Pour évaluer ces quantités, nous nous appuierons sur les égalités (95), (98), (99), (107) et (108).

A est nul. B est égal à $\sum_l^{2...p} p_{1l} X_l$. Calculons, dans C, le coefficient de $X_1 \cot \sigma$. On a

$$\begin{aligned} \sum_i^{1...p} \sum_k^{1...p} \alpha_{ik} m_i^{(1)} m_k^{(1)} &= \sum_i^{1...p} \sum_k^{1...p} \left(\alpha m_i^{(1)} m_k^{(1)} + \alpha' m_i^{(1)} \sum_r^{1...p} p_{1r} m_k^{(r)} + \alpha'' m_k^{(1)} \sum_r^{1...p} p_{1r} m_i^{(r)} \right) m_i^{(1)} m_k^{(1)} \\ &= \alpha \sum_i^{1...p} (m_i^{(1)})^2 \cdot \sum_k^{1...p} (m_k^{(1)})^2 \\ &+ \alpha' \sum_r^{1...p} p_{1r} \sum_k^{1...p} m_k^{(r)} m_k^{(1)} \cdot \sum_i^{1...p} (m_i^{(1)})^2 \\ &+ \alpha'' \sum_r^{1...p} p_{1r} \sum_i^{1...p} m_i^{(r)} m_i^{(1)} \cdot \sum_k^{1...p} (m_k^{(1)})^2. \end{aligned}$$

Au second membre, le premier terme est égal à α , les deux derniers termes sont nuls. C est donc égal à $\alpha X_1 \cot \sigma$.

Calculons, dans D, le coefficient de X_l . On a

$$\begin{aligned} \sum_i^{1...p} \sum_k^{1...p} \alpha_{ik} m_i^{(1)} m_k^{(l)} &= \sum_i^{1...p} \sum_k^{1...p} \left(\alpha m_i^{(1)} m_k^{(l)} + \alpha' m_i^{(1)} \sum_r^{1...p} p_{1r} m_k^{(r)} + \alpha'' m_k^{(1)} \sum_r^{1...p} p_{1r} m_i^{(r)} \right) m_i^{(1)} m_k^{(l)} \\ &= \alpha \sum_k^{1...p} m_k^{(1)} m_k^{(l)} \cdot \sum_i^{1...p} (m_i^{(1)})^2 \\ &+ \alpha' \sum_r^{1...p} p_{1r} \sum_k^{1...p} m_k^{(r)} m_k^{(l)} \cdot \sum_i^{1...p} (m_i^{(1)})^2 \\ &+ \alpha'' \sum_r^{1...p} p_{1r} \sum_i^{1...p} m_i^{(1)} m_i^{(r)} \cdot \sum_k^{1...p} m_k^{(1)} m_k^{(l)}. \end{aligned}$$

Au second membre, le premier et le troisième terme sont nuls. le second a pour valeur $\alpha' p_{1l}$. Donc D est égal à $\alpha' \sum_l^{2...p} p_{1l} X_l$.

Si l'on remplace, dans (113), A, B, C, D par leurs valeurs, on trouve

$$\frac{\partial}{\partial u} X_1 \cot \sigma = \sum_l^{2...p} p_{1l} X_l - \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial u}}{\sin^2 \sigma} X_1 - \frac{1}{1 - \cos \sigma} \sum_l^{2...p} p_{1l} X_l,$$

ou, en effectuant la dérivation au premier membre et après quelques réductions,

$$(114) \quad \frac{\partial X_1}{\partial u} = - \cot \frac{\sigma}{2} \sum_l^{2...p} p_{1l} X_l.$$

Pour obtenir l'expression de $\frac{\partial X_j}{\partial u}$ ($j = 2, \dots, p$), multiplions l'équation (112) par $\sum_i^{1...p} m_i^{(j)}$; il viendra

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_j}{\partial u} = & - X_1 \cot \sigma \sum_i^{1...p} m_i^{(j)} \frac{\partial m_i^{(4)}}{\partial u} - \sum_l^{2...p} X_l \sum_i^{1...p} m_i^{(j)} \frac{\partial m_i^{(l)}}{\partial u} \\ & + X_1 \cot \sigma \sum_i^{1...p} \sum_k^{1...p} \alpha_{ik} m_i^{(j)} m_k^{(4)} + \sum_l^{2...p} X_l \sum_i^{1...p} \sum_k^{1...p} \alpha_{ik} m_i^{(j)} m_k^{(l)}, \end{aligned}$$

ou

$$(115) \quad \frac{\partial X_j}{\partial u} = A_j + B_j + C + D_j,$$

A_j, B_j, C_j, D_j désignant les termes du second membre, pris dans l'ordre où ils sont écrits.

Evaluons ces quantités. On a d'abord $A_j = p_{j1} X_1 \cot \sigma$, $B_j = \sum_l^{2...p} p_{jl} X_l$. Calculons, dans C_j , le coefficient de $X_1 \cot \sigma$. On a

$$\begin{aligned} \sum_i^{1...p} \sum_k^{1...p} \alpha_{ik} m_i^{(j)} m_k^{(4)} &= \sum_i^{1...p} \sum_k^{1...p} \left(\alpha m_i^{(1)} m_k^{(4)} + \alpha' m_i^{(4)} \sum_r^{1...p} p_{1r} m_k^{(r)} + \alpha'' m_k^{(4)} \sum_r^{1...p} p_{1r} m_i^{(r)} \right) m_i^{(j)} m_k^{(4)} \\ &= \alpha \sum_i^{1...p} m_i^{(4)} m_i^{(j)} \cdot \sum_k^{1...p} (m_k^{(4)})^2 \\ &+ \alpha' \sum_r^{1...p} p_{1r} \sum_k^{1...p} m_k^{(r)} m_k^{(4)} \cdot \sum_i^{1...p} m_i^{(4)} m_i^{(j)} \\ &+ \alpha'' \sum_r^{1...p} p_{1r} \sum_i^{1...p} m_i^{(r)} m_i^{(j)} \cdot \sum_k^{1...p} (m_k^{(4)})^2. \end{aligned}$$

Au second membre, les deux premiers termes sont nuls et le troisième a pour valeur $\alpha'' p_{1j}$; par suite $C_j = \alpha'' p_{1j} X_1 \cot \sigma$.

D_j est nul, car le coefficient de X_l est nul; on a, en effet,

$$\begin{aligned} \sum_i^{1...p} \sum_k^{1...p} \alpha_{ik} m_i^{(j)} m_k^{(l)} &= \sum_i^{1...p} \sum_k^{1...p} \left(\alpha m_i^{(1)} m_k^{(1)} + \alpha' m_i^{(1)} \sum_r^{1...p} p_{1r} m_k^{(r)} + \alpha'' m_k^{(1)} \sum_r^{1...p} p_{1r} m_i^{(r)} \right) m_i^{(j)} m_k^{(l)} \\ &= \alpha \sum_j^{1...p} m_i^{(1)} m_i^{(j)} \cdot \sum_k^{1...p} m_k^{(1)} m_k^{(l)} \\ &+ \alpha' \sum_r^{1...p} p_{1r} \sum_k^{1...p} m_k^{(r)} m_k^{(l)} \cdot \sum_i^{1...p} m_i^{(1)} m_i^{(j)} \\ &+ \alpha'' \sum_r^{1...p} p_{1r} \sum_i^{1...p} m_i^{(r)} m_i^{(j)} \cdot \sum_k^{1...p} m_k^{(1)} m_k^{(l)}, \end{aligned}$$

et, au second membre, les trois termes sont nuls.

Si l'on remplace, dans (115), A_j , B_j , C_j , D_j par leurs valeurs, il vient

$$\frac{\partial X_j}{\partial u} = p_{j1} X_1 \cot \sigma + \sum_l^{2...p} p_{jl} X_l - \frac{p_{1j}}{\sin \sigma} X_1$$

ou

$$(116) \quad \frac{\partial X_j}{\partial u} = -p_{1j} \cot \frac{\sigma}{2} X_1 + \sum_l^{2...p} p_{jl} X_l.$$

On aurait pu se dispenser de calculer directement la valeur (114) de $\frac{\partial X_1}{\partial u}$; pour l'obtenir, il aurait suffi de dériver l'équation (102) par rapport à u et de remplacer, dans l'équation dérivée, $\frac{\partial X_j}{\partial u}$ par sa valeur (116). L'application de cette méthode donne pour $\frac{\partial X_1}{\partial u}$ la valeur (114), ce qui constitue une vérification de nos calculs.

En remplaçant H_i et H_k par leurs valeurs (111) dans la deuxième des équations (20) et en procédant comme plus haut, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial v} &= \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} \sum_l^{2...p} q_{1l} X_l, \\ \frac{\partial X_j}{\partial v} &= q_{1j} \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} X_1 + \sum_l^{2...p} q_{jl} X_l. \end{aligned}$$

Si l'on rapproche ces équations et les équations (114) et (116), on obtient le système auquel satisfont $X_1, X_2, \dots, X_p$:

$$(117) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X_1}{\partial u} = - \cot \frac{\sigma}{2} \sum_k^{2\dots p} p_{1k} X_k, \\ \frac{\partial X_1}{\partial v} = \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} \sum_k^{2\dots p} q_{1k} X_k, \\ \frac{\partial X_i}{\partial u} = - p_{1i} \cot \frac{\sigma}{2} \cdot X_1 + \sum_k^{2\dots p} p_{ik} X_k, \\ \frac{\partial X_i}{\partial v} = q_{1i} \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} \cdot X_1 + \sum_k^{2\dots p} q_{ik} X_k, \\ i = 2, \dots, p. \end{array} \right.$$

Ce système est complètement intégrable, comme le système (20) d'où il a été déduit, et il possède l'intégrale (102). Il s'intègre par quadratures, si $p = 2$; son intégration se ramène à celle d'une équation de Riccati aux différentielles totales, si $p = 3$, et à celle de deux équations de Riccati aux différentielles totales, si $p = 4$.

21. Exprimons, en fonction de $X_1, X_2, \dots, X_p$, les quantités ω et z'_i définies par les égalités (13) et (14).

Si l'on remplace, dans la première des relations (101), $m_j^{(1)}$ par sa valeur (94), il vient

$$\sum_i^{1\dots p} z_i H_i = X_1 \sqrt{U + V \cot \sigma}.$$

D'autre part, la formule (103) donne

$$(118) \quad H_i = m_i^{(1)} X_1 \cot \sigma + \sum_k^{2\dots p} m_i^{(k)} X_k.$$

On a, par suite, en tenant compte de (91),

$$(119) \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{U + V \sin \sigma}} X_1,$$

$$(120) \quad \frac{z'_i}{\sqrt{U + V}} = m_i^{(1)} \cos \sigma + \sum_k^{2 \dots p} m_i^{(k)} \frac{X_k}{X_1} \sin \sigma.$$

Il est clair que la valeur (118) de H_i et la valeur (119) de ω vérifient les égalités (11), quelle que soit la constante m . D'autre part, si l'on additionne les égalités (120), après les avoir élevées au carré, on obtient, quelle que soit m , la relation (9).

Ces remarques vont nous permettre de compléter en un point la théorie des transformations T_m et Θ_m . Nous avons supposé, au n° 3, $V - U + m \neq 0$. Nous pouvons à présent traiter le cas où l'on a

$$(121) \quad V - U + m = 0.$$

Cette égalité exige que U et V soient constantes. On peut, sans restreindre la généralité, poser $U = V = \frac{1}{2}$. Alors l'égalité (121) se réduit à $m = 0$ et l'on a, par suite, en vertu de (91), $\cos \sigma = 0$, $\sin \sigma = 1$. Si l'on tient compte de ces égalités, les formules (118), (119) et (120) se réduisent aux suivantes :

$$(118') \quad H_i = \sum_k^{2 \dots p} m_i^{(k)} X_k,$$

$$(119') \quad \omega = X_1,$$

$$(120') \quad z'_i = \frac{1}{X_1} \sum_k^{2 \dots p} m_i^{(k)} X_k.$$

Telles sont les valeurs de H_i , de ω et de z'_i relatives aux transformations T_0 et Θ_0 de l'équation (e), dans le cas où U et V sont égales à $\frac{1}{2}$.

V.

22. Nous adopterons, dans ce paragraphe, toutes les notations de M. Bianchi (*loc. cit.*) Transcrivons les équations dont M. Bianchi fait dépendre les transformations orthogonales des équations de Moutard à solutions quadratiques :

$$(A) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \lambda_k}{\partial u} = -(1 + \cos \sigma) p_{0k} - \sum_j^{1...n} p_{jk} \lambda_j \\ \quad + \left(\frac{U'}{U+V} \frac{\cos \sigma}{1 - \cos \sigma} - \frac{1}{1 - \cos \sigma} \sum_j^{1...n} p_{j0} \lambda_j \right) \lambda_k, \\ \frac{\partial \lambda_k}{\partial v} = (1 - \cos \sigma) q_{0k} - \sum_j^{1...n} q_{jk} \lambda_j \\ \quad - \left(\frac{V'}{U+V} \frac{\cos \sigma}{1 + \cos \sigma} - \frac{1}{1 + \cos \sigma} \sum_j^{1...n} q_{j0} \lambda_j \right) \lambda_k, \\ \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{array} \right.$$

$$(B) \quad \sum_k^{1...n} \lambda_k^2 = \sin^2 \sigma.$$

On peut rattacher le système (A) à un système de la forme (117), en procédant comme il suit :

Si l'on pose, dans (A),

$$(\alpha) \quad \lambda_k = \frac{X_k}{X_0} \sin \sigma, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

il vient

$$X_0 \left(\frac{\partial X_k}{\partial u} + p_{0k} \cot \frac{\sigma}{2} \cdot X_0 + \sum_j^{1...n} p_{jk} X_j \right) = X_k \left(\frac{\partial X_0}{\partial u} - \cot \frac{\sigma}{2} \sum_j^{1...n} p_{j0} X_j \right),$$

$$X_0 \left(\frac{\partial X_k}{\partial v} - q_{0k} \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} \cdot X_0 + \sum_j^{1...n} q_{jk} X_j \right) = X_k \left(\frac{\partial X_0}{\partial v} + \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} \sum_j^{1...n} q_{j0} X_j \right).$$

On satisfait à ces $2n$ équations en annulant les parenthèses, ce qui donne

$$\begin{aligned}\frac{\partial X_0}{\partial u} &= -\cot \frac{\sigma}{2} \sum_j^{1\dots n} p_{0j} X_j, \\ \frac{\partial X_0}{\partial v} &= \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} \sum_j^{1\dots n} q_{0j} X_j, \\ \frac{\partial X_k}{\partial u} &= -p_{0k} \cot \frac{\sigma}{2} \cdot X_0 + \sum_j^{1\dots n} p_{kj} X_j, \\ \frac{\partial X_k}{\partial v} &= q_{0k} \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} \cdot X_0 + \sum_j^{1\dots n} q_{kj} X_j.\end{aligned}$$

Aux notations près, ce système est identique au système (117). Il est donc complètement intégrable et admet l'intégrale

$$(\beta) \quad \sum_k^{1\dots n} X_k^2 - X_0^2 = C.$$

Remplaçons, dans cette égalité, X_k par sa valeur tirée de (α) ; il viendra

$$(\gamma) \quad \frac{\sum_k^{1\dots n} \lambda_k^2}{\sin^2 \sigma} - 1 = \frac{C}{X_0^2}.$$

Donc, pour vérifier la relation (B), il faudra choisir les valeurs initiales de $X_0, X_1, \dots, X_n$ de manière que C soit nulle.

23. Le système des équations (A) et des équations (24) (BIANCHI, *loc. cit.*, p. 272) admet l'intégrale

$$(\delta) \quad \sum_k^{1\dots n} \lambda_k^2 - \sin^2 \sigma = \frac{C'}{(U + V) R^2},$$

C' désignant une constante arbitraire.

C'est en transformant l'intégrale (100) que nous avons d'abord été conduit à ce résultat. On peut établir celui-ci comme il suit, en se servant des formules de M. Bianchi :

Posons

$$(\epsilon) \quad 2\theta = \sum_k^{1\dots n} \lambda_k^2 + \cos^2 \sigma - 1.$$

Dérivons cette égalité par rapport à u et, dans l'égalité obtenue, remplaçons $\frac{\partial \lambda_k}{\partial u}$ par sa valeur tirée de la première des équations (A), $\sum_k^{1\dots n} \lambda_k^2$ par sa valeur tirée de (ϵ) , et tenons compte de l'identité

$$\frac{\partial \cos \sigma}{\partial u} = -\frac{U'}{U + V} (1 + \cos \sigma);$$

il viendra

$$\frac{\partial \log \theta}{\partial u} = \frac{2U'}{U + V} \cdot \frac{\cos \sigma}{1 - \cos \sigma} - \frac{2}{1 - \cos \sigma} \sum_j^{1\dots n} p_{j0} \lambda_j,$$

ou, en remplaçant le second terme du second membre par sa valeur tirée de la première des équations (24),

$$\frac{\partial}{\partial u} \log \theta (U + V) R^2 = 0.$$

En dérivant (ϵ) par rapport à v , on démontrera de même l'égalité

$$\frac{\partial}{\partial v} \log \theta (U + V) R^2 = 0.$$

On a, par suite, C' désignant une constante arbitraire,

$$\theta (U + V) R^2 = \frac{C'}{2},$$

relation qui se ramène immédiatement à l'intégrale (δ) .

24. En vertu de l'intégrale (δ) , la relation (B) aura lieu pour toutes les valeurs de u et de v , si elle a lieu pour un système de valeurs de ces variables. Ce résultat a déjà été établi autrement à la fin du n° 22.

25. Si l'on connaît une solution $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ du système (A), pour laquelle la relation (B) n'est pas vérifiée, la formule (δ) donnera R. Il ne sera donc pas nécessaire, pour obtenir R, d'effectuer une quadrature de différentielle totale, comme l'indique M. Bianchi (*loc. cit.*, p. 278).

Additionnons les relations

$$\bar{\theta}_i = \theta_i \cos \sigma + \sum_k^{1..n} \lambda_k x_i^{(k)} \cdot \sqrt{U + V}$$

(BIANCHI, *loc. cit.*, p. 278), après les avoir élevées au carré; il viendra

$$\sum_i^{0..n} \bar{\theta}_i^2 = (U + V) \cos^2 \sigma + (U + V) \sum_k^{1..n} \lambda_k^2,$$

ou, en remplaçant $\sum_k^{1..n} \lambda_k^2$ par sa valeur tirée de (δ),

$$\sum_i^{0..n} \bar{\theta}_i^2 = U + V + \frac{C'}{R^2}.$$

Aux solutions $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ considérées correspondent donc les transformations que nous avons désignées par la lettre Θ .

26. Si l'on élimine $\sum_k^{1..n} \lambda_k^2$ entre (γ) et (δ), il vient

$$(\varphi) \quad R = C'' \frac{X_0}{\sqrt{U + V} \sin \sigma},$$

étant posé $C'' = \sqrt{\frac{C'}{C}}$. Cette formule, qui n'est pas différente de la formule (119), a été établie dans le cas où C' est $\neq 0$. Elle subsiste si $C' = 0$; pour le démontrer, il suffit de poser $C' = CC''^2$, C'' désignant une constante donnée, et de passer à la limite, dans (φ), pour $C = 0$.

VI.

27. Nous allons déterminer toutes les équations de Moutard

$$(e) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = kz$$

qui possèdent deux solutions z_1, z_2 quadratiques, c'est-à-dire telles que l'on ait

$$(122) \quad z_1^2 + z_2^2 = U + V,$$

U désignant une fonction de u , et V une fonction de v .

Cette égalité peut être remplacée par les suivantes :

$$(123) \quad \begin{cases} z_1 = \sqrt{U + V} \cos \tau, \\ z_2 = \sqrt{U + V} \sin \tau. \end{cases}$$

Pour que z_1 et z_2 satisfassent à l'équation (e), il faut et il suffit que l'on ait

$$(124) \quad k = -\frac{\partial \tau}{\partial u} \frac{\partial \tau}{\partial v} - \frac{1}{4} \frac{U'V'}{(U + V)^2},$$

$$(125) \quad \frac{\partial^2 \tau}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \tau}{\partial u} \frac{V'}{2(U + V)} + \frac{\partial \tau}{\partial v} \frac{U'}{2(U + V)} = 0.$$

Distinguons trois cas :

PREMIER CAS : La somme $z_1^2 + z_2^2$ est constante. On peut alors poser $U = V = \frac{1}{2}$. Les formules (123), (124) deviennent

$$(126) \quad \begin{cases} z_1 = \cos \tau, \\ z_2 = \sin \tau, \end{cases}$$

$$(127) \quad k = -\frac{\partial \tau}{\partial u} \frac{\partial \tau}{\partial v},$$

et l'équation (125) se réduit à

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial u \partial v} = 0.$$

Par suite, τ est ou bien la somme d'une fonction de u et d'une fonction de v ; ou bien une fonction de u ou de v , de u , par exemple; ou bien une constante. On a donc, soit

$$(128) \quad \tau = U_1 + V_1,$$

soit

$$(129) \quad \tau = U_1,$$

soit

$$\tau = \text{const.},$$

U_1 désignant une fonction de u , et V_1 une fonction de v .

Si τ est de la forme (128), la formule (127) donne $k = -U_1'V_1'$ et l'équation (e) s'écrit

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = -U_1'V_1'z,$$

ou

$$(130) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = -z,$$

à condition de prendre U_1, V_1 pour nouvelles variables indépendantes et de les désigner par u, v . On a alors, en vertu de (128),

$$(131) \quad \tau = u + v,$$

et les formules (126) donnent

$$(132) \quad \begin{cases} z_1 = \cos(u + v), \\ z_2 = \sin(u + v). \end{cases}$$

Si τ est de la forme (129), $k = 0$ et l'équation (e) s'écrit

$$(133) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0.$$

Cette équation ne change pas si l'on substitue à la variable u la variable U_1 et si l'on désigne cette dernière par u . On a alors, en vertu de (129),

$$(134) \quad \tau = u,$$

et les formules (126) deviennent

$$(135) \quad \begin{cases} z_1 = \cos u, \\ z_2 = \sin u. \end{cases}$$

Enfin, si $\tau = \text{const.}$, l'équation (e) est encore l'équation (133), et z_1, z_2 sont données par les formules (126).

DEUXIÈME CAS : $z_1^2 + z_2^2$ est une fonction de u ou de v , de u , par exemple. On peut alors poser $V = 0$. Par suite, les formules (123), (124) et l'équation (125) deviennent

$$(136) \quad \begin{cases} z_1 = \sqrt{U} \cos \tau, \\ z_2 = \sqrt{U} \sin \tau, \end{cases}$$

$$(137) \quad k = -\frac{\partial \tau}{\partial u} \frac{\partial \tau}{\partial v},$$

$$(138) \quad \frac{\partial^2 \tau}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \tau}{\partial v} \frac{U'}{2U} = 0.$$

L'équation (138) est vérifiée si τ est une fonction de u seule ou une constante. Alors, en vertu de (137), $k = 0$ et l'équation (e) s'écrit

$$(139) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0.$$

Lorsque τ est fonction de u , si l'on substitue à u la variable τ et qu'on désigne celle-ci par u , de manière à avoir

$$(140) \quad \tau = u,$$

l'équation (139) ne change pas et les formules (136) deviennent

$$(141) \quad \begin{cases} z_1 = \sqrt{U} \cos u, \\ z_2 = \sqrt{U} \sin u. \end{cases}$$

Si τ est constante, z_1 et z_2 sont données par les formules (136).

Lorsque τ dépend de v , l'équation (138) peut s'écrire

$$\frac{\frac{\partial^2 \tau}{\partial u \partial v}}{\frac{\partial \tau}{\partial v}} + \frac{U'}{2U} = 0,$$

et l'on en déduit, par intégration,

$$\frac{\partial \tau}{\partial v} = \frac{V_1'}{\sqrt{U}},$$

V_1 désignant une fonction de v . Une seconde intégration donne

$$(142) \quad \tau = \frac{V_1}{\sqrt{U}} + U_1,$$

U_1 désignant une fonction de u .

En vertu de (137), k a pour valeur

$$k = U'V_1' \left(\frac{V_1}{2U^2} - \frac{1}{\sqrt{U}} \frac{dU_1}{dU} \right).$$

L'équation (e) est donc, dans le cas présent,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = U'V_1' \left(\frac{V_1}{2U^2} - \frac{1}{\sqrt{U}} \frac{dU_1}{dU} \right) z,$$

ou

$$(143) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \left(\frac{v}{2u^2} - \frac{1}{\sqrt{u}} \frac{dU_1}{du} \right) z,$$

à condition de prendre pour nouvelles variables indépendantes U, V_1 et de les désigner par u, v .

L'expression (142) de τ devient

$$(144) \quad \tau = \frac{v}{\sqrt{u}} + U_1$$

et les formules (136) donnent

$$(145) \quad \begin{cases} z_1 = \sqrt{u} \cos \left(\frac{v}{\sqrt{u}} + U_1 \right), \\ z_2 = \sqrt{u} \sin \left(\frac{v}{\sqrt{u}} + U_1 \right). \end{cases}$$

TROISIÈME CAS : U et V sont variables. Si l'on prend U, V pour variables indépendantes et qu'on les désigne par u, v , les formules (123), (124), l'équation (e) et l'équation (125) s'écrivent

$$(146) \quad \begin{cases} z_1 = \sqrt{u+v} \cos \tau, \\ z_2 = \sqrt{u+v} \sin \tau, \end{cases}$$

$$(147) \quad k = -\frac{\partial \tau}{\partial u} \frac{\partial \tau}{\partial v} - \frac{1}{4} \frac{1}{(u+v)^2},$$

$$(148) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = - \left[\frac{\partial \tau}{\partial u} \frac{\partial \tau}{\partial v} + \frac{1}{4} \frac{1}{(u+v)^2} \right] z,$$

$$(149) \quad \frac{\partial^2 \tau}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \tau}{\partial u} \frac{1}{2(u+v)} + \frac{\partial \tau}{\partial v} \frac{1}{2(u+v)} = 0.$$

Si l'on remplace v par $-v$ dans l'équation (149), celle-ci devient l'équation $E\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, qui s'intègre, on le sait, par quadratures (*).

Le problème que nous nous étions proposé est donc complètement résolu.

(*) G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, 2^e partie, liv. IV, chap. III.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

- De Donder (Th.)*. Les théories d'Einstein. Bruxelles, 1920; extr. in-8° (pp. 3-20).
- Delbrouck (M.)*. Étude analytique de l'action des chocs sur les câbles d'extraction. Liège, 1920; extr. in-8° (pp. 187-236).
- Godeaux (Lucien)*. Sur les surfaces du quatrième ordre contenant certaines courbes rationnelles. S. l. n. d.; extr. in-8° (pp. 1-10.)
- Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres 1 (deuxième partie). Paris, 1914; extr. in-4° (pp. 51-70).
- Sur certaines surfaces algébriques de diviseur supérieur à l'unité. Cracovie, 1914; extr. in-8° (pp. 362-368).
- Recherches sur les surfaces de genres 1 (deuxième note). Bucarest, 1914; extr. in-8° (pp. 49-54).
- Note sur Jean Taisnier. Bologne, 1914; extr. in-8° (2 p.).
- Sur les involutions de genres 1 et de seconde espèce, appartenant à une surface de genre 1. Jassy, 1915; extr. in-8° (pp. 248-254).
- Sur les congruences d'ordre 2 formées de coniques. Paris-Genève, 1915; extr. in-8° (pp. 207-211).
- Sur l'emploi de certaines matrices de formes dans la résolution de problèmes de géométrie. Paris-Genève, 1915; extr. in-8° (pp. 32-40).
- Un mathématicien belge du XVI^e siècle, Jean Taisnier. Paris, 1915, extr. in-8° (pp. 33-36).
- Recherches sur les surfaces de genres 1 (troisième note). Bucarest, 1915; extr. in-8° (pp. 165-169).
- Sur les congruences d'ordres 1 et 2 de cubiques gauches. Paris-Genève, 1916; extr. in-8° (pp. 117-121).
- Étude élémentaire sur l'homographie plane de période 3 et sur une surface cubique. Paris, 1916; extr. in-8° (pp. 1-13).

- Godeaux (Lucien)*. Sur les surfaces de genres 1 (quatrième note). Sur la surface représentant les couples de points d'une courbe de genre 3 (deuxième note). Bucarest, 1916; extr. in-8° (pp. 281-286).
- Sur les surfaces algébriques liées à une courbe de genre 3. Bucarest, 1916; extr. in-8° (pp. 271-274).
- Sur des surfaces algébriques liées à une courbe de genre 3 (troisième et quatrième notes). Bucarest, 1916; extr. in-8° (pp. 373-378).
- Étude d'une involution cubique douée d'un nombre fini de points de coïncidence appartenant à une surface algébrique. S. l., 1917; extr. in-8° (pp. 1-8).
- Sur les congruences linéaires de cubiques gauches douées d'une seule courbe singulière. Paris-Genève, 1918; extr. in-8° (pp. 81-89).
- Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence appartenant à une surface algébrique. Paris, 1919; extr. in-8° (pp. 1-16).
- Les surfaces bicanoniques doubles ayant un nombre fini de points de diramation. Bruxelles, 1920; extr. in-8° (pp. 1-10).
- Sobre las rectas comunes a varias cuádras de un sistema lineal. Madrid, 1920; extr. in-8° (pp. 1-8).
- Huyghens (Christian)*. Traité de la lumière. Paris, 1920; in-8° (x-155 pp.).
- Spallanzani (Lazare)*. Observations et expériences faites sur les animalcules des infusions. Paris, 1920; 2 vol. in-16 (viii-106, 122 pp.).
- Stuyvaert (M.)*. Algèbre à deux dimensions. Gand, 1920; in-8° (223 p.).
-

TABLE DES MATIÈRES.

Séance du samedi 7 août 1920.

Notification du décès d'Armand Gautier, associé	361
CORRESPONDANCE : Fondation de l'Institut international d'anthropologie. — Nouvelle organisation de la Station zoologique de Naples	361
HOMMAGES D'OUVRAGES	361
Catalogue international de littérature scientifique	362
CONFÉRENCE DE L'UNION INTERNATIONALE DE LA CHIMIE PURE ET APPLIQUÉE. — Rapport de M. Swarts	362

Communications et Lectures.

La Classe décide l'impression d'un mémoire de M. Rutot (<i>Esquisse d'une monographie des couches quaternaires des carrières du Hainaut à Soignies</i>).	365
Travaux à l'examen.	366
BIOLOGIE. — <i>La notion de l'espèce en biologie</i> , par Jean Massart (4 fig.)	366
GÉOLOGIE. — <i>A propos de l'origine de certaines failles des terrains primaires belges</i> , par P. Fourmarier (1 fig.)	381
CHIMIE. — <i>Contribution à l'étude du trifluortoluène</i> , par Fréd. Swarts (1 fig.).	389
CHIMIE. — <i>Sur l'hydrogénation catalytique des dérivés organiques fluorés</i> , par Fréd. Swarts	399
ANALYSE MATHÉMATIQUE ET GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE. — <i>Sur les équations de Moutard à solutions quadratiques (suite)</i> , par A. Demoulin.	418
BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.	439

26-9-20



0.795
ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

BULLETIN

DE LA

CLASSE DES SCIENCES

1920 — N^{os} 9-10



BRUXELLES

MAURICE LAMERTIN

LIBRAIRE-ÉDITEUR

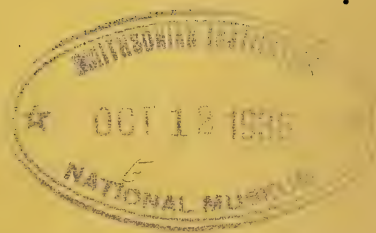
Rue Coudenberg, 58-62

M. HAYEZ

IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE

Rue de Louvain, 112

1920



Séance du samedi 9 octobre 1920.

M. A. GRAVIS, directeur de la Classe.

M. P. PELSENEER, secrétaire perpétuel.

Sont présents : MM. G. Cesàro, *vice-directeur*, C. le Paige, J. Deruyts, Léon Fredericq, J. Neuberg, A. Lameere, Ch.-J. de la Vallée Poussin, Max Lohest, Fr. Swarts, Jean Massart, A. Demoulin, A. Rutot, A. de Hemptinne, Victor Willem, P. Stroobant, Ch. Julin, G. Lecointe, Émile Marchal, J. Cornet, *membres*; Th. De Donder, O. Dony-Hénault, Paul Fourmarier, O. Van der Stricht, *correspondants*.

M. G.-A. Boulenger, *associé*, assiste à la séance.

Absences motivées : MM. J. Verschaffelt, *membre*; Stuyvaert, de Dorlodot et Grégoire, *correspondants*.

M. le Directeur, devant l'Assemblée debout, exprime les vifs regrets avec lesquels la Classe a appris la mort de M. A. Jorissen et fait l'éloge de ce regretté et estimé confrère. Il annonce également le décès de MM. A. Gautier, *associé* de la Section des sciences mathématiques et physiques, et Y. Delage, *associé* de la Section des sciences naturelles. Les condoléances de la Classe seront transmises aux familles des défunts.

M. le Directeur souhaite la bienvenue à M. A. Boulenger, *associé*, et adresse les félicitations de la Classe à M. Bordet, qui vient de recevoir la médaille d'or de Pasteur, décernée tous les dix ans par la Société de médecine de Suède. (*Applaudissements.*)

CORRESPONDANCE.

MM. Branly et Urbain, associés, expriment leurs condoléances à l'Académie, à l'occasion de la mort de M. Jorissen.

M. J. Verschaffelt annonce qu'il se fixe définitivement à l'étranger et demande s'il peut rester membre titulaire de l'Académie. Il lui sera répondu que, conformément aux statuts, il prend place parmi les cinquante associés de la Classe et est inscrit à la première des deux places vacantes pour la Section des sciences mathématiques et physiques.

La Société royale de Londres demande le nom du délégué de la Classe à la Conférence de la littérature scientifique internationale du 28 septembre. M. Fredericq, qui avait été désigné, s'est trouvé empêché.

L'Académie de Belgrade propose d'admettre l'Académie yougo-slave de Agram (Zagreb) au sein du Conseil international de recherches et de l'Union académique internationale. — Renvoi aux Comités exécutifs respectifs de ces deux associations.

M. le Ministre des Sciences et des Arts annonce le prochain envoi d'une ordonnance de paiement de la subvention pour 1920, accordée à la *Table des constantes physiques*.

M. Lecointe adresse la liste des noms proposés pour la constitution des Comités nationaux d'astronomie, de géodésie et géophysique et de géographie. — La Classe décide de procéder, au cours de sa prochaine séance, à la constitution de tous les divers Comités nationaux et charge un certain nombre de ses membres de lui faire des propositions à cette fin.

L'Association des ingénieurs électriciens sortis de l'Institut électrotechnique Montefiore adresse le programme du concours pour son prix triennal de 1912.

L'Union internationale de la chimie pure et appliquée adresse dix exemplaires du compte rendu de la conférence qu'elle a tenue à Rome en juin 1920.

COMITÉ SECRET.

La Section des sciences mathématiques et physiques communique les noms des candidats qu'elle propose pour les places vacantes.

RAPPORTS.

1. De MM. Swarts et de Hemptinne sur les deux travaux suivants de M. Bruylants : 1° *Sur quelques propriétés physiques de l'hydrogène telluré*; 2° *Note sur la constitution du cyanure d'allyle*. — Conformément aux conclusions des rapporteurs, la classe décide l'impression de ces deux mémoires dans le *Bulletin* de la séance.

2. De MM. Cesàro et Lohest sur un travail de M. Schoep, intitulé : *Sur quelques cristaux de diopside du Katanga*. — Conformément aux conclusions des rapporteurs, ce travail sera retourné à son auteur avec les deux rapports des commissaires.

LECTURES.

Sur la nature des étoiles temporaires, par P. Stroobant. *Observations sur l'étoile nouvelle du Cygne*, par le même. — Impression au *Bulletin*.

Sur la faune des mammifères de l'époque de la Pierre polie en Belgique, par A. Rutot. — Impression au *Bulletin*.

Sur les biréfringences normales et accidentelles, note par M. Henriot, présentée par M. De Donder, avec un rapport verbal concluant à l'impression. — Adopté.

M. Godeaux adresse un travail : *Sur une surface du quatrième ordre à douze points doubles-coniques*. — Renvoi à MM. Stuyvaert et Neuberg, pour rapport.

M. Deruyts communique à l'Académie les principaux résultats du Congrès international de mathématiques de Strasbourg et annonce que ses prochaines sessions auront lieu, en 1924 à New-York et en 1928 à Bruxelles.

MOTION DE M. MASSART.

M. Massart propose et la Classe adopte les deux vœux suivants, qui seront transmis aux départements compétents :

1° La Classe des sciences de l'Académie royale de Belgique demande à être consultée, conformément au précédent de 1889, si une place devenait vacante dans le Conseil de l'Observatoire, par suite du départ de M. J. Verschaffelt.

2° La Classe des sciences de l'Académie royale de Belgique propose que le Jardin botanique de l'État, à Bruxelles, soit rattaché au Ministère des Sciences et des Arts.

COMMUNICATIONS ET LECTURES.

ASTRONOMIE. — Observations de « Nova Cygni » n° 3, 1920,

par P. STROOBANT, membre de l'Académie.

Cette étoile nouvelle a été découverte par Denning à Bristol, le 20 août dernier. Son éclat, qui était alors de 3^m5, a augmenté jusqu'au 24; d'après les observations de Greenwich il atteignait alors la grandeur 1,8.

Nous l'avons observée du 25 août au 29 septembre, en la comparant, par la méthode des degrés, à des étoiles voisines.

Les étoiles de comparaison qui ont été utilisées se trouvent réunies dans le tableau ci-dessous, qui donne pour chacune d'elles la lettre par laquelle elle a été désignée, la grandeur d'après la *Harvard Revised Photometry*, excepté pour les trois

dernières, qui ne figurent pas dans cette publication et dont la grandeur est empruntée à la *Bonner Durchmusterung*, volume 3.

Presque toutes les observations ont été effectuées à l'aide de jumelles ayant des objectifs de 40 millimètres d'ouverture et grossissant quatre fois. Des estimations ont aussi été faites à l'œil nu le 25 et le 27 août; celles du 29 septembre ont été effectuées à l'aide du chercheur de 47 millimètres d'ouverture de l'équatorial de 15 centimètres de l'Observatoire royal.

Étoiles de comparaison.

Dési- gnation.	ÉTOILE.	GRANDEUR.	Dési- gnation.	ÉTOILE.	GRANDEUR.
<i>a</i>	γ Cygni . .	2 ^m 32	<i>k</i>	23 Cygni . .	5 ^m 04
<i>b</i>	α Cephei . .	2,60	<i>l</i>	<i>d</i> Id. . .	5,17
<i>c</i>	ε Cygni . .	2,64	<i>m</i>	DM + 52,2623	5,72
<i>d</i>	δ Id. . .	2,97	<i>n</i>	DM + 54,2193	5,86
<i>e</i>	ι Id. . .	3,94	<i>o</i>	DM + 56,2334	6,10
<i>f</i>	κ Id. . .	3,98	<i>p</i>	DM + 51,2763	6,28
<i>g</i>	32 Id. . .	4,16	<i>q</i>	DM + 54,2223	6,5
<i>h</i>	33 Id. . .	4,32	<i>r</i>	DM + 53,2303	7,1
<i>i</i>	θ Id. . .	4,64	<i>s</i>	DM + 53,2308	7,7
<i>j</i>	ψ Id. . .	4,80			

OBSERVATIONS.

L'heure est donnée en temps moyen de Greenwich, la nova est désignée par N.

Les observations se faisant dans la région zénithale du ciel, on n'a pas effectué de correction pour l'absorption atmosphérique.

P. Stroobant. — Observations de Nova Cygni n° 3, 1920.

1920 Août 25.	7 ^h 50 ^m	N a	
	55	N 3 b	2,24
	8 0	N 1 a	2,26
	8 10	a 3 d	
		a 3 c	
	MOYENNE	.	2,25

Couleur : jaune orange. Lune au Sud-Est.

Août 27	10 ^h 50 ^m	d 2 N	3,47
		b 4 N	3,52
	11 20	N 2 f	
	MOYENNE	.	3,50

Couleur : blanc-jaune. Fort clair de Lune.

Août 29.	8 ^h 50 ^m	N f	3,98
		N 1 e	3,71
	MOYENNE	.	3,85

Très fort clair de Lune. Ciel laiteux. Observation difficile.

Août 30.	11 ^h 40 ^m	f 3 N	4,16
		g 1 N	4,22
		N 6 i	4,28
		N 4 h	4,08
	MOYENNE	.	4,18

Lune au Sud-Est.

Septembre 8	7 ^h 30 ^m	N 3 j	
		h 7 N	4,65
	MOYENNE	.	4,65

Septembre 9	7 ^h 30 ^m	j 2 N	4,88
		N 8 l	
		N k	5,04
	MOYENNE	.	4,96

Septembre 10	10 ^h 25 ^m	l 3 N	
		N 2 m	5,50
	MOYENNE	.	5,50

Septembre 11	8 ^h 45 ^m	l 3 N	
		N 2 m	5,50
	MOYENNE	.	5,50

P. Stroobant. — Observations de Nova Cygni n° 5, 1920.

Septembre 12.	7 ^h 45 ^m	<i>j</i> 3 N	
		N 2 <i>l</i>	5,02
		<i>k</i> 1 N	5,11
	MOYENNE . . .		5,06
Septembre 14	7 ^h 40 ^m	N <i>l</i>	5,17
Ciel légèrement voilé.	MOYENNE . . .		5,17
Septembre 16.	7 ^h 40 ^m	<i>l</i> 3 N	
		N 5 <i>n</i>	5,43
Ciel nuageux.	MOYENNE . . .		5,43
Septembre 17.	7 ^h 40 ^m	<i>l</i> 1 N	
Ciel très nuageux.	8 ^h 20 ^m	<i>l</i> 2 N	5,33
		<i>o</i> 1 N	6,18
Ciel serein?	MOYENNE . . .		5,75
Septembre 19.	10 ^h 5 ^m	N 1 <i>o</i>	6,06
		N 2 <i>p</i>	6,20
	10 ^h 15 ^m	<i>n</i> 8 N	
Ciel serein.	MOYENNE . . .		6,13
Septembre 20.	8 ^h 15 ^m	<i>p</i> N	6,28
Bandes de nuages. Lune au Sud-Ouest.	MOYENNE . . .		6,28
Septembre 29.	7 ^h 50 ^m	<i>q</i> 4 N	7,3
		<i>r</i> 1 N	7,3
		N 2 <i>s</i>	
Ciel serein. Lune à l'Est (P. L. le 28).	MOYENNE . . .		7,3

On peut remarquer une recrudescence, très nette, de l'éclat vers le 12 septembre. L'état du ciel n'a malheureusement pas permis de constater s'il s'est produit d'autres fluctuations dans la grandeur de l'étoile.

L'éclat de la *Nova Cygni* a diminué plus rapidement que celui de *Nova Aquilae* 1918, et il a augmenté plus lentement, de sorte que la courbe de lumière, au moment du maximum, présente une forme plus arrondie que celle de la plupart des autres étoiles temporaires.

ASTRONOMIE. — **Sur la nature des étoiles temporaires,**

par Paul STROOBANT, membre de l'Académie.

Les étoiles nouvelles ou temporaires sont caractérisées par une série de phénomènes qui se présentent d'une manière à peu près identique lors de chaque apparition.

Une *nova*, à peine visible comme un très faible objet télescopique, atteint en un temps fort court, quelques jours, un éclat remarquable. Sa lumière diminue ensuite lentement, en présentant des fluctuations plus ou moins régulières, et, au bout d'un an ou deux, la *nova* est redescendue au rang des faibles étoiles télescopiques.

Au commencement de leur période de visibilité les étoiles temporaires ont un spectre stellaire ordinaire, mais coupé de lignes sombres peu nombreuses et fortement déplacées de leur position normale. Au moment du maximum d'éclat le spectre se transforme, les lignes brillantes des protubérances solaires, principalement celles de l'hydrogène, apparaissent, puis leur intensité diminue avec celle de l'étoile. Ces raies brillantes sont remarquablement larges et sont bordées de raies sombres, du côté des petites longueurs d'onde. Au bout d'un certain temps, quand l'éclat de l'étoile a beaucoup diminué, les raies protubérantielles s'effacent tandis qu'apparaissent, faibles d'abord, puis de plus en plus apparentes, les raies caractéristiques des nébuleuses, dans le vert et dans le violet. Arrivées à la dernière période de leur évolution, les étoiles temporaires présentent un spectre analogue à celui du noyau d'une nébuleuse planétaire ou d'une étoile Wolf-Rayet.

On a imaginé de nombreuses hypothèses pour expliquer ce phénomène très complexe; elles peuvent se ramener à trois principales :

a) Au sein de l'étoile se produit une explosion accompagnée d'une éruption formant pendant quelque temps une atmosphère composée principalement d'hydrogène incandescent. Suivant la comparaison de M. Deslandres, la *nova* est une étoile dont l'atmosphère est subitement le siège de phénomènes analogues aux protubérances solaires, mais sur une échelle gigantesque.

b) D'après la deuxième hypothèse les étoiles temporaires seraient produites par le choc de deux soleils éteints.

Cette explication, envisagée par plusieurs astronomes, a été développée par Arrhenius, qui admet l'existence de deux astres relativement obscurs, se déplaçant l'un par rapport à l'autre, avec une énorme vitesse. Il suppose que la collision aura fait jaillir de ces corps deux puissants jets de matière et que les gaz expulsés sont violemment poussés en avant par la rotation du corps central résultant du choc oblique des deux soleils éteints. C'est le mouvement de rotation de ces jets qui, venant s'interposer périodiquement devant l'étoile, produirait les fluctuations d'éclat observées dans la deuxième partie de l'évolution des étoiles temporaires. La puissance de l'explosion est démontrée par ce fait que les masses d'hydrogène, expulsées en premier lieu, se précipitent vers l'observateur avec une vitesse qui atteint plusieurs centaines de kilomètres par seconde.

Cette conception d'Arrhenius est un des chaînons de sa théorie de l'évolution alternante et indéfinie : les systèmes solaires provenant de la condensation des nébuleuses et celles-ci résultant du choc des soleils.

C'est la complexité du spectre des étoiles temporaires qui a naturellement suggéré l'idée de la présence de deux corps célestes au moins; ainsi, d'après Vogel, le spectre de l'étoile nouvelle du Cocher, apparue en 1892, proviendrait de la superposition de trois spectres distincts.

c) D'après Seeliger une étoile temporaire aurait pour cause la pénétration d'un corps céleste dans un nuage cosmique, hypothèse à priori plus probable que la rencontre de deux corps solides. Il en résulterait une vaporisation des parties extérieures de l'astre, qui s'en détacheraient et seraient entraînées par les corpuscules constituant le nuage cosmique. On aurait ainsi deux spectres superposés : le premier, celui du corps incandescent, coupé de lignes sombres provenant des vapeurs absorbantes qui l'entourent, et le second, composé principalement de raies brillantes, résultant des vapeurs entraînées par les particules du nuage. Les deux spectres seraient déplacés l'un par rapport à l'autre en proportion de leur vitesse relative suivant la ligne de visée.

Il n'est pas nécessaire de supposer que le déplacement initial de l'étoile par rapport au nuage cosmique soit très considérable. Les vitesses relatives des corpuscules iront en augmentant à mesure qu'ils se rapprocheront de l'étoile et auront des valeurs très différentes, ce qui expliquerait que les raies brillantes sont larges et diffuses.

On pourrait encore citer l'hypothèse météorique de Lockyer (collision de deux courants opposés de météorites), l'hypothèse de Klinkerfues, reprise et développée par Wilsing (passage de deux corps célestes dans le voisinage l'un de l'autre et produisant d'énormes marées), etc.

Nous désirons attirer l'attention sur quelques faits récents qui nous paraissent favorables à la première hypothèse.

Ainsi que cela a déjà été signalé, l'étoile nouvelle apparue dans l'Aigle en 1918 avait été photographiée fréquemment à Harvard College depuis 1888 ; sa grandeur photographique était de 10,5, mais en 1909, elle semblait un peu plus faible. D'après des clichés obtenus à l'Observatoire d'Alger, sa grandeur était 8,8 en 1892 (13-14 août) et 9,5 en 1895 (26 juin) et en 1909 (20 août). Enfin sur une photographie prise à Juvisy par

M. Quénisset, en 1905, et sur deux clichés obtenus à Uccle par M. Van Biesbroeck, en 1913, l'éclat de cette étoile était compris entre la 10^e et la 11^e grandeur.

Ainsi que nous l'avons fait remarquer, la *Nova* aurait donc présenté jadis des fluctuations d'éclat qui, bien que peu considérables, semblent suffisantes pour classer cet astre parmi les étoiles variables ⁽¹⁾.

D'autre part J.-H. Moore et R.-F. Sanford ⁽²⁾ ont étudié d'une manière spéciale le spectre de η Carinae, variable irrégulière dont l'éclat a surpassé la 1^{re} grandeur en 1843 et 1844 et qui est descendu actuellement à la 8^e grandeur. Ils sont arrivés à conclure, notamment, que le spectre de cette étoile montre une grande analogie avec celui des étoiles temporaires, dans la première partie de leur développement.

Enfin on a constaté que l'étoile variable T Pyxidis présente aussi un spectre de *Nova*.

Il semble donc que les étoiles nouvelles sont des variables irrégulières ayant une constitution physique particulière, présentant des caractères spéciaux, encore inconnus, et susceptibles de bouleversements, d'explosions produisant une éruption violente de gaz, particulièrement d'hydrogène. Dans cette hypothèse on peut expliquer les traits caractéristiques présentés par le spectre des étoiles temporaires.

D'après W.-S. Adams ⁽³⁾ les bandes brillantes sont faiblement déplacées et leur largeur est environ le double de la déviation, vers le violet, des lignes sombres qui leur sont accolées. De plus ces déplacements sont proportionnels aux longueurs d'onde des raies, ce qui montre qu'ils résultent d'un effet Doppler.

H.-N. Russell ⁽⁴⁾ a montré récemment que ces caractères

(1) *Observations de Nova Aquilae n° 5*. Bruxelles 1919, p. 16. (Extrait des *Annales de l'Observatoire royal de Belgique*, t. XIV, fasc. II.)

(2) *Lick Observatory Bulletin*, n° 252.

(3) *Astrophysical Journal*, vol. 51, p. 121 (1920).

(4) *Journal of the R. Astronomical Society of Canada*, 14, p. 265 (juillet 1920).

spectraux peuvent s'expliquer en supposant l'étoile entourée d'une enveloppe de gaz incandescents, projetés au moment de l'explosion et se propageant dans toutes les directions. Les raies d'absorption seraient produites par la partie de l'enveloppe qui se trouve exactement entre l'étoile et nous et ces gaz en se déplaçant dans la direction de l'observateur doivent produire des lignes déviées vers le violet. Les raies d'émission, au contraire, auraient pour origine toutes les parties de l'enveloppe lumineuse, qui s'étend progressivement. A angle droit avec la direction du rayon visuel il n'y a aucun déplacement des raies. Partout ailleurs il y a un déplacement vers le violet pour les parties qui s'approchent de nous, vers le rouge pour celles qui s'éloignent ; l'ensemble de toutes ces raies donnera l'aspect d'une bande ayant une largeur à peu près double du déplacement des raies d'absorption. La difficulté réside dans l'énorme vitesse qu'il faut admettre pour expliquer les déplacements observés. Cependant, on doit se rappeler que lors de certaines éruptions solaires, on a observé des protubérances dont la vitesse moyenne d'élévation dépassait 100 kilomètres par seconde.

Dans le cas de *Nova Aquilae* 1918, les raies de l'hydrogène, de l'hélium et celles des nébuleuses ont été élargies ou déplacées, pendant des mois, d'une quantité correspondant à une vitesse de 1,250 kilomètres par seconde ; parfois des déplacements plus considérables encore ont été constatés. En supposant que l'enveloppe s'étende avec une vitesse constante de 1,250 kilomètres par seconde, au bout d'un an elle aurait un rayon de 39,4 billions de kilomètres ou un diamètre égal à deux cent soixante fois celui de l'orbite terrestre. En admettant qu'une pareille vitesse persiste pendant assez longtemps, l'étoile se transformerait en une petite nébuleuse.

Or, quatre mois environ après l'apparition de la *Nova*, Barnard, à Yerkes Observatory, observait que, dans le grand réfracteur, l'étoile n'avait pas l'apparence d'un point, mais d'un petit disque verdâtre de 1'' environ. A Lick Observatory, en

septembre 1919, Aitken observa de nouveau le disque et trouva un diamètre de $2'',4$ (couleur bleu verdâtre, provenant de ce que la lumière provenait principalement des raies nébulaires), et enfin le 9 juin 1920, le diamètre du disque atteignait $3'',8$. Ces diverses valeurs sont sensiblement proportionnelles aux intervalles de temps écoulés depuis le moment de l'apparition de la *Nova*.

Celle-ci est donc entourée d'une petite nébuleuse gazeuse qui se développe avec une vitesse constante depuis l'explosion. Ces observations directes constituent, dit Russell, une confirmation des plus nettes de l'explication du déplacement des raies.

En se basant sur la largeur des bandes d'émission du spectre, on trouve une vitesse d'expansion telle qu'au bout de deux ans (juin 1920), le diamètre de la nébuleuse serait un peu plus de mille fois la distance du Soleil à la Terre ($\pi = 0'',0036$ environ), ce qui correspond à une distance de neuf cents années de lumière.

Au sujet de l'apparence visuelle présentée par la *Nova*, il est assez curieux de constater que, sans avoir pu observer un disque apparent mesurable, nous avons eu, en 1918, quelque temps après l'apparition de l'étoile nouvelle, l'intuition de l'existence de ce disque. Dans nos *Observations de Nova Aquilae effectuées en 1918*, nous disons (p. 15) :

« Plus d'une fois, j'ai eu l'impression que la *Nova* ne présentait pas l'aspect stellaire d'un point étincelant, mais avait plutôt une lumière terne, comme celle d'un disque planétaire. Souvent la répétition des observations laissait subsister un doute sur l'exactitude du résultat indiqué, alors que cette même incertitude ne se produisait pas ou beaucoup plus rarement pour les étoiles. »

Notamment, le 10 août (deux mois après l'apparition), nous notons : « D'une manière générale, l'aspect de la *Nova* n'est pas identique à celui des autres étoiles qui se présentent comme des points étincelants, tandis que la *Nova* semble avoir l'aspect

d'un disque »; et le 29 août : « *Nova* n'a pas l'aspect stellaire de θ et λ Aquilae. »

Ayant fait part de cette remarque à nos collègues de l'Observatoire, deux de ceux-ci, MM. Casteels et H. Vanderlinden, nous confirmèrent cette impression. Dans ses observations, le second note (*loc. cit.*, p. 24) : « Aux mois d'août et de septembre, l'aspect de la *Nova* semblait différer nettement de celui des étoiles voisines. La scintillation de ces dernières était plus marquée que celle de la *Nova*. »

L'étude des étoiles temporaires est particulièrement importante au point de vue de l'évolution stellaire; les idées qui ont été émises relativement à leur constitution sont dispersées dans des mémoires et des articles de revues, assez nombreux, mais qui souvent ne renferment que quelques lignes sur la question qui nous intéresse. C'est pourquoi nous avons cru utile de donner une liste bibliographique des travaux que nous avons pu réunir et consulter.

BIBLIOGRAPHIE.

- KLINKERFUES, W., Ueber den Lichtwechsel der Veränderlichen. (*Nachrichten von der K. Gesellschaft... zu Göttingen*, p. 6 [1865].)
- FAYE, H., Remarques sur les étoiles nouvelles et les étoiles variables. (*Comptes rendus Acad. Sc. de Paris*, **63**, pp. 196, 229 [1866].)
- LE VERRIER, Sur les étoiles nouvelles et les étoiles changeantes. (*Bull. Assoc. scient. de France*, juillet 1866, p. 233.)
- HUGGIUS, W. and MILLER, W.-A., On the spectrum of a New Star in Corona borealis. (*Proceedings of the Royal Society of London*, **15**, p. 146 [1866].)
- MAYER, J.-N., Ueber temporäre Finsterne. (*Wochenschrift für Astronomie, etc.* N. S., **10**, p. 17 [1867].)
- FLAMMARION, C., Théories des étoiles nouvelles. (*Études et lectures sur l'astronomie*, **2**, pp. 75, 80 [1869].)
- SIDGREAVES, W., Spectrum of Nova Aurigae. (*Memoirs of the R. Astron. Society*, **51**, p. 34 [1892].)
- LOCKYER, J.-N., Note on the spectrum of Nova Aurigae. (*Proceedings of the Royal Society of London*, **50**, p. 435 [1892].)
- BELOPOLSKY, Spectrum der Nova Aurigae. (*Mélanges mathém. et astron.*, **7**, p. 297. Saint-Petersbourg, 1892.)

- HUGGINS, W. and MRS. HUGGINS, On Nova Aurigae. (*Proceedings of the Royal Society of London*, **51**, p. 293 [1892].)
- SEELIGER, H., Ueber den neuen Stern im Sternbilde Auriga. (*Astron. Nachr.*, **130**, p. 393 = *Astronomy and Astrophysics*, **11**, p. 904 [1892].)
- VOGEL, H.-G., Ueber den neuen Stern im Fuhrmann. (*Mathem. Abhandlungen der K. Akad. der Wissenschaften zu Berlin* [1893], p. 47 = *Astronomy and Astrophysics*, **12**, p. 896 [1893], **13**, pp. 48, 136 [1894].)
- SEELIGER, H., Ueber den neuen Stern im Fuhrmann (T Aurigae). (*Astron. Nachr.*, **133**, p. 305 [1893] = *Astronomy and Astrophysics*, **13**, p. 142 [1894].)
- PICKERING, W.-H., A study of Nova Aurigae and Nova Normae. (*Astronomy and Astrophysics*, **13**, p. 201 [1894].)
- WILSING, J., Ueber die Deutung des typischen Spectrums der neuen Sterne. (*Sitzungsberichte der K. preuss. Akad. der Wissenschaften zu Berlin* [1899], p. 426.)
- WILSING, J., Ueber eine physikalische Erklärung des Doppelspectrums der neuen Sterne. (*Astron. Nachr.*, **151**, p. 33 = *Astrophysical Journal*, **10**, p. 113 [1899].)
- WILSING, J., Ueber den Einfluss des Drucks auf die Wellenlängen der Linien der Wasserstoffspectrum. (*Sitzungsberichte der K. preuss. Akad. der Wissenschaften zu Berlin* [1899].)
- SEELIGER, H., Bemerkungen über die neuen Sterne. (*Astron. Nachr.*, **150**, p. 377 [1899].)
- JANSSEN, J., Sur la nouvelle étoile apparue récemment dans la constellation de Persée. (*Comptes rendus Acad. Sc. de Paris*, **132**, p. 505 [1901].)
- CORTIE, A.-L., New Stars, *Knowledge*, **24**, p. 130 [1901].)
- PICKERING, W.-H., Nova Persei. (*Astrophysical Journal*, **13**, p. 277 [1901].)
- DESLANDRES, H., La nouvelle étoile de Persée. (*Bull. Soc. astron. de France*, **15**, p. 168 [1901].)
- CLERKE, Miss A.-M., The spectrum of Nova Persei. (*The Observatory*, **24**, p. 335 [1901].)
- HALM, J., On the Theory of temporary Stars. (*Nature*, **64**, p. 253 [1901].)
- LOCKYER, N., The photographs of Nova Persei. (*Nature*, **65**, p. 134 [1901].)
- KAPTEYN, J.-C., Ueber die Bewegung der Nebel in der Umgebung von Nova Persei. (*Astron. Nachr.*, **157**, p. 201 [1901].)
- WILSING, J., Versuch einer Erklärung der Entstehung und der Bewegung der Nebelhülle, welche die Nova Persei umgiebt. (*Astron. Nachr.*, **157**, p. 345 [1902]. — **159**, p. 39 [1902].)
- HALM, J., Bemerkung zu dem Aufsätze « Versuch... ». (*Astron. Nachr.*, **158**, p. 343 [1902].)
- SEELIGER, H., Bemerkung über den neuen Stern in Perseus. (*Astron. Nachr.*, **157**, p. 255 [1902].)
- PICKERING, W.-H., The explosion hypothesis on the light of recent phenomena of Nova Persei. (*Astrophysical Journal*, **15**, p. 68 [1902].)

- VERY, The Nebula about Nova Persei. (*Amer. Journal of Science*, **16**, p. 49 = *Astron. Nachr.*, **158**, p. 33 [1902].)
- BELL, L., Note on the nebula surrounding Nova Persei. (*Astrophysical Journal*, **16**, p. 38 [1902].)
- SEELIGER, H., The Nebulae in the vicinity of Nova Persei. (*Astrophysical Journal*, **16**, p. 187 [1902].)
- ARRHENIUS, S., L'évolution des mondes (1907). (Édition française [1910], pp. 169-174.)
- DESLANDRES, H., Rapprochement entre les étoiles temporaires et le Soleil. Explication simple des étoiles temporaires. (*Comptes rendus de l'Acad. Sc. de Paris*, **154**, p. 1321 [1912].)
- KAYSER, H., Ein Versuch zur Erklärung der Neuen Sternen durch radioaktive Prozesse. (*Astron. Nachr.*, **191**, p. 421 [1912].)
-

PRÉHISTOIRE. — Sur la faune des Mammifères de l'époque de la Pierre polie en Belgique,

par A. RUTOT, membre de la Classe.

Depuis l'année 1840, date à laquelle remonte la découverte de l'énorme amas d'éclats de silex qui recouvre une vaste étendue, principalement à l'est du village de Spiennes, entre cette localité et Harmignies, jusqu'à nos jours, cette station préhistorique n'a cessé d'attirer l'attention des chercheurs et de fournir d'importants matériaux dont l'accumulation nous permet actuellement de reconstituer la préhistoire de cette région privilégiée pendant la période néolithique.

C'est en 1860 que le monde savant fut, pour la première fois, informé de la présence, à la surface du sol, à Spiennes, d'énormes amas d'éclats de silex, parmi lesquels on remarquait des instruments taillés intentionnellement en forme de hache et de hachette, des objets semblables polis et des blocs, nombreux, d'où avaient été détachés, par percussion, des éclats et des lames.

A cette époque, M. le prof^r L. de Koninck communiqua à la Classe des sciences de l'Académie royale de Belgique le contenu d'une lettre que lui avait écrite M. Albert Toilliez, ingénieur au

corps des Mines, dans laquelle il signalait, reposant sur le limon quaternaire, l'existence d'un vaste atelier de fabrication de haches en silex, s'étendant sur plus de cinquante hectares.

Lorsque M. Toilliez mourut en 1865, il laissait une belle collection de pièces qu'il avait recueillies sur le « Camp à Cayaux » de Spiennes, collection qui fut acquise par sir John Evans.

De temps à autre, des affaissements locaux de la surface du gisement se produisant, Toilliez voulut se rendre compte de leur cause et c'est ainsi que l'on constata, en sous-sol, l'existence de travaux souterrains, puits et galeries creusés en pleine craie à silex et qui furent, avec raison, attribués à l'homme qui avait fabriqué les instruments de silex.

La trouvaille de quelques pics en bois de cerf, au fond de ces antiques travaux de mineurs, vint confirmer cette hypothèse.

Lorsqu'en 1867 les travaux du chemin de fer de Mons à Binche furent entamés, il fallut établir, entre Hyon-Ciply et Spiennes, deux longues et profondes tranchées dites Tranchée de Mesvin et Tranchée de Spiennes, qui fournirent aux géologues F.-L. Cornet et A. Briart l'occasion d'étudier de belles coupes de terrains et notamment celles d'âge quaternaire.

De nombreux silex portant des traces plus ou moins évidentes de travail humain furent recueillis à la base des couches quaternaires, paraissant mêlés à des ossements d'espèces éteintes (Mammouth, *Rhinoceros tichorhinus*, Renne, etc.), mais la science n'était pas encore assez avancée pour qu'une étude fructueuse de ces matériaux pût être entreprise; il en fut question au Congrès international d'Anthropologie et d'Archéologie préhistoriques qui se tint à Bruxelles en 1872, puis la belle collection rassemblée par M. l'ingénieur Gustave Neyrinck dans les tranchées de Spiennes et de Mesvin fut léguée par lui au Musée royal d'Histoire naturelle de Bruxelles, où elle a été pieusement conservée.

Mais en même temps qu'elle livrait les secrets de la géologie

de la région, l'extrémité orientale de la tranchée de Spiennes avait recoupé de nombreux travaux souterrains, puits et galeries, creusés par les mineurs néolithiques pour l'extraction des gros rognons de silex nécessaires à la fabrication de leurs outils et de leurs armes.

M. Aug. Houzeau de Lehay fut adjoint à MM. F.-L. Cornet et A. Briart pendant que M. G. Neyrinck continuait ses recherches assidues, et l'ensemble des fouilles permit de reconnaître, dans le remblai des anciens puits, quantité d'éclats et d'instruments taillés, en tout semblables à ceux de l'atelier situé sur l'autre rive de la Trouille, plus quelques ossements humains, des ossements d'animaux, des pics en bois de cerf et d'autres pics en silex ayant évidemment servi d'outils aux mineurs préhistoriques.

Des fragments de poterie très grossière étaient mélangés à ces débris, qui furent considérés comme déchets de cuisine.

Malheureusement ces restes, jugés alors peu intéressants, ne furent que très partiellement conservés et une faible quantité a pu parvenir jusqu'à nous; toutefois le souvenir nous en est resté grâce à la communication faite au Congrès de 1872 par F.-L. Cornet et A. Briart, intitulée : *Sur l'âge de la Pierre polie et les exploitations préhistoriques de silex dans la province de Hainaut*.

La célébrité qu'avait acquise le gisement de Spiennes parmi les préhistoriens du monde entier persista longtemps après la réunion du Congrès, puis elle s'éteignit peu à peu, bien que la station ait toujours été explorée par les préhistoriens belges; mais d'une part la tranchée de Spiennes s'était couverte de végétation et était devenue inaccessible, tandis qu'aucun travail de fouille véritable n'était entrepris, les recherches directes en surface continuant à rester assez fructueuses.

Mais les trouvailles de silex ne faisaient qu'augmenter le nombre des pièces sans jeter plus de lumière sur la race et les mœurs de l'humanité de l'époque.

Ce n'est guère que depuis 1910 que les directions des Musées royaux du Cinquantenaire et du Musée royal d'Histoire naturelle de Bruxelles, reconnaissant que, seules, de nouvelles fouilles pouvaient fournir une documentation complémentaire intéressante, se mirent, chacune de son côté, à entamer des travaux dans cette direction.

Pour ce qui concerne le Musée d'Histoire naturelle, c'est la découverte, en janvier 1911, de l'étrange sépulture d'un mineur de Spiennes ⁽¹⁾, qui donna l'idée d'activer les recherches et celles-ci commençaient à être de nouveau fructueuses, lorsque la guerre vint les arrêter; elles furent toutefois reprises immédiatement après l'armistice.

En 1913 et en 1914, un autre fait important s'était passé, c'était l'élargissement des tranchées de Mesvin et de Spiennes pour l'établissement d'une seconde voie.

Ce travail, que nous avons heureusement pu suivre, nous a permis de recueillir à la fois, et abondamment, des matériaux des niveaux quaternaires paléolithiques et d'autres provenant des puits et galeries d'exploitation, recoupés à nouveau par les terrassements.

En même temps une exploration en profondeur du *Camp à Cayaux* avait repris et nous fournissait de son côté une foule de données dont l'ensemble constitue, actuellement, une documentation d'un véritable intérêt scientifique.

Outre une énorme quantité de silex taillés, percuteurs, nuclei à éclats et à lames, couteaux, racloirs, grattoirs, perçoirs, pierres de jet, haches et hachettes, tranchets, ciseaux, rares pointes de flèches, etc., les travaux d'extraction du silex par puits et par galeries rencontrés tant dans la tranchée de Spiennes qu'au *Camp à Cayaux*, les fonds de cabanes, les dépressions limitant des ateliers de taille du silex, nous ont

(1) Voir A. RUTOT, *Découverte d'un nouveau mineur néolithique à Obourg*. (BULL. SOC. BELGE DE GÉOLOGIE, t. XXVII, 1913.)

permis de recueillir, en assez grande quantité, des amas d'ossements d'animaux, les uns entiers, les autres brisés intentionnellement, mêlés à de la poterie grossière, à des *Helix* et à des *Cyclostomes* nombreux, avec fragments de charbon de bois et, parfois, plaquettes de terre cuite.

Il est facile de constater que presque tous les ossements sont des débris de nourriture, et dès lors, il nous a paru intéressant et même utile de savoir quels animaux étaient représentés par ces ossements, vu qu'ils pouvaient nous donner une idée exacte au sujet de la nourriture de nos populations néolithiques à l'âge de la Pierre polie.

Un premier triage nous a permis tout d'abord de reconnaître, parmi les débris proprement dits, une série d'instruments en os, souvent brisés, qui sont des poinçons, des lissoirs, des ciseaux et des pics de mineurs, en bois de cerf.

Ensuite, la détermination des débris de nourriture, effectuée par les soins de notre collègue M. Dollo, nous a permis de dresser la liste suivante :

<i>Talpa europæa</i> , r.	<i>Lepus timidus</i> , r.
<i>Ursus ferox</i> , rr ⁽¹⁾ .	— <i>cuniculus</i> , r.
<i>Meles taxus</i> , r.	<i>Sus scrofa</i> , cc.
<i>Fætorius putorius</i> , r.	<i>Cervus elaphus</i> , c.
<i>Canis familiaris</i> , r.	— <i>alces</i> , rr.
— <i>vulpes</i> , r.	— <i>capreolus</i> .
<i>Felis catus</i> , r.	<i>Rangifer tarandus</i> , rr.
<i>Myoxus glis</i> , r.	<i>Capra egagrus</i> , c.
<i>Mus sylvatica</i> , r.	— <i>hircus</i> r.
<i>Arvicola amphibius</i> , r.	<i>Ovis aries</i> ? c.
<i>Cricetus frumentarius</i> , r.	<i>Bos taurus</i> , cc.
<i>Lagomys pusillus</i> , r.	Oiseaux, r.

Donc l'Ours gris, le Putois, le Renard, le Chat sauvage, le Lièvre, le Lapin, le Sanglier, le Cerf, l'Élan, le Renne, la Chèvre égarre, la Chèvre commune, le Mouton, le Bœuf et des

(1) rr signifie très rare; r = rare; c = commun; cc = très commun.

Oiseaux sont représentés parmi les débris de nourriture des mineurs néolithiques d'Obourg, dont quatre formes abondantes : le Sanglier, le Cerf, la Chèvre égagre et le Bœuf. Les autres espèces citées sont généralement rares ou très rares et ne figurent sans doute qu'exceptionnellement parmi les débris.

Certains noms cités provoquent l'étonnement ; l'absence d'autres, tels que le Cheval, semble non moins étrange ; c'est pourquoi il n'est pas inutile de revenir au sujet de la présence de quelques espèces.

En première ligne l'*Ursus ferox* semble détonner sur une liste de la faune des temps modernes pour la Belgique.

L'*Ursus ferox* est assimilé à l'Ours du Nord de l'Amérique, mais est déjà cité dans la faune quaternaire de nos régions, depuis l'époque moustérienne, quoique toujours signalé comme rare. On a cru qu'il s'était retiré de l'Europe occidentale à la fin des temps quaternaires ; la découverte d'os lui appartenant, parmi les déchets de cuisine de Spiennes, semble démontrer, au contraire, que l'on pouvait en rencontrer encore dans nos forêts à l'époque de la Pierre polie.

Un autre animal dont le nom peut paraître étrange dans la liste des ossements de Spiennes est le *Cervus alces* ou Élan ; mais il faut noter, d'abord, qu'il vivait assez largement en Belgique pendant l'époque des Cavernes et qu'il a continué à prospérer en Europe centrale pendant la partie de l'époque moderne, comprenant le Néolithique, l'âge du Bronze, du Fer et le Moyen Age.

Il existait encore en Poméranie, au XVI^e siècle, en Silésie au XVIII^e, et il vit actuellement en Scandinavie, en Russie et dans l'Asie septentrionale.

L'Élan est signalé dans la liste des animaux dont les débris ont été recueillis dans les couches néolithiques des Palaffites de Suisse et des Kjökkenmödingen du Danemark.

Il n'est donc pas vraiment étonnant qu'il ait existé dans les forêts de Belgique à l'époque spiennienne.

Mais un nom qui détonne à juste titre sur la liste de Spiennes est le *Rangifer tarandus* ou Renne.

A mon avis, ce nom devra être rayé de la liste, car l'animal n'est représenté que par un fragment de bois fourchu et il existe les plus grandes probabilités pour qu'il ne soit autre chose qu'un reste d'un bois plus complet rencontré à la base du limon quaternaire, lors des travaux de puits ou d'excavations pour l'établissement de cabanes mi-souterraines, effectués par les mineurs néolithiques.

En effet, dans la coupe de la tranchée de Spiennes, la base caillouteuse des Ergerons renferme l'industrie moustérienne, accompagnée de débris de Mammouth, de Rhinocéros, de Renne, de Chevaux, etc.

Les Néolithiques ont tant excavé la terre de leur vaste atelier qu'ils n'ont pas manqué de rencontrer des ossements d'animaux quaternaires, et le Renne est un de ceux qui ont dû se présenter le plus fréquemment.

Il est, de plus, à remarquer que les débris osseux rencontrés à la base des limons sont blancs comme ceux des débris de cuisine; aussi, pour des restes tels que des bois de Cervidés, il serait difficile de juger, à l'examen, de l'âge exact d'un fragment donné.

Je crois donc que la prudence impose la nécessité de ne pas considérer le Renne comme contemporain de nos Néolithiques.

Il est vrai que la même réserve pourrait être formulée pour l'*Ursus ferox*, mais la rareté des débris de cet animal aux temps quaternaires tend à faire accepter encore sa présence, quoique avec doute, dans la liste des contemporains des hommes de Spiennes.

Capra egagrus ou Chèvre égagre est un autre animal qu'on ne s'attend pas à trouver dans la liste de nos temps modernes; il est toutefois à remarquer qu'elle vit encore dans les régions montagneuses comprises entre la mer Méditerranée et la mer

Caspienne, et qu'elle s'est largement développée en Europe occidentale pendant tout le Quaternaire supérieur.

Il ne peut donc être question que d'un recul vers l'Orient de cette espèce, les temps néolithiques s'étant écoulés pendant les premières phases de ce recul.

L'abondance relative, à Spiennes, des débris de la Chèvre égagre ne permet pas de croire à une origine fossile plus ancienne, comme pour ce qui concerne le Renne.

Spiennes nous a fourni aussi des restes d'une autre Chèvre qui n'ont pu être déterminés; il est hautement vraisemblable qu'il est question de *Capra hircus* ou Chèvre ordinaire, citée dans des listes d'animaux du même âge, ainsi que nous le verrons ci-après.

Enfin, un animal sur lequel il est utile de dire quelques mots est celui déterminé comme. *Ovis aries*? ou Mouton.

La présence du Mouton sur la liste n'implique nullement celle du Mouton domestique. Jusqu'à présent, les paléontologues se sont trouvés fort embarrassés pour distinguer nettement les variétés d'*Ovis* rencontrées dans nos régions depuis les temps quaternaires.

Beaucoup sont d'avis qu'il s'agit ici du Mouflon qui, actuellement, ne se retrouve plus vivant qu'en Corse et en Sardaigne. Nous aurons l'occasion de reparler plus loin de ce sujet.

Afin de rendre le présent travail aussi complet que possible, nous avons pris connaissance des trouvailles analogues faites par nos collègues des Musées royaux du Cinquantenaire, dans la même station de Spiennes.

Dans des fonds de cabanes voisines de celles que nous avons fouillées, le baron A. de Loë a recueilli :

Sus scrofa.

Cervus elaphus.

— *capreolus.*

Capra hircus.

Bos taurus.

Parmi ces animaux, il en est un que nous ne trouvons pas dans notre liste, c'est *Cervus capreolus* ou le Chevreuil.

Cette absence est due à un pur hasard, car le Chevreuil fait, de droit, partie de la faune belge, vu que nous l'y trouvons depuis le Quaternaire jusqu'à nos jours.

Pour ce qui concerne *Sus scrofa*, M. L. de Pauw, qui a effectué la détermination des ossements, déclare y avoir reconnu la variété sauvage, le Sanglier et la variété domestiquée, le Cochon; parmi les nombreux restes que nous possédons de Spiennes, pareille distinction ne semble pas avoir pu être faite.

Si nous nous sommes étonné de voir figurer sur notre liste certains animaux tels que l'*Ursus ferox*, l'Élan, le Renne et la Chèvre égagre, nous ne sommes pas moins surpris de n'y voir pas inscrits *Canis familiaris*, le Chien, et *Equus caballus* ou le Cheval.

Pour ce qui concerne le Chien, il n'y a qu'absence accidentelle, car ce compagnon de l'homme accompagne l'un des mineurs néolithiques de Strépy et son nom est indiqué nettement sur des listes contemporaines de l'époque de la Pierre polie. Nous n'avons donc qu'à ajouter *Canis familiaris* à la liste des animaux de Spiennes.

En ce qui concerne le Cheval, la question est différente car, bien que très abondant pendant tout le Quaternaire, dans nos régions, et très développé depuis l'âge des Métaux jusqu'aux temps actuels, il paraît faire entièrement défaut en Belgique, pendant tout le Néolithique.

Pour m'en assurer j'ai non seulement compulsé les listes des trouvailles faites dans les tourbes de l'époque moderne, mais je me suis aussi efforcé de reconstituer la faune de l'Azilien, le dernier terme de la série paléolithique, précédant ainsi directement l'époque néolithique.

Voici la liste des mammifères cités dans les publications et

collections comme ayant été recueillis dans la tourbe moderne de la Belgique et du Nord de la France :

Ursus arctos (ours brun).
Mustela vulgaris (belette).
Fœtorius putorius (putois).
Lutra vulgaris (loutre).
Canis familiaris (chien).
Canis vulpes (renard).
Canis lupus (loup).
Castor fiber (castor).

Sus scrofa (sanglier et cochon).
Cervus elaphus (cerf).
Cervus capreolus (chevreuil).
Capra hircus (chèvre).
Equus caballus (cheval de petite taille).
Bos primigenius (urus de petite taille).
Bos taurus (bœuf).
Ovis aries? (mouton ou béliet).

Cette liste ne diffère guère de celle de Spiennes, que nous avons donnée ci-dessus, mais, outre le Chien, elle comprend également le Cheval, accompagné généralement de la mention : de petite taille.

D'après cette liste, on pourrait croire que le Cheval fait partie de la faune néolithique, mais il n'en est rien, car chaque fois que des détails sont donnés, on remarque toujours que les débris de chevaux proviennent du sommet de la tourbe, là où elle renferme des objets en métal, bronze ou fer.

On se rappellera, en effet, que la tourbe, d'après les trouvailles qu'on y a faites, a commencé à se former vers le milieu de l'époque néolithique, un peu avant l'âge de la Pierre polie, et qu'elle a continué à se déposer, sans interruption, jusqu'à la fin du III^e siècle de notre ère. Elle correspond donc à la seconde moitié du Néolithique, les âges du Bronze et du Fer et les époques gauloise et belgo-romaine, jusqu'aux premières incursions des Franks.

Une trouvaille d'ossements faite dans la tourbe n'a donc de valeur chronologique précise que si l'on connaît sa position dans la masse tourbeuse, et les archéologues savent très bien qu'au moins le tiers supérieur de l'épaisseur de la tourbe ne renferme que des objets attribuables à l'âge du Métal.

Or, tel est le cas pour toutes les découvertes bien constatées d'ossements de Cheval dans la tourbe.

D'autre part, il n'y a pas à s'étonner de la présence, à toute

profondeur dans la tourbe, de la Belette, de la Loutre, du Castor, du Loup, tous animaux qui vivaient déjà dans notre pays pendant l'époque quaternaire et dont la plupart existent encore de nos jours.

D'autre part, l'Azilien des Cavernes de la Belgique (Montaigle : Trous du Chêne et du Sureau et Grotte de Remouchamps) nous a fourni la liste suivante :

Faune de l'Azilien de Belgique.

<i>Talpa europæa.</i>	<i>Cricetus frumentarius.</i>
<i>Ursus spelæus</i> (R).	<i>Lagomys?</i>
<i>Meles taxus.</i>	<i>Myodes?</i>
<i>Mustela foina.</i>	<i>Sorex vulgaris.</i>
— <i>vulgaris.</i>	<i>Crossopus fodians.</i>
— <i>erminea.</i>	<i>Castor fiber.</i>
<i>Fætorius putorius.</i>	<i>Lepus timidus.</i>
<i>Canis familiaris</i> (R).	<i>Sus scrofa.</i>
— <i>lupus.</i>	<i>Equus caballus</i> (R).
— <i>vulpes.</i>	<i>Cervus elaphus.</i>
— <i>lagopus.</i>	— <i>capreolus.</i>
<i>Sciurus vulgaris.</i>	— <i>tarandus</i> (R).
<i>Arctomys marmotta.</i>	<i>Capra.</i>
<i>Arvicola amphibius.</i>	<i>Box primigenius.</i>
— <i>agrestis.</i>	<i>Ovis aries?</i>

Cette liste suggère les remarques suivantes :

D'abord on y voit figurer les dernières espèces froides : *Ursus spelæus*, *Canis lagopus*, *Arctomys marmotta*, *Lagomys*, *Myodes* et *Cervus tarandus*, avec la mention « rare » pour l'Ours des Cavernes et le Renne.

La fin de l'époque quaternaire correspond donc bien avec l'émigration des animaux de climat froid.

Nous voyons indiqué aussi *Ovis aries?* qui existait déjà à l'époque moustérienne dans le Trou de la Naulette, à l'Aurignacien moyen dans la Caverne de Spy, et dans le Magdalénien supérieur au Trou de Chaleux.

Certes, dans ces cavernes, l'*Ovis aries* ne répond en rien à un animal domestique, pas plus que dans l'Azilien du Trou du Sureau à Montaigle.

Les ossements de Spiennes ne semblent différer en rien des précédents, de sorte qu'il ne s'impose pas que l'*Ovis* de Spiennes soit un animal domestique.

Enfin, après une pullulation extraordinaire du Cheval pendant toute l'époque des Cavernes, nous le voyons signalé dans l'Azilien avec la mention « rare ». Dans les cavernes et aux niveaux précis où ses débris sont signalés, il ne peut y avoir de doute que le Cheval fut contemporain des hommes de la petite race de Furfooz qui ont apparu dans nos régions à l'extrême fin du Magdalénien, mais à l'état de rareté, le seul animal abondant à cette époque étant le Cerf élaphe.

Donc la disparition rapide du Cheval dans la région franco-belge pendant la fin du Paléolithique supérieur paraît un fait démontré, de même que sa réintroduction lors des premières invasions de peuples orientaux qui nous ont apporté la connaissance du métal bronze.

L'étude de la fin de la période néolithique dans notre pays nous a montré que les habitants des « fonds de cabanes de la Hesbaye », que j'ai dénommés *Omaliens*, constituent la première vague de peuples orientaux, précédant immédiatement celle qui nous ont apporté le métal, et qui ont introduit chez nous, en pleine barbarie de la Pierre polie, tous les éléments des premières civilisations véritables.

Ce sont vraisemblablement ces *Omaliens* qui, dépourvus d'armes, ont largement pénétré paisiblement au milieu de nos populations armées et guerrières, en la dotant de la culture du blé, du tissage des étoffes, des chariots tirés par des chevaux, ceux signalés comme datant du sommet de la tourbe et par conséquent des premiers âges du Métal étant toujours indiqués comme étant de « petites race », alors que nos chevaux quaternaires étaient généralement de grande taille.

Des mêmes populations orientales datent sans doute aussi l'usage des canots en troncs d'arbres évidés, de tels canots ne

semblant pas exister à l'époque spiennienne supérieure à la Pierre polie, avant-dernier terme du Néolithique de nos régions.

Quant à l'introduction de la culture intensive du blé par les Omaliens, elle est péremptoirement prouvée, d'une part, par la présence de lames de fauciles en silex, polies par l'usage, en tout identiques aux garnitures de fauciles à armature en bois découvertes en Égypte, Palestine, etc.; et d'autre part, par les nombreuses empreintes de grains de blé reconnues dans les poteries rencontrées dans les fonds de cabanes de la Hesbaye.

Il suit de l'enquête à laquelle je me suis livré à l'occasion de la détermination des ossements d'animaux découverts dans le gisement néolithique de Spiennes, quelques conclusions qui peuvent se résumer comme suit :

1° Au premier stade de la Pierre polie, correspondant au Spiennien supérieur, la faune de mammifères jusqu'ici connue comprend, à l'exclusion du Renne, fort douteux :

Talpa europæa (taupe).
Ursus ferox? (ours gris).
— *arctos* (ours brun).
Mustela vulgaris (loutre).
Meles taxus (blaireau).
Fœtorius putorius (putois).
Lutra vulgaris (loutre).
Canis familiaris (chien).
— *vulpes* (renard).
— *lupus* (loup).
Myoxus glis (loir).
Mus sylvaticus (mulot).
Arvicola amphibius (rat d'eau).

Cricetus frumentarius (hamster).
Lagomys pusillus (lagomys nain).
Castor fiber (castor).
Sus scrofa (sanglier).
Cervus elaphus (cerf).
— *capreolus* (chevreuil).
— *alces* (élan).
Capra hircus (chèvre).
— *egagrus* (chèvre égagre).
Bos primigenius (urus).
— *taurus* (bœuf).
Ovis aries (mouton, mouflon ou béliet).

Or, à part le Chien, sans doute exclusivement utilisé à la chasse, tous les autres animaux cités sont sauvages, y compris *Ovis aries* et les Bœufs, déjà connus à l'époque des cavernes; un léger doute pourrait subsister pour la Chèvre.

Malgré leur armement et certains autres détails comme le respect des morts (incinération avec bris des armes, d'une part, inhumation dans les cavernes, d'autre part), nous devons consi-

dérer nos premières populations de la Pierre polie, antérieures à l'arrivée des Omaliens, comme des barbares sauvages, sans agriculture ni domestication d'animaux utiles, vivant principalement de chasse et présentant encore, dans les mœurs, beaucoup des caractères des habitants de l'époque des Cavernes; bon nombre d'os longs ayant été fendus pour en extraire la moelle, avec dépeçage sur place du gibier et apport au campement des pièces de choix, telles que la tête ou les membres, comportant l'abandon en forêt de la carcasse (côtes, vertèbres, queue, etc.). L'animal le plus recherché est le Sanglier, puis le Cerf, dont on utilise aussi intensivement la ramure; ensuite viennent le Bœuf, le Chevreuil, la Chèvre et le Mouton. Le Chien est rare.

2° Quelques animaux que l'on ne s'attendait pas à trouver, tels que l'Ours gris (maintenu sur la liste avec doute), et l'Élan, se rencontrent encore sporadiquement, alors qu'ils abandonnaient définitivement le pays.

En revanche, l'Ours brun, quoique rare, devait encore habiter nos régions à cette époque.

3° Le Cheval semble bien avoir complètement déserté la Belgique pendant toute l'époque néolithique; nous le voyons disparaître dans l'Azilien, puis réapparaître avec l'âge du Métal et même probablement avec l'Omalien, terme ultime des temps néolithiques dans notre pays.

On peut, au sujet de la disparition du Cheval, émettre l'hypothèse que la deuxième et dernière grande vague de froid, qui correspond chez nous exactement avec le Magdalénien supérieur de Chaleux et de Furfooz et qui a permis un intense développement des rongeurs arctiques, a été fatale au Cheval, comme elle l'a été pour le Mammouth, le *Rhinoceros tichorhinus*, le Lion et le Grand Ours des Cavernes.

Alors qu'au Magdalénien avancé de Goyet, nous voyons tous ces animaux et des hommes de la race de Cro-Magnon occuper la région de la Meuse, dès la grande vague de froid arrivée, Homme, Mammouth, Rhinocéros, Lion et Ours disparaissent,

tandis que le Renne, le Renard polaire, le Glouton, le Chamois et l'Antilope saïga persistent.

Or, il ne semble pas que les animaux disparus aient émigré ; ils paraissent avoir été exterminés soit par le froid, soit par manque de nourriture, et bien que le Cheval ait persisté jusque dans l'Azilien, il est vraisemblable que la race avait reçu un coup fatal, qui a amené l'extinction, alors qu'un climat plus favorable allait enfin s'établir.

Je suis d'avis que la dernière vague de froid arctique est survenue assez brusquement, que les habitants des cavernes ont rapidement émigré vers le Sud, puis que les petits hommes de Furfooz sont venus occuper le pays désert, en même temps que quelques Cro-Magnons y revenaient aussi.

Je considère comme vraisemblable que, précédemment, les hommes de Furfooz habitaient la grande plaine occupée de nos jours par la mer du Nord, car la géologie nous démontre que c'est vers la fin des temps paléolithiques que l'affaissement du sol qui a produit l'invasion marine accompagnée de la formation du Pas-de-Calais et de la Manche s'est effectué.

C'est l'extension maximum de ce phénomène géologique qui nous a sans doute valu, au commencement du Néolithique, l'invasion des peuplades barbares flénusiennes, à industrie identique à celle des Pré-Chelléens et qui, établies sur notre sol, y ont progressé assez rapidement jusqu'à parvenir au polissage de la Pierre.

La découverte à Spiennes de deux squelettes humains attribuables à des Flénusiens fait prévoir que ces hommes sont bien les ancêtres des Spienniens, dont nous possédons également un squelette.

Pour terminer, j'ajouterai que j'ai compulsé les principales publications françaises traitant des ateliers et sépultures néolithiques de toutes les régions de la France et j'y ai reconnu, comme pour ce qui concerne le Nord, que quand le Cheval est cité, il est toujours question d'un Néolithique très avancé, voisin

ou se confondant avec la première apparition du Métal. Pour ce qui en est de l'époque du Bronze, le Cheval est toujours cité, sur les listes publiées, avec les animaux domestiqués comme le Cochon, le Bœuf et le Mouton, signalés comme abondants.

Enfin, je rappellerai ici l'opinion de M. J. Déchelette, exprimée dans le premier volume de son *Manuel d'Archéologie préhistorique* :

Parlant de la domestication des animaux, l'éminent préhistorien français signale que le Cheval domestique n'apparaît pas dans les palafittes réputées les plus anciennes et qu'on ne le rencontre pas avant la fin du Néolithique. Il ajoute que cet animal manque presque totalement dans les villages lacustres de la Haute-Autriche et qu'une longue période a dû s'écouler entre la domestication du Chien et celle du Cheval.

M. Déchelette part de là pour contester un apport en bloc d'origine orientale des animaux domestiqués; mais les nouvelles recherches que j'ai entreprises semblent bien démontrer, au contraire, qu'à part le Chien, tout au moins l'idée de domestication des animaux autochtones est venue de l'Orient et que, notamment, il y a eu réintroduction du Cheval dans nos régions tout au commencement de l'âge du Métal. La culture systématique du blé date à peu près de la même époque, car elle concorde avec l'arrivée des Omaliens, introducteurs de la « Céramique à bandes ».

En somme, à l'âge de la Pierre polie, il est probable que le Chien et la Chèvre avaient pu subir un commencement de domestication de la part de nos populations autochtones.

CHIMIE. — Sur quelques propriétés physiques de l'hydrogène telluré,

par P. BRUYLANTS, professeur à l'Université de Louvain (*).

Le procédé le plus pratique de préparation de l'hydrogène telluré est, à mon avis, le procédé électrolytique. (Méthode d'Ernyei.)

J'ai modifié légèrement le procédé précédemment décrit en collaboration avec M. Michielsen (**), en substituant au procédé à diaphragme le procédé à la cloche. La cathode de tellure est placée sous la cloche, tube en verre de 15 millimètres de diamètre raccordé à l'appareil à distillation : la cloche et la cathode plongent dans une solution d'acide sulfurique à 15 % en volume, contenue dans un tube de 35 millimètres de diamètre, formant le compartiment anodique.

On électrolyse avec une anode de platine, sous 50 volts environ, tout le système à cloche étant immergé dans un bain réfrigérant, grand Dewar, où l'on maintient une température de -15° environ ; le compartiment cathodique est nécessairement à une température plus élevée.

L'hydrogène telluré formé est entraîné avec hydrogène ; le mélange gazeux est desséché sur du tellure d'aluminium, puis sur de l'anhydride phosphorique. On condense ensuite le gaz suivant la technique ordinaire et on le purifie par distillation et sublimation.

Le produit purifié m'a servi à la détermination de la tension de sublimation et de la tension de vapeur à différentes températures, de la densité liquide à 0° et de la densité de la vapeur saturée à 0° .

(*) Présenté par MM. Swarts et de Hemptinne.

(**) *Bull. Acad. de Belgique*, pp. 119-130, 1919.

Il n'est évidemment pas question ici de mesures de précision ; l'hydrogène telluré, en raison de son instabilité, même aux basses températures, ne s'y prête pas.

Pour la mesure de la tension de vapeur, je me suis servi d'un appareil très simple : une ampoule de l'appareil distillatoire est reliée à un manomètre accolé à une échelle millimétrique ; cette ampoule est plongée dans un Dewar, servant de bain thermostatique, muni d'un agitateur et d'un thermomètre à pentane contrôlé.

Toute la mesure a été effectuée très rapidement, en quatre heures environ : après avoir pris trois points, je replongeais l'ampoule dans un Dewar de neige carbonique et je faisais le vide en laissant distiller une petite quantité du produit de façon à éliminer l'hydrogène s'il s'en était formé ; après la mesure, le liquide n'était pas sensiblement altéré, et ce n'est que dans le manomètre que j'ai constaté un léger dépôt de tellure.

Le tableau suivant donne les résultats de ces mesures ; la pression y est ramenée à 0°.

t	p à 0°
- 60°	34 ^{mm}
- 58°5	42
- 56°	50
- 52°	67
- 50°	79
- 45°4	102 (point triple).
- 44°	112
- 41°	133
- 40°	139
- 37°5	162
- 35°	180
- 32°6	205
- 30	234
- 27°5	260
- 25°5	289
- 23°	323

t	p à 0°
- 20°	370
- $17^{\circ}5$	409
- 15°	447
- $12^{\circ}5$	501
- 10°	555
- $7^{\circ}5$	618
- 5°	682
[- 5°]	[683]
[- 4°]	[710]
[- $2^{\circ}8$]	[744]
[- $1^{\circ}8$]	[774]
- $1^{\circ}3$	776
0°	808
[0°]	[829]

Le point triple a donc les coordonnées suivantes :

$$t = - 45^{\circ}4$$

$$p = 102 \text{ mm. à } 0^{\circ}.$$

Les chiffres entre parenthèses se rapportent à la partie supérieure de la courbe corrigée par le procédé indiqué plus loin.

La densité liquide a été déterminée au moyen d'un petit picnomètre dilatomètre de 1 centimètre cube environ, muni d'un bon robinet, et que l'on fixe à la canalisation de l'appareil à distiller au moyen d'un joint conique; je trouve ainsi à 0° , par conséquent sous la pression de 808 millimètres environ, $d = 2,65$. D'après de Forcrand la densité liquide serait 2.57 à $- 20^{\circ}$.

La densité de la vapeur saturée a été déterminée de la façon suivante : une ampoule, dont le volume à 0° est $146^{\text{cc}},41$, munie d'un robinet, peut être fixée au moyen d'un joint rodé à la canalisation de l'appareil à distillation, au voisinage de l'ampoule renfermant le gaz liquéfié.

Après l'avoir rincée à l'hydrogène sec et y avoir fait un vide

très avancé, on l'entoure de glace fondante et on la met en communication avec l'ampoule contenant le gaz liquéfié que l'on maintient également à 0°.

On a fait deux mesures successives en laissant l'équilibre s'établir la première fois durant une heure, la seconde fois durant une heure et demie.

Les pesées ont été faites avec contrepoids.

Le poids de la vapeur saturée à 0° est dans la première expérience 0^{gr}9136, dans la seconde 0^{gr}9121, soit en moyenne 0^{gr}9128.

Le volume spécifique à 0° (sous 808 millimètres) est donc 16 centilitres environ, et approximativement à 0° et sous 760 millimètres, 17 centilitres, en appliquant la formule des gaz.

Il y a cependant une incertitude assez grande pour cette détermination, car je crois erronée la valeur de la pression correspondant à 0°.

J'ai comparé la courbe des tensions de vapeur à celle de différents composés et j'ai cherché à appliquer la règle de Ramsay-Young.

Le tableau suivant donne pour différentes pressions les températures absolues d'ébullition de l'alcool éthylique T_a et de l'hydrogène telluré T_b ainsi que le rapport $\frac{T_a}{T_b}$ et la valeur de la constante de l'expression de Ramsay-Young.

Le calcul du point d'ébullition sous la pression atmosphérique d'après la règle de Ramsay-Young donnerait, par exemple,

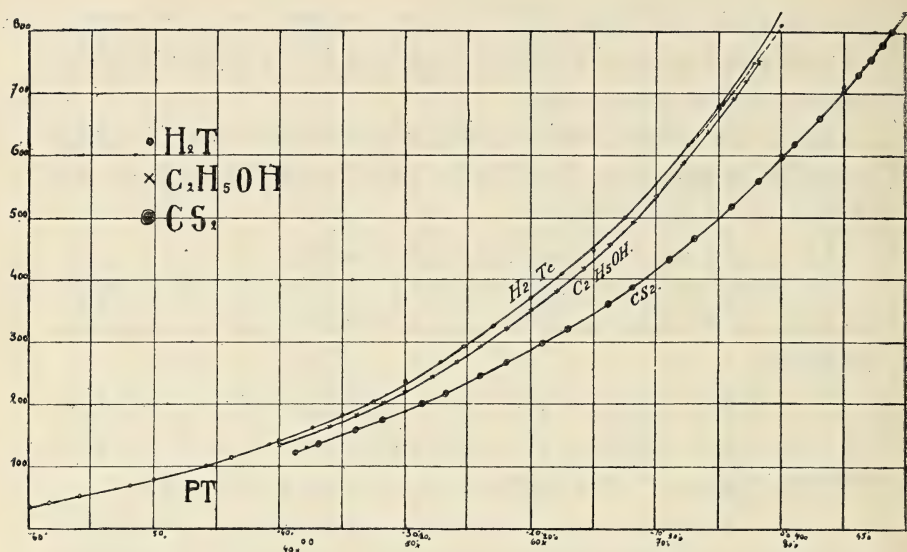
$$1,348 = \frac{351,26}{x} + 0,00134 [351,26 - 313]$$

$$x = 270,9;$$

d'où

$$t = -2,1,$$

alors que d'après mes déterminations cette température serait — 1,8.



Comparaison des courbes des tensions de vapeur de H_2T et de C^2H^5OH .

p	C^2H^5OH		H^2T		$\frac{T_a}{T_b}$	$C = \frac{\frac{T_a}{T_b} - \frac{T_{a'}}{T_{b'}}}{\frac{T_{a'}}{T_a} - 1}$
	t_a	T_a	t_b	T_b		
133.7	40	313	- 40,8	232,2	1.3480	
172.2	45	318	- 35,6	237,4	1.3395	0,00170
220.0	50	323	- 30,9	242,1	1.3341	0,00139
278.6	55	328	- 26,1	246,9	1.3285	0,00130
350.3	60	333	- 21,1	251,9	1.3220	0,00130
437.0	65	338	- 15,7	257,3	1.3136	0,00137
541.2	70	334	- 10,6	262,4	1.3071	0,00136
665.55	75	348	- 5,6	267,4	1.3014	0,00133
781.45	79	352	- 1	272	1.2941	0,00138

Comparaison des courbes des tensions de H²T et de CS².

p	CS ²		H ² T		$\frac{T_a}{T_b}$
	t_a	T_a	t_b	T_b	
127,9	0°	273	- 41°5	231,5	1,1793
167 15	6°	279	- 36°3	236,7	1 1787
198,45	10°	283	- 32°9	240,1	1,1787
234,4	14°	287	- 29°6	243,4	1,1791
275,4	18°	291	- 26°3	246,7	1,1796
322,1	22°	295	- 22°9	250,1	1,1795
374,95	26°	299	- 19°5	253,5	1,1795
434,6	30°	303	- 16°0	257,0	1,1790
501,65	34°	307	- 12°6	260,4	1 1790
576,75	38°	311	- 9°1	263,9	1,1785
660,5	42°	315	- 5°8	267,2	1,1789
753,75	46°	319	- 2°2	270,8	1,1780
804,1	48°	321	- 0°2	272,8	1,1767

La comparaison de la courbe des tensions de vapeur de H²T avec celle de l'alcool et celle du sulfure de carbone permet de faire les quelques remarques suivantes :

Au delà de 700 millimètres les déterminations sont certes entachées d'erreur; c'est ce que montre l'examen seul de la courbe; c'est ce que révèle encore la valeur du rapport $\frac{T_{CS^2}}{T_{H^2T}}$, qui décroît sensiblement à partir de ces pressions.

D'après mes déterminations le point d'ébullition sous la pression normale serait situé vers — 1,8.

Le calcul d'après la règle de Ramsay-Young, par rapport au sulfure de carbone, donne la valeur — 2,2.

C'est d'après les tensions de vapeur de CS² que j'ai corrigé

la partie supérieure de la courbe ; les chiffres entre parenthèses du tableau (*) se rapportent à la courbe corrigée. Dans le diagramme cette partie est tracée en pointillé.

Enfin il est assez curieux de remarquer que d'après la règle de Ramsay-Young, l'hydrogène telluré et le sulfure de carbone sont des substances chimiques analogues.

J'ai calculé la chaleur latente de vaporisation de l'hydrogène telluré à sa température d'ébullition sous la pression atmosphérique. En prenant comme température d'ébullition — 2,2, $\left(\frac{dp}{dt}\right)$, d'après la courbe corrigée, est 0,0393 atmosphère. En négligeant le volume moléculaire du liquide par rapport au volume moléculaire du gaz, calculé d'après la loi des gaz, on trouve

$$\lambda = 5,7 \text{ cal.}$$

Je rappellerai que de Forcrand (*) a calculé pour :

$$\text{H}^2\text{S} \quad \lambda = 4,23 \text{ cal.}$$

$$\text{H}^2\text{Se} \quad \lambda = 4,67 \text{ cal.}$$

La règle de Trouton s'applique bien à l'hydrogène telluré. On trouve

$$\frac{\lambda}{T} = 20,9.$$

En prenant pour valeur du rapport $\frac{T_a}{T_e}$ le chiffre 1.75, moyenne des valeurs expérimentales pour H_2O , H_2S , H_2Se , d'après la règle de Guldberg-Guye la température critique de l'hydrogène telluré serait au voisinage de 200'.

Les quelques déterminations expérimentales contenues dans ce travail avaient été faites en juillet 1914.

Les notes ont été détruites avec mon habitation en août 1914, lors de l'invasion allemande. Le travail a été repris en 1918.

Louvain, laboratoire de chimie générale de l'Université.

(*) *C. R.*, 134, 281. — *An. Ch. Ph.* (7) 26, 247.

CHIMIE. — Note sur la constitution du cyanure d'allyle,

par P. BRUYLANTS, Professeur à l'Université de Louvain (*).

La constitution du cyanure d'allyle a été souvent discutée.

Pour beaucoup d'auteurs, le produit de l'action du cyanure de potassium sur les éthers haloïdes allyliques serait le nitrile crotonique et non le nitrile vinyl-acétique.

On connaît à ce sujet les expériences anciennes de Kekulé (**). Palmer (***) a préparé le cyanure d'allyle à basse température et ce produit lui a donné un acide bibromocrotonique. Lippmann (IV) a préparé le cyanure d'allyle en tube scellé à 110° aux dépens du cyanure de potassium commercial et du bromure d'allyle; il a pu le transformer également en acide bibromocrotonique (acide α β dibromobutyrique).

Lespiun (V), au contraire, a obtenu par le procédé de Palmer un nitrile qu'il a transformé, pour sa majeure partie, en acide bibromovinyl-acétique et en acide vinyl-acétique.

Louis Henry, qui avait préparé le véritable nitrile crotonique par déshydratation du nitrile α oxybutyrique, avait cherché à obtenir le nitrile allylique ou vinyl-acétique par l'action des alcalis sur le nitrile γ chlorobutyrique; il obtint ainsi un produit décrit d'abord comme nitrile vinyl-acétique, mais qu'ultérieurement il reconnut être un de ses isomères, le nitrile cyclique triméthylénique (VI).

(*) Présenté par MM. Swarts et de Hemptinne.

(**) *D. ch. Gess.*, 6, 386.

(***) *Am. ch. J.*, 11, 89.

(IV) *Monatshefte* 12, 405.

(V) *Bull. Soc. chim.*, 3^e série, 33, 55.

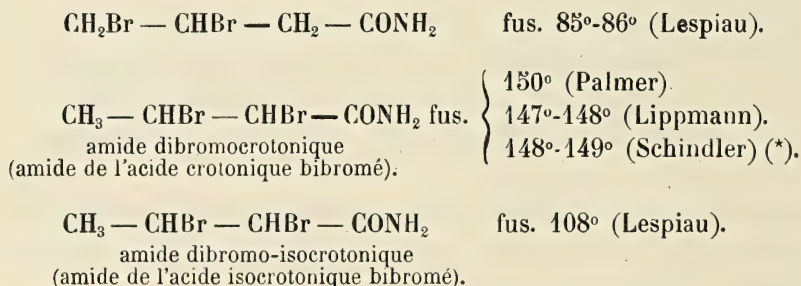
(VI) *Les Nitriles alcools*, p. 220.

J'ai été plus heureux que lui et j'ai pu obtenir ce nitrile vinyl-acétique aux dépens du nitrile γ chlorobutyrique. J'ai également préparé le nitrile aux dépens des dérivés allyliques, ainsi que le nitrile crotonique, aux dépens du nitrile α oxybutyrique, dans le but de les comparer au premier.

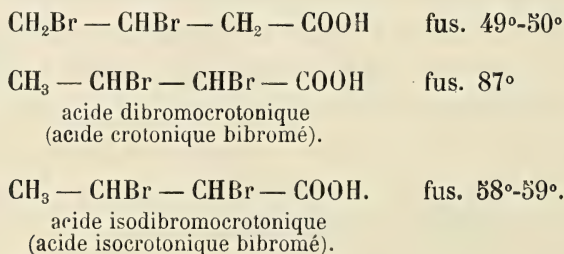
Les nitriles non saturés C_3H_5CN doivent exister sous trois variétés : le nitrile allylique ou nitrile vinyl-acétique, et le nitrile crotonique, sous ses deux formes géométriques, *cis* et *trans*.

L'identification de ces nitriles est aisée, notamment par leur transformation en amides bibromées correspondantes.

Les trois amides bibromées sont décrites :



Elles correspondent aux trois acides bibromobutyriques, produits d'addition du brome à l'acide vinyl-acétique et aux acides crotonique et isocrotonique.



(*) Monatshefte 12, 414.

*Préparation du nitrile non saturé aux dépens du nitrile
γ chlorobutyrique.*

L'action de la potasse caustique sèche fournit le nitrile cyclique triméthylénique. L'action de l'alcoolate sodique fournit le nitrile cyclique triméthylénique en mélange avec l'éther, le nitrile γ éthoxybutyrique.

La pyridine et la quinoléine se comportent d'une tout autre façon :

On fait à froid un mélange équimoléculaire de pyridine et de nitrile γ chloré; ce mélange parfaitement homogène est chauffé quarante-huit heures au bain de vapeur; il se sépare en deux couches, redevient homogène et finit par se solidifier intégralement. Soumis ensuite à la distillation sèche, il fournit, avec un rendement brut, de 85 % environ, un nitrile non saturé qui réagit intensément avec le brome.

Ce produit est lavé à l'acide sulfurique dilué et distillé sur de l'anhydride phosphorique; la presque totalité passe de 110° à 125°; après quelques rectifications, on recueille la plus grande partie de 114° à 116° sous la pression de 757 millimètres.

Dans cette opération, il ne se forme pas de nitrile cyclique.

Avec la quinoléine, la réaction se fait d'une façon analogue, mais les rendements sont beaucoup moins avantageux.

La densité de ce nitrile, $D_{20}^{20}/4$, est 0.8318.

Son indice de réfraction $N_{D_{20}}$ est 1.41438.

Son pouvoir réfringent moléculaire est 20,12, tandis que le calcul donne 20,02.

Ce nitrile est bien le nitrile vinyl-acétique; il donne les mêmes produits d'addition que ceux obtenus par Lespiau.

Ce nitrile, maintenu aux environs de 0°, a été traité par la quantité équimoléculaire de brome en solution chloroformique.

J'ai continué le traitement de ce produit comme l'indique Lespiau, par distillation dans le vide; les portions passant avant

100° sous 18 millimètres, et qui renferment des nitriles monobromés non saturés, n'ont cependant pas été rectifiées.

J'ai isolé ainsi un nitrile bibromé (éb. 133-135 sous 18 millimètres).

Il est identique au produit de Lespiau (éb. 138 sous 20 millimètres).

En effet, je l'ai dissous dans une solution d'acide bromhydrique saturée à 0°, et reprécipité après huit heures par addition de glace : le solide blanc obtenu après deux cristallisations dans le chloroforme bouillant donne des aiguilles soyeuses fus. à 80°; c'est l'amide bibromée décrite par Lespiau, qui correspond à l'acide bibromo-vinyl-acétique et aux dépens duquel Lespiau a obtenu l'acide vinyl-acétique.

Analyse : Br 65,4 %; N 5,8 %.

Lespiau a montré l'identité du nitrile bibromé ainsi obtenu avec celui qui résulte de l'action du tribromure de phosphore sur le nitrile $\text{CH}_2 \text{Br} - \text{CH OH} - \text{CH}_2 - \text{CN}$, et prouvé de cette façon la véritable constitution du nitrile $\text{C}_3 \text{H}_5 - \text{CN}$ d'origine allylique; l'obtention du même nitrile non saturé aux dépens d'un dérivé de substitution γ du nitrile butyrique vient confirmer cette structure.

L'existence du nitrile vinyl-acétique ne peut donc pas être mise en doute.

Préparation du nitrile crotonique.

Le véritable nitrile crotonique a été préparé par L. Henry (*), aux dépens du nitrile α oxybutyrique, et par Schindler (**), par déshydratation de l'aldoxime crotonique.

(*) *Les Nitriles alcools*, p. 170.

(**) *Monatshefte* 12, 412.

Le premier indique comme point d'ébullition 118-119°; le second 117°,4-118°,4.

J'ai soumis à la déshydratation le nitrile α oxybutyrique.

Les rendements de cette opération sont très mauvais et il se forme de l'acide cyanhydrique. Après plusieurs rectifications, j'ai obtenu un produit bouillant à 115-116° sous 763 millimètres.

$$N_D \text{ à } 20^\circ = 1.41692 \quad (N_D \text{ à } 16^\circ = 1.41861 \text{ (Henry).})$$

$$D_{20}^{20}/4 = 0.8219 \quad (D_{23}^{23}/4 = 0.8259 \text{ (Schindler).})$$

Le pouvoir réfringent moléculaire est 20,45 au lieu de 20,02 (*).

Pour se rendre compte de la constitution du nitrile non saturé qu'il avait obtenu, Schindler l'a transformé en amide et en acide bibromés, et il a obtenu comme seuls produits d'addition l'amide bibromocrotonique et l'acide bibromocrotonique.

Avec le produit résultant de la déshydratation du nitrile α oxybutyrique, je suis arrivé à des résultats un peu différents. J'en ai traité 4,12 gr. par 9,9 de brome en solution chloroformique et en évitant tout échauffement; la décoloration du brome n'est effectuée qu'après vingt-quatre heures environ et il se forme un peu d'acide bromhydrique.

Après avoir chassé le chloroforme dans le vide, le produit d'addition est dissous dans HBr fumant et reprecipité par la glace après douze heures.

L'amide brute simplement séchée fond de 100° à 120°. Après quelques cristallisations dans le chloroforme bouillant, j'en ai isolé, en quantités presque égales, deux amides bibromées dont l'une fond à 151°-152°, l'autre à 108°.

(*) Le pouvoir réfringent moléculaire de ce dérivé propylénique est donc notablement plus élevé que celui du dérivé allylique. C'est là une conclusion à laquelle est arrivé Eykman en comparant de nombreux dérivés allyliques et propyléniques. (*D. ch. Gess.*, 23, 855.)

La séparation est assez aisée, comme le montre le détail opératoire suivant :

Première cristallisation dans CHCl_3 :

- a) Premier jet, fus. 125° - 148° .
- b) Deuxième jet, fus. 120° - 145° .
- c) Troisième jet, fus. 103° - 110° .
- d) Quatrième jet, fus. 97° - 108° .

Deuxième cristallisation :

- A) a) et b) sont repris par CHCl_3 bouillant.
 - a') Premier jet, fus. 149° - 152° .
 - b') Deuxième jet, fus. 145° - 150° .
 - c') Troisième jet, fus. 130° - 144° .
- B) c) et d) sont repris par CHCl_3 bouillant.
 - a'') Premier jet, fus. 107° - 108° .
 - b'') Deuxième jet, fus. 106° - 108° .

Troisième cristallisation :

- a') et b') repris donnent un produit fus. 151° - 152° .
- a'') et b'') » » » 107° - 108° .

J'ai obtenu approximativement le même poids de ces deux amides bibromées. Ces deux produits sont bien les deux amides bibromées crotonique et isocrotonique : à l'analyse la première, fus. 151° - 152° , donne N : 5,2 %, la seconde, fus. 107° - 108° , N : 5,4 %.

A première vue on pourrait tirer de ces faits la conclusion que le nitrile non saturé, provenant de la déshydratation du nitrile α oxybutyrique, est un mélange en proportion sensiblement égale des deux isomères géométriques du nitrile crotonique.

Je ferai remarquer cependant que Lespiau en traitant par l'acide bromhydrique les produits de tête de la distillation du nitrile vinyl-acétique bibromé a obtenu, mais en très petite

quantité seulement, l'amide bibromée de l'acide isocrotonique : il attribue sa formation à l'existence dans ces produits de tête d'un nitrile bromé non saturé $\text{CH}_2=\text{CH}-\text{CHBr}-\text{CN}$. D'autre part on sait que l'acide dibromocrotonique (fus. 87°) peut se transformer en acide isodibromocrotonique (fus. 59°) sous l'action de l'acide bromhydrique.

Malgré cela, je pense plutôt que le nitrile crotonique que j'ai obtenu par déshydratation du nitrile α oxybutyrique est un mélange des isomères géométriques : en effet, par déshydratation de l'aldoxime crotonique, Schindler n'a obtenu qu'un seul acide bromé, l'acide dibromocrotonique, et son nitrile non saturé diffère de celui que j'ai préparé par ses constantes physiques.

Je me propose de reprendre l'étude de cette question aussitôt que je disposerai d'une quantité plus notable de nitrile crotonique.

J'ai examiné aussi un échantillon de nitrile allylique préparé depuis plus de cinq ans aux dépens du cyanure de potassium et du bromure d'allyle (provenant d'alcool allylique du bois) en solution dans l'alcool à 80° .

Ce produit, obtenu à côté du nitrile β éthoxybutyrique, bouillait à 114° - 116° .

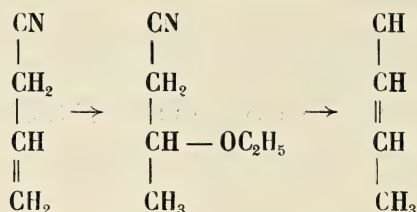
Son produit d'addition bibromé se comporte, à la distillation, autrement que le produit d'addition au nitrile vinyl-acétique.

Les portions inférieures sont plus notables, et il a été fort difficile de trouver un point d'ébullition fixe. J'ai recueilli séparément les portions passant sous 15 mm. de 60° à 85° , de 85° à 100° , de 100° à 115° , de 115° à 135° .

La fraction de 100° à 115° est la plus considérable.

Chacune de ces fractions est traitée séparément par HBr , pour préparer les amides; elles fournissent toutes les quatre les mêmes produits, les deux amides bibromées crotonique et isocrotonique; les portions inférieures sont cependant plus riches en amide fus. à 107° - 108° , les portions supérieures plus riches en amide fus. à 152° .

En tout cas, ce nitrile, quoique d'origine allylique, est bien le nitrile crotonique ou le mélange des nitriles crotonique et isocrotonique. La migration de la double soudure est d'ailleurs facile à interpréter dans ce cas, puisque ce nitrile s'est formé en même temps que le composé β éthoxylé (*).



Enfin j'ai repris la préparation du nitrile suivant la méthode employée par Lippmann aux dépens du cyanure de potassium commercial et du bromure d'allyle, en tube scellé à 110°, en l'absence de dissolvant.

Ce produit bout à une température plus élevée que les nitriles non saturés que j'ai obtenus par les autres voies; je trouve 116°-117° sous 759 mm.

Ce nitrile non saturé me donne également un mélange de deux amides bibromées, quoique l'amide fus. à 108° soit ici en quantité moindre, $\frac{1}{4}$ environ pour $\frac{3}{4}$ de l'amide fus. à 152°.

Palmer et Lippmann ne signalent cependant que l'amide fus. à 152°.

Dans cette préparation il y a donc également migration de la double soudure : l'interprétation de ce phénomène donnée par Pomeranz (**) semble très plausible, surtout à la suite des observations de Brulé (***).

Louvain, Laboratoire de chimie générale de l'Université.

(*) Il faut cependant rappeler que Brulé a constaté que du cyanure d'allyle vieux de deux ans, préparé probablement suivant la méthode employée par Lespiau, s'est transformé partiellement en nitrile crotonique. (*Bull. Soc. chim.*, 4^e série, 5, 1019.)

(**) *Liebigs An.*, 351, 357.

(***) *Bull. Soc. chim.*, 4^e série, 5, 1019.

PHYSIQUE THÉORIQUE.

Sur les biréfringences normales et accidentelles (*),

par E. HENRIOT.

M. Voigt (**) a proposé un modèle de molécule primitivement isotrope devenant anisotrope par déformation ou par une polarisation intense. Dans ce modèle, l'électron vibrant est à l'intérieur d'une sphère contenant de l'électricité répartie spatialement en volume, la densité électrique étant variable avec le rayon.

Si, au moyen d'un champ intense, comme dans l'effet Kerr, on polarise cette molécule, elle devient anisotrope et le rapport des retards absolus optiques (***) prévu par la théorie de Voigt est $+3$, alors que le rapport des retards absolus prévu par la théorie de l'orientation est -2 .

Des expériences récentes, celle de Pauthenier en particulier, ayant établi que le rapport expérimental des retards absolus est bien -2 , on peut se poser la question de savoir si un tel résultat est crucial et décide d'une façon certaine entre les théories de la biréfringence basées sur la déformation et celles basées sur l'orientation de la molécule.

Je pense que l'on peut imaginer des modèles de molécules encore plus simples que ceux de M. Voigt, où l'on peut étudier l'influence d'une polarisation ou d'une déformation quelconque, et qui conduisent à des conclusions différentes des siennes.

Si, comme M. Voigt, on admet l'existence d'une force de rappel de l'électron, due à des phénomènes électrostatiques, le potentiel peut être développé en série, en prenant comme origine la position d'équilibre normal.

(*) Présenté par M. Th. De Donder.

(**) W. VOIGT, *Magneto und electrooptik*. — Teubner, 1908, pp. 355 et 359.

(***) H. MOUTON, *Biréfringence magnétique des liquides purs*, dans les PROGRÈS DE LA PHYSIQUE MOLÉCULAIRE. — Gauthier-Villars, 1914, p. 161.

Si, pour simplifier, on admet, dans la molécule, l'existence de trois plans de symétrie, nous prendrons ces trois plans de symétrie pour plans de coordonnées.

Le potentiel, pour un écart x, y, z de l'électron sera de la forme

$$\psi = \frac{ax^2}{2} + \frac{by^2}{2} + \frac{cz^2}{2} + \dots$$

Il faut, pour la stabilité, que a, b, c soient tous positifs. On aura donc à l'origine

$$\Delta\psi > 0,$$

ce qui exige que l'électron vibrant soit noyé dans des masses électriques réparties spatialement et de signe contraire au sien.

L'hypothèse la plus simple que l'on puisse faire sur cette densité spatiale fictive, c'est qu'elle est uniforme. Nous pourrions

tracer, autour de la position d'équilibre de l'électron une sphère dont l'électron ne sortira pas. Nous envisagerons séparément les potentiels

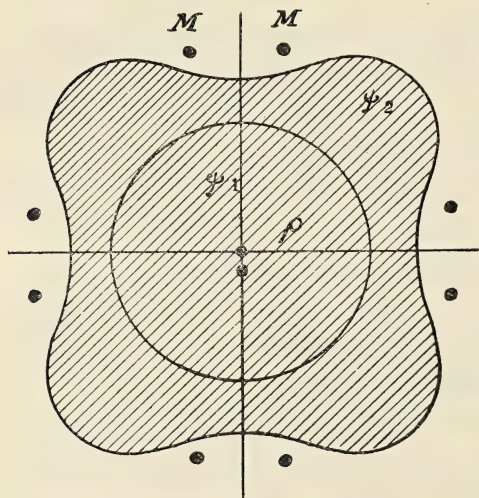
$$\psi = \psi_1 + \psi_2,$$

ψ_1 étant le potentiel des masses réparties uniformément dans la sphère avec une densité ρ ;

ψ_2 étant le potentiel des masses extérieures à la sphère.

La figure 1 représente à l'extérieur de la sphère S des charges électriques ponctuelles M, M, ou spatiales quelconques que l'on supposera avoir la symétrie requise. On aura

$$\Delta\psi_1 = -4\pi\rho, \quad \Delta\psi_2 = 0.$$



Les coefficients élastiques principaux sont respectivement

$$f_x = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right)_0, \quad f_y = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)_0, \quad f_z = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right)_0.$$

Ils peuvent être égaux si par exemple les masses potentialantes qui produisent ψ_2 sont réparties de façon à avoir dans l'espace une symétrie cubique. On a alors

$$\left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} \right)_0 = \left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} \right)_0 = \left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} \right)_0.$$

Comme d'autre part $\Delta \psi_2 = 0$, ψ_2 n'intervient pas pour déterminer les coefficients élastiques à l'origine.

Ils peuvent être inégaux si, par exemple, la symétrie de la molécule ne comporte que trois plans de symétrie, alors la molécule est initialement anisotrope.

Déformations de la molécule par un champ extérieur. — Soit e la charge de l'électron mobile. Si nous appliquons un champ extérieur considérable $h^{(s)}$ il va s'écarter de la position d'équilibre de quantités finies x_s, y_s, z_s telles que

$$eh_x^{(s)} = - \frac{\partial \psi}{\partial x_s}, \quad \dots$$

Si maintenant, sur la molécule déformée, vient agir un petit champ additionnel h' (champ de l'onde lumineuse), l'électron prendra, à partir de la nouvelle position d'équilibre, de petits déplacements ξ, η, ζ tels que

$$e(h_x^{(s)} + h'_x) = - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_s} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_s^2} \xi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_s \partial y_s} \eta + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_s \partial z_s} \zeta \right);$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} eh'_x = - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_s^2} \xi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_s \partial y_s} \eta + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_s \partial z_s} \zeta \right) \\ eh'_y = - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y_s \partial x_s} \xi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_s^2} \eta + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_s \partial z_s} \zeta \right) \\ eh'_z = - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z_s \partial x_s} \xi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_s \partial y_s} \eta + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_s^2} \zeta \right). \end{array} \right.$$

Les neuf dérivées partielles qui figurent dans le second membre sont les neuf composantes d'un tenseur.

Pour simplifier, supposons que les directions principales de ce tenseur coïncident avec les directions principales de la molécule, ce qui se produira par exemple lorsque le champ $h^{(S)}$ est dirigé perpendiculairement à un plan de symétrie.

Les nouveaux coefficients élastiques principaux de l'électron sont

$$f'_x = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_s^2}, \quad f'_y = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_s^2}, \quad f'_z = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z_s^2}.$$

Nous aurons donc

$$\begin{aligned} f'_x + f'_y + f'_z &= (\Delta \psi)_s = (\Delta \psi_1)_s = (\Delta \psi_1)_0 \\ &= f_x + f_y + f_z. \end{aligned}$$

La somme des coefficients quasi élastiques demeure inaltérée, mais chacun d'eux est modifié. Si la biréfringence n'existait pas, elle apparaît ; si elle existait, elle se trouve modifiée.

Nous avons vu que, en employant les notations de mes précédentes notes sur les invariants optiques,

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{Ne^2}{f_x - m\omega^2} \\ \frac{f_x - m\omega^2}{Ne^2} &= r_{1xx} + \frac{4\pi}{n_x^2 - 1} \end{aligned}$$

et deux équations analogues.

On en déduit, par addition, une expression invariante :

$$\frac{f_x + f_y + f_z - 3m\omega^2}{4\pi e^2} = N \left[1 + \sum_{x,y,z} \frac{1}{n_x^2 - 1} \right].$$

Cette expression invariante conduit à des résultats pratiquement équivalents à ceux de M. Brillouin, en supposant qu'il n'y a qu'un seul électron vibrant.

Ces considérations complètent et rectifient sur certains points les calculs des pages 867 et 868 de ma note de ce *Bulletin* du 15 décembre 1919.

Le cas où il existe plusieurs électrons vibrants est plus compliqué, parce que ce sont les inverses des coefficients quasi élastiques qui s'ajoutent et non les coefficients eux-mêmes, mais le calcul montre que ces conclusions subsistent à condition que les coefficients f_x , f_y , f_z soient peu différents.

Posons

$$f_x - m\omega^2 = (f_m - m\omega^2) + \varepsilon_x$$

et supposons que le carré de ε_x peut être négligé devant le carré de $(f_m - m\omega^2)$.

Alors, nous savons que

$$\frac{1}{\frac{n_x^2 - 1}{4\pi} + \gamma_{xx}} = \frac{N_1 e^2}{f_{1x} - m\omega^2} + \frac{N_2 e^2}{f_{2x} - m\omega^2} + \dots$$

les indices 1, 2, ... s'appliquant aux diverses sortes d'électrons.

$$\frac{N_1 e^2}{f_{1x} - m\omega^2} = \frac{N_1 e^2}{f_m - m\omega^2} - \frac{N_1 e^2}{(f_m - m\omega^2)^2} \varepsilon_{1x}.$$

Si d'autre part, comme nous avons montré que cela est légitime, on remplace les γ par $\frac{4}{3}\pi$, il vient

$$\begin{aligned} & \frac{3}{4\pi} \left(\frac{n_x^2 + 1}{n_x^2 - 2} + \frac{n_y^2 - 1}{n_y^2 + 2} + \frac{n_z^2 - 1}{n_z^2 + 2} \right) \\ &= \frac{3N_1 e^2}{f_m - m\omega^2} - \frac{N_1 e^2}{(f_m - m\omega^2)^2} (\varepsilon_{1x} + \varepsilon_{1y} + \varepsilon_{1z}) + \dots \end{aligned}$$

Après une déformation de la molécule du genre que nous avons étudié, les coefficients élastiques deviendront

$$f'_x - m\omega^2 = (f_m - m\omega^2) + \varepsilon'_x;$$

nous aurons

$$\varepsilon'_x + \varepsilon'_y + \varepsilon'_z = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

pour chaque sorte d'électrons.

Ceci assure l'invariance de l'expression

$$\left(\frac{n_x^2 - 1}{n_x^2 + 2} + \frac{n_y^2 - 1}{n_y^2 + 2} + \frac{n_z^2 - 1}{n_z^2 + 2} \right) \frac{1}{d}. (*)$$

Cette expression reste invariante lorsque l'orientation des molécules change sans que la molécule se déforme; elle reste encore invariante lorsque la molécule se déforme sans que son orientation change.

Supposons, par exemple, une molécule constituée par un édifice à trois plans de symétrie : le passage, par orientation et déformation de la molécule, de l'état liquide à l'état cristallin, peut imposer aux ε des variations du premier ordre; l'équation d'invariance s'appliquera alors au second ordre près.

Il en sera de même si l'on passe d'un état cristallin à un autre.

La déformation que nous avons envisagée peut être créée par un champ moléculaire, dirigé suivant l'un des axes et produisant une polarisation spontanée. C'est à ce cas que les précédents calculs s'appliquent.

Les résultats précédents sont encore vrais si l'on suppose une déformation quelconque de notre molécule respectant la densité fictive ρ .

Par exemple, si nous prenons notre molécule orthorhombique, trois dilatations quelconques des masses potentialantes qui produisent ψ_2 , suivant les trois axes coordonnés, laissent subsister l'équation

$$\Delta\psi_2 = 0$$

et par suite respectent l'invariance de l'équation (1).

(*) E. HENRIOT. *Sur les invariants optiques*. (BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE. Classe des sciences, 8 nov. 1919.)

Le modèle que nous avons envisagé, en outre qu'il a l'avantage d'être le plus simple possible, se prête donc à l'étude de déformations aussi grandes que l'on veut. Or, ceci est rendu absolument nécessaire si l'on veut expliquer l'invariance, au moins approximative de l'équation (1) pour des déformations aussi considérables que celles que révèle l'étude de la structure des cristaux au moyen des rayons X.

Cependant cette conception statique de l'édifice moléculaire n'a certainement que la valeur d'une hypothèse de travail.

L'équilibre de la molécule doit être dynamique et les oscillations sont exécutées par des masses électriques, non pas autour d'une position d'équilibre, mais autour d'un mouvement stable. Les déformations que l'on doit envisager peuvent alors être de deux sortes : ou bien ce sont des déformations adiabatiques au sens Ehrenfest-Burgers, ou bien ce sont des modifications brusques. Quel que soit le modèle dynamique que l'on envisage, il semble bien qu'il devra être tel que les déformations imposées laissent invariante la somme des trois coefficients quasi élastiques principaux de chaque électron ou du moins fassent peu varier cette somme.

Les considérations précédentes s'appliquent encore au cas où l'on considère des biréfringences accidentelles.

Elles montrent que le rapport des retards absolus peut être — 2, même dans le cas d'une déformation de la molécule, et il est facile de montrer que la loi d'Havelock s'applique encore.

L'existence de la valeur — 2 pour le rapport des retards absolus et la vérification de la loi d'Havelock ne sont donc pas des expériences cruciales permettant de décider entre les théories de l'orientation et de la déformation.

Il est probable que ces théories ne s'opposent pas, mais que la vérité réside dans leur juxtaposition.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

- Crismer (L.)*. Pompe à vide à mercure. Gand, 1920; extrait in-8° (pp. 1-15).
— Nouveaux appareils de laboratoire. Gand, 1920; extrait in-8° (pp. 243-251).
— Identification d'explosifs par les températures critiques de solution (t. c. s). Gand, 1920; extrait in-8° (pp. 28-33).
— Éthanolise d'une matière grasse. Gand, 1920; extrait in-8° (1 p.).
Crismer et J. Timmermans. Acide et anhydride acétique. Gand, 1920; extrait in-8° (pp. 46-52).
— Sur la tétranitrométhylaniline tétryle. Gand, 1920; extrait in-8° (2 p.).
Gravis (A.) Eléments de morphologie végétale. Liège, 1920; in-8° (204 p.), planches.
Hooker (Lady). Life and letters of Sir Joseph Dalton Hooker, C. M., G. C. S. I. based on materials collected and arranged by Lady Hooker. Londres, 1918; in-8°, 2 vol. (pp. viii-545-569), portraits, gravures.
Lacroix (A.). Les industries minérales non métallifères à Madagascar. Paris, 1920; in-8° (63 p.).
Stroobant (Paul). Les progrès récents de l'astronomie, (viii-année 1914). Bruxelles, 1920; extrait petit in-8° (pp. 5-206).
— A propos de la prochaine disparition de l'anneau de Saturne. Bruxelles, 1920; extrait petit in-8° (pp. 5-40).
Philosophical Institute of Canterbury. The subantarctic islands of New-Zealand Reports on the geo-physics, geology, zoology and botany of the inslands lying to the south of New Zealand, based mainly on observations and collections made during an expeditions in the Government steamer « Hinemoa » (Captain J. Bollons) in november 1907. Wellington. N. Z., 1909; in-4°, 2 vol. (pp. xxxv-848-848), planches, 1 carte.
— *Liber memorialis* de la manifestation en l'honneur de M. Alfred Gilkinet, professeur à l'Université de Liège, à l'occasion de sa promotion à l'éméritat. Liège, 1920; in-8° (47 p.), 1 portrait.

ADDENDUM

- Page 456, à la bibliographie de la communication de M. STROOBANT : *Sur la nature des étoiles temporaires*, ajouter ce qui suit :
- LOCKYER, N., On some of the phenomena of new stars. (*Solar Physics Committee Publ.* London, 1914).
- FOUCHÉ, M., Les étoiles temporaires (*Bull. Soc. astron. de France*, **30**, 299 [1916].)
-

TABLE DES MATIÈRES.

CLASSE DES SCIENCES. — Séance du samedi 9 octobre 1920.

Notification du décès de MM. A. Jorissen, membre, A. Gautier et Y. Delage, associés.	441
M. le Directeur souhaite la bienvenue à M. A. Boulenger, associé, et adresse les félicitations de la Classe à M. Bordet qui vient de recevoir la médaille d'or de Pasteur.	441
CORRESPONDANCE : MM. Branly et Urbain, associés, expriment leurs condoléances à l'Académie à l'occasion de la mort de M. Jorissen. — M. J. Verschaellert annonce qu'il se fixe définitivement à l'étranger. — La Société Royale de Londres demande le nom du délégué de la Classe à la Conférence de la littérature scientifique internationale. — L'Académie de Belgrade propose d'admettre l'Académie Yougo-Slave de Agram (Zagreb) au sein du Conseil international de Recherches. — M. le Ministre des Sciences et des Arts annonce le prochain envoi d'une ordonnance de paiement de la subvention accordée à la <i>Table des constantes physiques</i> . — M. Lécointe adresse la liste des noms proposés pour la constitution des comités nationaux d'astronomie, de géodésie et géophysique et de géographie. — L'Association des ingénieurs électriciens sortis de l'Institut électrotechnique Montefiore adresse le programme du concours pour son prix triennal de 1912. — L'Union internationale de la chimie pure et appliquée adresse dix exemplaires du compte rendu de la Conférence tenue à Rome	442
COMITÉ SECRET	443
RAPPORTS	443
LECTURES	443
MOTION DE M. MASSART	444

Communications et Lectures.

ASTRONOMIE. — <i>Observations de « Nova Cygni », n° 3, 1920</i> , par P. Stroobant.	444
— <i>Sur la nature des étoiles temporaires</i> , par P. Stroobant	448
PRÉHISTOIRE. — <i>Sur la faune des Mammifères de l'époque de la pierre polie en Belgique</i> , par A. Rutot	456
CHIMIE. — <i>Sur quelques propriétés physiques de l'hydrogène telluré</i> , par P. Bruylants (1 figure)	472
— <i>Note sur la constitution du cyanure d'allyle</i> , par P. Bruylants	479
PHYSIQUE THÉORIQUE. — <i>Sur les biréfringences normales et accidentelles</i> , par E. Henriot (1 figure)	487
BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.	494



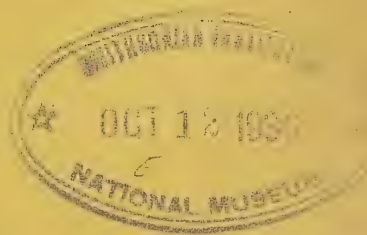
ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

BULLETIN

DE LA

CLASSE DES SCIENCES

1920 — N^o 11



BRUXELLES

MAURICE LAMERTIN

LIBRAIRE-ÉDITEUR

Rue Coudenberg, 58-62

M. HAYEZ

IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE

Rue de Louvain, 112

1920

Séance du samedi 6 novembre 1920.

M. A. GRAVIS, directeur de la Classe.

M. PAUL PELSENEER, secrétaire perpétuel.

Sont présents : MM. G. Cesàro, *vice-directeur* ; J. Deruyts, Léon Fredericq, A. Lameere, Ch.-J. de la Vallée Poussin, Max Lohest, Fr. Swarts, Jean Massart, A. Demoulin, A. Rutot, A. de Hemptinne, Victor Willem, Paul Stroobant, Ch. Julin, Georges Lecointe, Émile Marchal, J. Cornet, *membres* ; L. Crismer, M. Stuyvaert, A. Brachet, Th. De Donder, Paul Fourmarier, V. Grégoire, O. Dony-Hénault, *correspondants*.

M. G.-A. Boulenger, *associé*, assiste à la séance.

M. le Directeur adresse les chaleureuses félicitations de tous ses confrères à M. J. Bordet, lauréat du Prix Nobel. Il signale que c'est la première fois qu'un homme de science belge et qu'un membre de la Classe des sciences de l'Académie se voit attribuer cette haute distinction. L'Académie et le pays tout entier s'en réjouissent et en sont fiers. (*Vifs applaudissements.*)

CORRESPONDANCE.

M. le Ministre des Sciences et des Arts fait savoir qu'il tiendra compte du vœu exprimé par la Classe, relativement au Conseil de l'Observatoire royal.

Le même Ministre annonce qu'il transmet au Ministre de

l'Agriculture, pour avis, le vœu de la Classe relatif au Jardin Botanique de l'État.

Le même Ministre prie l'Académie de lui présenter une liste de dix noms pour la constitution d'un Comité de Lecture appelé à choisir et classer les manuscrits d'ouvrages scientifiques dont la guerre a empêché la publication et qui paraîtraient dignes d'être publiés sous le patronage du Gouvernement.

Le même Ministre fait savoir que le jury central n'a pas délivré cette année de diplôme de docteur en sciences chimiques avec la plus grande distinction; la même communication est faite par les Universités de Bruxelles, de Gand et de Louvain; l'Université de Liège annonce qu'elle a conféré à M. Ch.-J. Guilissen le diplôme de docteur en sciences chimiques avec la plus grande distinction, au cours de la présente année. — La Classe décide d'attribuer à ce dernier le prix Stas pour 1920.

Le Secrétaire général du Comité international des Tables annuelles des Constantes et données numériques de Chimie, de Physique et de Technologie remercie l'Académie de la subvention qu'elle lui a accordée.

L'Université de Bologne annonce qu'elle célèbre (le 1^{er} novembre) le 40^e anniversaire de l'entrée en fonctions d'Auguste Righi. La Classe décide de faire savoir à l'Université de Bologne qu'elle s'associe à l'hommage rendu à la mémoire de l'illustre physicien italien.

M. J. Deruyts adresse une note au sujet du Congrès international des physiciens à Strasbourg.

M. Ch. Julin adresse le texte d'une motion qu'il présentera au cours de la séance.

M. J. Verschaffelt remercie l'Académie de l'avoir inscrit au ombre de ses associés.

HOMMAGES D'OUVRAGES.

Éléments de biologie générale et de botanique (premier fascicule), par J. Massart.

Les premiers temps de l'idée évolutionniste : Lamarck, Geoffroy Saint-Hilaire et Cuvier, par Paul Pelseneer.

Statique dynamique, par M. Stuyvaert.

Remerciements.

RAPPORTS.

De MM. Stroobant, le Paige et Lecointe sur les travaux présentés pour le Prix Mailly. Conformément aux conclusions des rapporteurs, la Classe décide d'attribuer le Prix à M. Van Biesbroeck.

Sur rapports favorables de MM. Stuyvaert et Neuberg, une note de M. Lucien Godeaux : *Sur une surface de quatrième ordre à douze points doubles coniques*, sera imprimée dans le « Bulletin ».

NOMINATION DES COMITÉS NATIONAUX

RATTACHÉS AUX UNIONS SCIENTIFIQUES INTERNATIONALES NOUVELLEMENT
CONSTITUÉES OU EN VOIE DE CONSTITUTION.

La Classe décide que 1° le nombre maximum des membres d'un Comité sera de douze; 2° toutefois, les Comités qui le jugeront utile pourront se compléter en choisissant de nouveaux membres, jusqu'à concurrence d'un tiers; 3° tous les membres des Comités seront nommés pour trois ans et seront éventuellement rééligibles.

— Comité national de Chimie : les douze noms proposés sont adoptés.

— Comité national des sciences biologiques : les douze noms proposés sont adoptés.

— Comité national des mathématiques : les douze noms proposés sont adoptés.

La constitution des Comités d'Astronomie, de Géodésie et Géophysique, de Physique et Radiotélégraphie, de Géologie, de Géographie est remise à la prochaine séance.

SUBVENTIONS A ACCORDER PAR LA FONDATION AGATHON DE POTTER.

La Commission de la Fondation De Potter propose à la Classe d'accorder les subventions suivantes :

M. Desmedt, 4,000 francs, pour des recherches sur le spectre de haute fréquence et l'acquisition des instruments nécessaires.

M. Willem, 2,000 francs, pour des recherches sur les insectes marins et les tropismes.

M. Massart, 2,000 francs, pour des recherches sur les variations et l'hérédité.

M. Swarts, 2,500 francs, pour l'achat du platine nécessaire à des recherches sur la catalyse par hydrogénation.

Les trois premières subventions sont à prendre sur les ressources annuelles de la Fondation; la quatrième sur le reliquat de 1919. — Adopté.

MOTION DE M. JULIN.

M. Julin propose, et la Classe adopte, un vœu à adresser à M. le Ministre des Sciences et des Arts, tendant à louer une table de Recherches au Laboratoire maritime de Wimereux, dans les mêmes conditions qu'au Laboratoire de Roscoff.

Motion relative à la constitution du Conseil de la Bibliothèque royale. — Sur la proposition de plusieurs membres, la Classe émet le vœu d'être représentée au sein de ce Conseil, au même titre que la Classe des lettres.

Motion relative à la constitution de la Commission royale des Échanges internationaux (section littéraire). — Sur la proposition de M. Lecointe, la Classe émet le vœu d'être également représentée au sein de cette Commission.

PRIX MAILLY.

(6^e période, 1912-1919.)

Rapport de M. P. Stroobant, premier commissaire.

Un seul concurrent s'est présenté pour cette période : M. G. Van Biesbroeck, astronome adjoint à l'Observatoire royal de Belgique, à Uccle et actuellement attaché à l'Observatoire Yerkes de l'Université de Chicago.

Presque tous les travaux de M. Van Biesbroeck sont des observations, effectuées principalement à l'aide du réfracteur équatorial de 38 centimètres d'ouverture, de l'Observatoire.

Nous citerons d'abord les *Études sur les étoiles variables* faites en collaboration avec M. L. Casteels, qui a effectué un grand nombre d'observations, faites surtout à l'équatorial de 16 centimètres d'ouverture. Les observations ont été effectuées de 1907 à 1912 et publiées en 1913 dans les *Annales de l'Observatoire* (N. S. *Annales astronomiques*, t. XIII). Les instruments utilisés sont : l'équatorial de 28 centimètres et son chercheur de 8 centimètres, l'équatorial de 16 centimètres et son chercheur de 5 centimètres et une paire de jumelles astronomiques de 3 centimètres. Plusieurs fois le photomètre de Zöllner-Müller a été appliqué au second de ces instruments. Le but des observations

a été de fixer les caractères essentiels de la variation d'éclat des variables nouvellement annoncées. Afin de faciliter l'identification éventuelle de certaines variables, les auteurs ont donné pour un grand nombre d'entre elles de petites cartes de la région du ciel où elles se trouvent. Lorsque les observations étaient assez complètes, on a donné des courbes de la variation d'éclat.

Les étoiles observées sont au nombre de 46; elles appartiennent aux types les plus divers de variables; le nombre total des observations publiées est de 3,225.

En 1914, M. Van Biesbroeck a fait paraître, dans les *Annales de l'Observatoire* également, un ouvrage très étendu renfermant les observations effectuées de 1907 à 1912, à l'équatorial de 38 centimètres. Ce travail se rapporte aux observations d'étoiles doubles, de comètes et de petites planètes et de divers phénomènes. En ce qui concerne les étoiles doubles, l'auteur s'est attaché aux couples à mouvement rapide et à ceux nouvellement découverts ou peu observés; parmi ces derniers figurent les étoiles trouvées et cataloguées par John Herschel (entre $+ 50^{\circ}$ de déclinaison et le pôle nord); M. Van Biesbroeck en a déterminé les coordonnées. Il indique le résultat de la comparaison de ses observations à celles d'Herschel: l'auteur a constaté que les distances des composantes estimées par ce dernier astronome sont aux distances mesurées par lui-même dans le rapport de 3 à 4. Les observations de position des comètes sont au nombre de plus de 400; l'auteur a noté aussi l'éclat et l'aspect de ces astres; son travail est accompagné de trois planches de dessins. Les comètes observées sont: 1907 *d* et *c*; 1908 *c* et *d*; 1909 *a*, *b*, *c* et *e*; 1910 *a*, *b* et *c*; 1911 *b*, *c*, *e*, *f*, *g* et *h*; 1912 *a* et *c*; 1913 *a*, *b*, *c*, *d* et *e*.

Quelques observations de petites planètes (402, 433 et 704), d'occultations d'étoiles par la Lune et des phénomènes des satellites de Jupiter ont été faites occasionnellement. Quatre abaques pour déterminer l'influence de la réfraction dans les mesures à l'équatorial sont joints à cet ouvrage.

Des observations de comètes (1913 *f* et 1914 *b*) et de petites planètes (1913 *QZ*) ont aussi été publiées par M. Van Biesbroeck dans les *Astronomische Nachrichten*, qui contiennent également un certain nombre de positions observées de comètes, figurant dans le volume des *Annales* que nous venons d'analyser.

Il a calculé les éléments et les éphémérides de la comète 1913 *f* (Delavan) qui ont paru dans les *Astronomische Nachrichten*; une étude relative à cet astre a été insérée au numéro 2 du *Bulletin de la Classe des sciences* de 1914.

M. Van Biesbroeck a présenté en commun avec M. Albert Tiberghien un mémoire sur les notes astronomiques contenues dans l'*Adversia*, d'Ole Rømer, en réponse à la question d'astronomie posée, en 1911, par l'Académie des Sciences et des Lettres de Danemark; ce travail a été couronné en 1913 et publié dans le *Bulletin* de cette Académie (année 1913, n° 4).

M. Van Biesbroeck a fait paraître aussi une note sur le passage de Mercure devant le Soleil, observé par Rømer en 1717 (*Monthly Notices of R. A. S.*, nov. 1912). Ce fut pour l'auteur l'occasion de publier un article de vulgarisation (qui fut traduit en anglais) sur les travaux astronomiques d'Olaüs Rømer. Signalons aussi d'autres articles de même nature : sur les photographies de l'éclipse de Soleil du 17 avril 1912 prises à Froidchapelle, sur les quatre comètes de l'automne 1913 et enfin sur l'éclipse de Lune du 12 mars 1914.

M. Van Biesbroeck a encore publié, dans l'*Annuaire de l'Observatoire royal*, deux notes d'un caractère pratique : la première sur un *Abaque pour le calcul des positions apparentes des étoiles* (1911) ⁽¹⁾, et la seconde sur le *Calcul approché des occultations* (1913), quand on connaît les éléments correspondants pour un lieu peu éloigné, par exemple pour Uccle, quand on possède les données relatives à Paris ou à Greenwich.

(1) Cette notice, ayant été publiée au cours de la dernière année de la 5^e période, ne devrait pas, à la rigueur, figurer parmi les travaux pouvant entrer en ligne de compte.

La sixième période du Prix Mailly se terminait le 31 décembre 1915, mais à cause de la guerre, elle fut prolongée jusqu'au 31 décembre 1919. M. Van Biesbroeck nous a envoyé les travaux qu'il a publiés avant la première de ces dates et, ayant séjourné presque constamment aux États-Unis depuis 1915, il a probablement ignoré l'existence de la décision prise par la Classe, ce qui explique que les observations qu'il a effectuées plus tard et qui ont paru, soit dans l'*Astronomical Journal*, soit dans les *Publications de Yerkes Observatory* (vol. IV, part. I, 1917), n'ont pas été envoyées à l'Académie.

Quoi qu'il en soit, l'exposé que nous avons fait montre quelle a été l'activité scientifique déployée par notre compatriote durant les années 1912 à 1915, qui forment la première partie de la sixième période. Les observations très nombreuses qu'il a faites, et auxquelles viennent s'ajouter ses autres publications, l'intelligence et le soin avec lesquels elles ont été effectuées forment un ensemble qui est digne, d'après nous, d'être récompensé par l'attribution du Prix Mailly; comme conclusion nous proposons donc de décerner celui-ci à M. Georges Van Biesbroeck.

Rapport de M. C. le Paige, deuxième commissaire.

Je me rallie complètement à la proposition de notre savant confrère M. Stroobant.

J'ai suivi avec intérêt, au fur et à mesure de leur publication, les travaux de M. Van Biesbroeck, et l'examen nouveau que j'en ai fait actuellement me porte à croire qu'ils sont dignes de l'attribution du Prix Mailly.

Sur les équations de Moutard à solutions quadratiques

(suite) (*).

par A. DEMOULIN, membre de l'Académie.

VII.

28. D'après les développements du paragraphe VI, il y a quatre équations de Moutard admettant deux solutions quadratiques. Ce sont les équations (130), (133), (143) et (148); la deuxième se présente une seconde fois sous le n° 139.

Pour obtenir les transformations T_m et Θ_m d'une quelconque (e) des équations (130), (143), (148) (**), il faut intégrer le système (117) dans le cas où $p = 2$. Ce système est le suivant :

$$(150) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X_1}{\partial u} = -p_{12} \cot \frac{\sigma}{2} \cdot X_2, \\ \frac{\partial X_1}{\partial v} = q_{12} \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} \cdot X_2, \\ \frac{\partial X_2}{\partial u} = -p_{12} \cot \frac{\sigma}{2} \cdot X_1, \\ \frac{\partial X_2}{\partial v} = q_{12} \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} \cdot X_1. \end{array} \right.$$

Il admet l'intégrale

$$(151) \quad X_2^2 - X_1^2 = C.$$

(*) La deuxième partie de ce mémoire (nos 18 à 27) est insérée dans le *Bulletin* de la séance du 7 août 1920.

(**) Nous ne nous occupons pas de l'équation (133), car elle ne donne pas lieu à des développements intéressants.

Calculons les rotations p_{12} , q_{12} . Dans le cas présent, le déterminant Δ est

$$\begin{vmatrix} m_1^{(1)} & m_2^{(1)} \\ m_1^{(2)} & m_2^{(2)} \end{vmatrix}.$$

En vertu des égalités (94) et (123), on a

$$m_1^{(1)} = \cos \tau, \quad m_2^{(1)} = \sin \tau.$$

On peut évidemment poser

$$m_1^{(2)} = -\sin \tau, \quad m_2^{(2)} = \cos \tau.$$

L'application des formules (98) donne

$$(152) \quad p_{12} = \frac{\partial \tau}{\partial u}, \quad q_{12} = \frac{\partial \tau}{\partial v}.$$

Cherchons d'abord les solutions du système (150) pour lesquelles la constante C qui figure dans (151) est $\neq 0$. On satisfait à cette relation, de la manière la plus générale, en posant

$$X_1 = \sqrt{-C} \operatorname{ch} \psi, \quad X_2 = \sqrt{-C} \operatorname{sh} \psi.$$

Si l'on porte ces valeurs de X_1 et de X_2 dans les équations (150) et qu'on tienne compte des formules (152), il vient

$$(153) \quad \frac{\partial \psi}{\partial u} = -\cot \frac{\sigma}{2} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial u}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial v} = \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial v},$$

d'où

$$(154) \quad \psi = \int -\cot \frac{\sigma}{2} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial u} du + \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial v} dv,$$

ou, eu égard à l'égalité (91),

$$(155) \quad \psi = \int -\sqrt{\frac{2V+m}{2U-m}} \frac{\partial \tau}{\partial u} du + \sqrt{\frac{2U-m}{2V+m}} \frac{\partial \tau}{\partial v} dv.$$

Si $C = 0$, on a, en vertu de (151), $X_2 = \pm X_1$. Suivant la remarque faite dans la note du n° 19, on peut, sans nuire à la généralité, poser $X_2 = X_1$. Si l'on remplace, dans le système (150), X_2 par X_1 , il vient, en tenant compte de (152) et de (153),

$$\frac{\partial \log X_1}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial u}, \quad \frac{\partial \log X_1}{\partial v} = \frac{\partial \psi}{\partial v},$$

d'où

$$X_1 = e^\psi,$$

et, par suite,

$$X_2 = e^\psi.$$

Les formules (119) et (120) donnent, dans les deux cas, les valeurs correspondantes de ω , de z'_1 et de z'_2 . On a, si C est $\neq 0$,

$$(156) \quad \omega = \frac{\sqrt{-C} \operatorname{ch} \psi}{\sqrt{U + V} \sin \sigma},$$

$$(157) \quad \begin{cases} z'_1 = \sqrt{U + V} (\cos \tau \cos \sigma - \sin \tau \sin \sigma \operatorname{th} \psi), \\ z'_2 = \sqrt{U + V} (\sin \tau \cos \sigma + \cos \tau \sin \sigma \operatorname{th} \psi), \end{cases}$$

et, si $C = 0$,

$$(158) \quad \omega = \frac{e^\psi}{\sqrt{U + V} \sin \sigma},$$

$$(159) \quad \begin{cases} z'_1 = \sqrt{U + V} \cos (\tau + \sigma), \\ z'_2 = \sqrt{U + V} \sin (\tau + \sigma). \end{cases}$$

29. Si l'on prend pour équation (e) l'équation (148), on

fera, comme au n° 27, $U = u$, $V = v$, et les formules (159) deviendront

$$(160) \quad \begin{cases} z'_1 = \sqrt{u+v} \cos(\tau + \sigma), \\ z'_2 = \sqrt{u+v} \sin(\tau + \sigma). \end{cases}$$

On a vu (n° 27) que si deux fonctions z_1, z_2 définies par les équations (146) satisfont à une équation de Moutard, τ est une solution de l'équation (149). Or, les fonctions z'_1, z'_2 définies par les équations (160) satisfont à une équation de Moutard; donc $\tau + \sigma$ est une solution de (149). Cette équation étant linéaire et admettant la solution τ sera aussi vérifiée par σ . Cette dernière solution est donnée par la formule

$$\cos \sigma = \frac{v - u + m}{u + v},$$

obtenue en faisant, dans (91), $U = u$, $V = v$.

30. Des équations (156) et (157), on déduit

$$z_1'^2 + z_2'^2 = U + V + \frac{C}{\omega^2},$$

résultat d'accord avec la théorie générale. Si l'on pose

$$z'_3 = \frac{\sqrt{-C}}{\omega},$$

l'égalité précédente s'écrit

$$(161) \quad z_1'^2 + z_2'^2 + z_3'^2 = U + V.$$

z'_1, z'_2, z'_3 satisfont à l'équation de Moutard déduite de (e) au moyen de la solution ω ; donc les formules

$$(162) \quad x = H(z'_2, z'_3), \quad y = H(z'_3, z'_1), \quad z = H(z'_1, z'_2)$$

définissent les coordonnées x, y, z d'une surface rapportée au

réseau (u, v) de ses asymptotiques. En vertu de (161), cette surface a pour courbure totale $-\frac{1}{(U+V)^2}$. Elle appartient donc à la classe de surfaces étudiée par M. Bianchi (*).

En vue du calcul de la troisième des intégrales (162), rappelons une propriété de la transformation de Moutard que nous avons énoncée au n° 11 du mémoire M. Soient λ, μ deux solutions d'une équation de Moutard (e) . Passons de cette équation à une équation de Moutard (e') au moyen d'une solution ω de (e) et désignons par λ', μ' les solutions de (e') qui correspondent respectivement à λ, μ dans cette transformation. L'intégrale $H(\lambda, \mu)$ ayant toute sa généralité, on peut disposer de la constante qui figure dans $H(\lambda', \mu')$ de manière à avoir

$$(163) \quad H(\lambda', \mu') = H(\lambda, \mu) + \lambda\mu' - \mu\lambda'.$$

Pour calculer les deux premières intégrales (162), nous nous appuierons sur la formule suivante. On a passé de l'équation (e) à l'équation (e') au moyen de la solution ω de (e) ; on passera donc de l'équation (e') à l'équation (e) au moyen de la solution $\frac{1}{\omega}$ de (e') . Par suite, en vertu des formules qui définissent la transformation de Moutard,

$$(164) \quad \left(\lambda', \frac{1}{\omega}\right) = \frac{\lambda}{\omega}.$$

Si l'on fait usage des formules (163) et (164), les égalités (162) deviennent

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{-C} \frac{z_2}{\omega}, \\ y &= -\sqrt{-C} \frac{z_1}{\omega}, \\ z &= H(z_1, z_2) + z_1 z_2' - z_2 z_1', \end{aligned}$$

(*) BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*, 2^e partie, pp. 74 et suiv.

ou, en tenant compte des égalités (123), (156), (157) et en remplaçant y par $-y$,

$$(165) \quad \begin{cases} x = \frac{(U + V) \sin \sigma \sin \tau}{\operatorname{ch} \psi}, \\ y = -\frac{(U + V) \sin \sigma \cos \tau}{\operatorname{ch} \psi}, \\ z = H(z_1, z_2) - (U + V) \sin \sigma \operatorname{th} \psi, \end{cases}$$

ou, eu égard à (92),

$$(165') \quad \begin{cases} x = \sqrt{(2U - m)(2V + m)} \frac{\sin \tau}{\operatorname{ch} \psi}, \\ y = \sqrt{(2U - m)(2V + m)} \frac{\cos \tau}{\operatorname{ch} \psi}, \\ z = H(z_1, z_2) - \sqrt{(2U - m)(2V + m)} \operatorname{th} \psi. \end{cases}$$

Il reste à calculer $H(z_1, z_2)$. Or

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(z_1, z_2)}{\partial u} &= z_1 \frac{\partial z_2}{\partial u} - z_2 \frac{\partial z_1}{\partial u} = (U + V) \frac{\partial \tau}{\partial u}, \\ \frac{\partial H(z_1, z_2)}{\partial v} &= -z_1 \frac{\partial z_2}{\partial v} + z_2 \frac{\partial z_1}{\partial v} = -(U + V) \frac{\partial \tau}{\partial v}; \end{aligned}$$

donc

$$(166) \quad H(z_1, z_2) = \int (U + V) \frac{\partial \tau}{\partial u} du - (U + V) \frac{\partial \tau}{\partial v} dv.$$

Prenons successivement pour équation (e), l'équation (130), l'équation (143) et l'équation (148).

I. On a $U = V = \frac{1}{2}$, d'où, en vertu de (91), $\cos \sigma = m$. τ est donnée par la formule (131). On a, en vertu des égalités (154) et (166), a désignant une constante arbitraire,

$$(167) \quad \begin{aligned} \psi &= -u \cot \frac{\sigma}{2} + v \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2} + a, \\ H(z_1, z_2) &= u - v. \end{aligned}$$

Les formules (165) deviennent, par suite,

$$\begin{aligned}x &= \frac{\sin \sigma \sin (u+v)}{\operatorname{ch}\left(-u \cot \frac{\sigma}{2}+v \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2}+a\right)}, \\y &= \frac{\sin \sigma \cos (u+v)}{\operatorname{ch}\left(-u \cot \frac{\sigma}{2}+v \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2}+a\right)}, \\z &= u-v-\sin \sigma \operatorname{th}\left(-u \cot \frac{\sigma}{2}+v \cot \frac{\sigma}{2}+a\right),\end{aligned}$$

ou, en remplaçant u par $u+a \sin \frac{\sigma}{2} \cos \frac{\sigma}{2}$ et v par $v-a \sin \frac{\sigma}{2} \cos \frac{\sigma}{2}$, et en négligeant une constante additive dans l'expression de z ,

$$(168) \quad \left\{\begin{aligned}x &= \frac{\sin \sigma \sin (u+v)}{\operatorname{ch}\left(-u \cot \frac{\sigma}{2}+v \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2}\right)}, \\&= \frac{\sin \sigma \cos (u+v)}{\operatorname{ch}\left(-u \cot \frac{\sigma}{2}+v \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2}\right)}, \\z &= u-v-\sin \sigma \operatorname{th}\left(-u \cot \frac{\sigma}{2}+v \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2}\right).\end{aligned}\right.$$

Les équations (168) définissent les hélicoïdes à courbure totale constante de Dini.

II. On a $U=u$, $V=0$. τ est donnée par l'égalité (144). On a, en vertu des égalités (155) et (166),

$$(169) \quad \psi=v \sqrt{\frac{2}{m}-\frac{1}{u}}-\int \sqrt{\frac{m}{2 u-m}} U_1^{\prime} d u,$$

$$(170) \quad H\left(z_1, z_2\right)=-v \sqrt{u}+\int u U_1^{\prime} d u .$$

Pour pouvoir calculer les intégrales qui figurent dans ces deux égalités, il suffit de poser

$$U_1 = \left(\frac{U_2'}{\varphi''(u)} \right)',$$

U_2 désignant une fonction arbitraire de u , et $\varphi(u)$ la fonction

$$\sqrt{\frac{m}{2u-m}}.$$

Dans le cas présent, les formules (165') deviennent

$$(171) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\sqrt{m} \sqrt{2u-m} \sin \left(\frac{v}{\sqrt{u}} + U_1 \right)}{\operatorname{ch} \psi}, \\ y = \frac{\sqrt{m} \sqrt{2u-m} \cos \left(\frac{v}{\sqrt{u}} + U_1 \right)}{\operatorname{ch} \psi}, \\ z = -v\sqrt{u} + \int u U_1' du - \sqrt{m} \sqrt{2u-m} \operatorname{th} \psi, \end{array} \right.$$

ψ étant donnée par l'égalité (169).

Les surfaces définies par les égalités (171) ont leur courbure totale égale à $-\frac{1}{u^2}$.

III. On a $U = u$, $V = v$. τ est une solution quelconque de l'équation (149). On a, en vertu des formules (155) et (166),

$$(172) \quad \psi = \int -\sqrt{\frac{2v+m}{2u-m}} \frac{\partial \tau}{\partial u} du + \sqrt{\frac{2u-m}{2v+m}} \frac{\partial \tau}{\partial v} dv,$$

$$(173) \quad H(z_1, z_2) = \int (u+v) \frac{\partial \tau}{\partial u} du - (u+v) \frac{\partial \tau}{\partial v} dv,$$

et les formules (165') deviennent

$$(174) \left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{(2u-m)(2v+m)} \frac{\sin \tau}{\operatorname{ch} \psi}, \\ y = \sqrt{(2u-m)(2v+m)} \frac{\cos \tau}{\operatorname{ch} \psi}, \\ z = \int (u+v) \frac{\partial \tau}{\partial u} du - (u+v) \frac{\partial \tau}{\partial v} dv - \sqrt{(2u-m)(2v+m)} \operatorname{th} \psi, \end{array} \right.$$

ψ étant donnée par l'égalité (172).

Les surfaces définies par les formules (174) ont pour courbure totale $-\frac{1}{(u+v)^2}$.

VIII.

31. n désignant un entier ≥ 2 , soumettons l'équation (e) à ν transformations Θ ($\nu = 0, 1, 2, \dots, n$), savoir $\Theta_{m_1}, \dots, \Theta_{m_\nu}$, et à $n - \nu$ transformations T , savoir $T_{m_{\nu+1}}, \dots, T_{m_n}$. Nous appellerons i^e transformation ($i = 1, 2, \dots, n$) celle qui est désignée par la lettre Θ ou la lettre T , affectée de l'indice m_i .

Conservant toutes les notations du n° 8, nous allons former l'équation (E) et les expressions des solutions Z_1, Z_2 de cette équation qui correspondent respectivement à z_1 et à z_2 .

Si l'on désigne par σ_i et ψ_i les valeurs de σ et de ψ qui correspondent à la i^e transformation, on a, en vertu des formules (91), (92), (154) et (155),

$$(175) \left\{ \begin{array}{l} \cos \sigma_i = \frac{V - U + m_i}{U + V}, \quad \sin \sigma_i = \frac{\sqrt{(2U - m_i)(2V + m_i)}}{U + V}, \\ \psi_i = \int -\cot \frac{\sigma_i}{2} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial u} du + \operatorname{tg} \frac{\sigma_i}{2} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial v} dv, \\ \psi_i = \int -\sqrt{\frac{2V + m_i}{2U - m_i}} \frac{\partial \tau}{\partial u} du + \sqrt{\frac{2U - m_i}{2V + m_i}} \frac{\partial \tau}{\partial v} dv. \end{array} \right.$$

Si l'on prend successivement pour équation (e), l'équation (130), l'équation (143) et l'équation (148), les formules (175) donneront

$$(176) \quad \begin{cases} \cos \sigma_i = m_i, & \sin \sigma_i = \sqrt{1 - m_i^2}, \\ \psi_i = -\cot \frac{\sigma_i}{2} \cdot u + \operatorname{tg} \frac{\sigma_i}{2} \cdot v + a_i, & (a_i = \text{const. arb.}); \end{cases}$$

$$(177) \quad \begin{cases} \cos \sigma_i = \frac{m_i}{u} - 1, & \sin \sigma_i = \frac{\sqrt{m_i} \sqrt{2u - m_i}}{u}, \\ \psi_i = v \sqrt{\frac{2}{m_i} - \frac{1}{u}} - \int \sqrt{\frac{m_i}{2u - m_i}} U'_1 du; \end{cases}$$

$$(178) \quad \begin{cases} \cos \sigma_i = \frac{v - u + m}{u + v}, & \sin \sigma_i = \frac{\sqrt{(2u - m_i)(2v + m_i)}}{u + v}, \\ \psi_i = \int -\sqrt{\frac{2v + m_i}{2u - m_i}} \frac{\partial \tau}{\partial u} du + \sqrt{\frac{2u - m_i}{2v + m_i}} \frac{\partial \tau}{\partial v} dv. \end{cases}$$

On a, pour la i^e transformation, en vertu des formules (156) à (159),

$$(179) \quad \omega_i = \frac{\sqrt{-C_i} \operatorname{ch} \psi_i}{\sqrt{U + V} \sin \sigma_i},$$

$$(180) \quad \begin{cases} z_1^{(i)} = \sqrt{U + V} (\cos \tau \cos \sigma_i - \sin \tau \sin \sigma_i \operatorname{th} \psi_i), \\ z_2^{(i)} = \sqrt{U + V} (\sin \tau \cos \sigma_i + \cos \tau \sin \sigma_i \operatorname{th} \psi_i), \end{cases}$$

si $i = 1, \dots, \nu$, et

$$(181) \quad \omega_i = \frac{e^{\psi_i}}{\sqrt{U + V} \sin \sigma_i},$$

$$(182) \quad \begin{cases} z_1^{(i)} = \sqrt{U + V} \cos(\tau + \sigma_i), \\ z_2^{(i)} = \sqrt{U + V} \sin(\tau + \sigma_i), \end{cases}$$

si $i = \nu + 1, \dots, n$.

L'expression (48) de a_{ik} s'écrit

$$(183) \quad a_{ik} = b_{ik} \omega_i \omega_k,$$

étant posé

$$(184) \quad b_{ik} = \frac{U + V - \varepsilon_{ik}}{e_k - e_i} - \frac{\Gamma_{ik}}{e_k - e_i} \cdot \frac{1}{\omega_i \omega_k}.$$

Les quantités ε_{ik} qui figurent dans (184) sont définies par l'égalité (46); elles ont pour expression

$$(185) \quad \varepsilon_{ik} = (U + V) (\cos \sigma_i \cos \sigma_k + \sin \sigma_i \sin \sigma_k \operatorname{th} \psi_i \operatorname{th} \psi_k),$$

si $i, k = 1, \dots, \nu$;

$$(186) \quad \varepsilon_{ik} = (U + V) (\cos \sigma_i \cos \sigma_k + \sin \sigma_i \sin \sigma_k \operatorname{th} \psi_i),$$

si $i = 1, \dots, \nu$; $k = \nu + 1, \dots, n$;

$$(187) \quad \varepsilon_{ik} = (U + V) \cos (\sigma_i - \sigma_k),$$

si $i, k = \nu + 1, \dots, n$.

Des formules (47), (40), (175), on déduit

$$(188) \quad e_k^{\text{ex}} - e_i = m_k - m_i = (U + V) (\cos \sigma_k - \cos \sigma_i).$$

L'expression (184) de b_{ik} devient, si l'on tient compte des relations (185) à (188), (179) et (181),

$$(189) \quad b_{ik} = \frac{1 - \cos \sigma_i \cos \sigma_k - \sin \sigma_i \sin \sigma_k \operatorname{th} \psi_i \operatorname{th} \psi_k}{\cos \sigma_k - \cos \sigma_i} - \frac{\Gamma_{ik}}{\sqrt{-C_i} \sqrt{-C_k}} \cdot \frac{\sin \sigma_i \sin \sigma_k}{(\cos \sigma_k - \cos \sigma_i) \operatorname{ch} \psi_i \operatorname{ch} \psi_k},$$

si $i, k = 1, \dots, \nu$;

$$(190) \quad b_{ik} = \frac{1 - \cos \sigma_i \cos \sigma_k - \sin \sigma_i \sin \sigma_k \operatorname{th} \psi_i}{\cos \sigma_k - \cos \sigma_i} - \frac{\Gamma_{ik}}{\sqrt{-C_i}} \cdot \frac{\sin \sigma_i \sin \sigma_k}{(\cos \sigma_k - \cos \sigma_i) \operatorname{ch} \psi_i e^{\psi_k}},$$

si $i = 1, \dots, \nu$; $k = \nu + 1, \dots, n$;

$$(191) \quad b_{ik} = \frac{\sin \frac{\sigma_i - \sigma_k}{2}}{\sin \frac{\sigma_i + \sigma_k}{2}} - \Gamma_{ik} \frac{\sin \sigma_i \sin \sigma_k}{(\cos \sigma_k - \cos \sigma_i) e^{\frac{\psi_i + \psi_k}{2}}},$$

si $i, k = \nu + 1, \dots, n$.

Il y a deux cas à distinguer : *Premier cas* : n pair. *Deuxième cas* : n impair.

32. Premier cas : n pair. En vertu des formules (183), (179), (181), l'expression (49) de Δ s'écrit

$$(192) \quad \Delta = \begin{vmatrix} 0 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & 0 & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & 0 \end{vmatrix} \cdot \left(\frac{\sqrt{-C_1} \dots \sqrt{-C_\nu} \operatorname{ch} \psi_1 \dots \operatorname{ch} \psi_\nu e^{\frac{\psi_{\nu+1} + \dots + \psi_n}{2}}}{\sin \sigma_1 \dots \sin \sigma_n} \right)^2 \frac{1}{(U + V)^n},$$

les éléments de la diagonale principale du déterminant étant tous nuls.

Il faudra remplacer $\sqrt{-C_1} \dots \sqrt{-C_v}$ ch $\psi_1 \dots$ ch ψ_v par 1, si $v = 0$, et $e^{\psi_{v+1} + \dots + \psi_n}$ par 1, si $v = n$.

Connaissant Δ , on pourra former l'équation (E) :

$$(E) \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial u \partial v} = \left(k - \frac{\partial^2 \log \Delta}{\partial u \partial v} \right) Z.$$

Les formules (51) donnent, si l'on remplace z_1, z_2 par leurs valeurs (123),

$$Z_1 = \sqrt{U + V} \cos \tau + \sum_i^{1..n} \varphi_i \mathfrak{z}_1^{(i)},$$

$$Z_2 = \sqrt{U + V} \sin \tau + \sum_i^{1..n} \varphi_i \mathfrak{z}_2^{(i)},$$

ou, à cause des formules (180) et (182),

$$(193) \quad \begin{cases} Z_1 = \sqrt{U + V} [(1 + A) \cos \tau - B \sin \tau], \\ Z_2 = \sqrt{U + V} [B \cos \tau + (1 + A) \sin \tau], \end{cases}$$

étant posé

$$(194) \quad A = \sum_i^{1..n} \varphi_i \mathfrak{z}_1 \cos \sigma_i$$

et

$$(195) \quad \left\{ \begin{array}{ll} B = \sum_i^{1..v} \varphi_i \sin \sigma_i \operatorname{th} \psi_i + \sum_i^{v+1..n} \varphi_i \sin \sigma_i, & \text{si } 1 \leq v \leq n-1; \\ B = \sum_i^{1..n} \varphi_i \sin \sigma_i, & \text{si } v = 0; \\ B = \sum_i^{1..n} \varphi_i \sin \sigma_i \operatorname{th} \psi_i, & \text{si } v = n. \end{array} \right.$$

Les φ_i sont les solutions du système

$$(196) \quad \sum_i^{1..n} b_{ik} \varphi_i = 1. \quad \left(\begin{array}{l} k = 1, 2, \dots, n \\ i = 1, 2, \dots, n, \text{ sauf } k \end{array} \right)$$

33. Deuxième cas : n impair. En vertu des formules (183), (179), (181), l'expression (71) de Δ s'écrit

$$(197) \quad \Delta = \begin{vmatrix} 0 & b_{12} & \dots & b_{1n} & 1 \\ b_{21} & 0 & \dots & b_{2n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & 0 & 1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix} \left(\frac{\sqrt{-C_1} \dots \sqrt{-C_v} \operatorname{ch} \psi_1 \dots \operatorname{ch} \psi_v e^{\psi_{v+1} + \dots + \psi_n}}{\sin \sigma_1 \dots \sin \sigma_n} \right)^2 \frac{1}{(U + V)^n},$$

les éléments de la diagonale principale du déterminant étant tous nuls.

Il faudra remplacer $\sqrt{-C_1} \dots \sqrt{-C_v} \operatorname{ch} \psi_1 \dots \operatorname{ch} \psi_v$ par 1, si $v = 0$, et $e^{\psi_{v+1} + \dots + \psi_n}$ par 1, si $v = n$.

Connaissant Δ , on pourra former l'équation (E) :

$$(E) \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial u \partial v} = \left(k - \frac{\partial^2 \log \Delta}{\partial u \partial v} \right) Z.$$

Les formules (74) donnent

$$Z_1 = \sqrt{U + V} \sum_i^{1..n} \varphi_i z_1^{(i)},$$

$$Z_2 = \sqrt{U + V} \sum_i^{1..n} \varphi_i z_2^{(i)},$$

ou, à cause des formules (180) et (182),

$$(198) \quad \begin{cases} Z_1 = \sqrt{U + V} (A \cos \tau - B \sin \tau), \\ Z_2 = \sqrt{U + V} (B \cos \tau + A \sin \tau), \end{cases}$$

A et B ayant les valeurs (194) et (195).

Les φ_i sont définis par le système

$$(199) \quad \begin{cases} \sum_i^{1..n} b_{ik} \varphi_i = 0, & \left(\begin{matrix} k = 1, 2, \dots, n \\ i = 1, 2, \dots, n, \text{ sauf } k \end{matrix} \right) \\ \sum_i^{1..n} \varphi_i = 1. \end{cases}$$

34. On a, dans les deux cas, en vertu des formules (61) et (83),

$$(200) \quad Z_1^2 + Z_2^2 + \sum_i^{1\dots\nu} (\sqrt{-C_i} \Omega_i) + \sum_i^{1\dots\nu} \sum_{k=1}^{1\dots\nu} \Gamma_{ik} \Omega_i \Omega_k = U + V.$$

Si $\nu = 0$, on remplacera le troisième terme du premier membre par 0.

Les formules (52) ou (75), (179) et (184) donnent

$$(201) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{-C_i} \Omega_i = \frac{\sqrt{U+V} \varphi_i \sin \sigma_i}{\operatorname{ch} \psi_i}, & \text{si } i = 1, \dots, \nu; \\ \sqrt{-C_i} \Omega_i = \frac{\sqrt{U+V} \varphi_i \sin \sigma_i}{e^{\psi_i}}, & \text{si } i = \nu + 1, \dots, n. \end{array} \right.$$

35. z_1, z_2 ainsi que les σ_i et les ψ_i étant supposées réelles (*), donnons aux Γ_{ik} des valeurs réelles et aux C_i des valeurs négatives; alors, en vertu des égalités (189), (190), (191), les b_i seront réelles et il en sera, par suite, de même des φ_i qui satisfont, soit au système (196), soit au système (199). Cela posé, les formules (193) et (198), jointes aux formules (194) et (195), et les formules (201) montrent que Z_1, Z_2 et les Ω_i seront aussi réelles.

36. Les expressions de Z_1 , de Z_2 et des Ω_i ne contiendront que des quantités connues, si l'on prend pour équation (e) l'équation (130) ou l'équation (143); elles ne contiendront que des quantités connues et des intégrales, si l'on prend pour équation (e) l'équation (148).

En effet, les Ω_i sont des fonctions de $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ et de $\psi_1, \dots, \psi_n$ et Z_1, Z_2 sont des fonctions des mêmes quantités et de τ .

(*) En vertu des formules (123), pour que z_1 et z_2 soient réelles, il faut et il suffit que τ soit réelle et que $U + V$ soit positive.

Dans les trois cas, en vertu des formules (176), (177), (178), les quantités $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ sont connues.

Si l'on prend pour équation (e) l'équation (130), τ est donnée par l'égalité (131) et, en vertu des égalités (176), les expressions de $\psi_1, \dots, \psi_n$ sont connues.

Si l'on prend pour équation (e) l'équation (143), τ est donnée par l'égalité (144) et, en vertu des formules (177), les expressions de $\psi_1, \dots, \psi_n$ contiennent, outre des quantités connues, les intégrales

$$\int \sqrt{\frac{m_i}{2u - m_i}} U'_i du, \quad i = 1, \dots, n.$$

Or, on peut mettre U_i sous une forme telle que ces intégrales puissent être calculées. Pour le montrer, nous résoudrons ce problème plus général : Étant données n fonctions de u , savoir $P_1, \dots, P_n$, mettre la fonction arbitraire U de u sous une forme telle que les n intégrales

$$(202) \quad \int P_1 U' du, \quad \int P_2 U' du, \quad \dots, \quad \int P_n U' du$$

puissent être calculées.

Des intégrations par parties donnent

$$\int P_1 U' du = P_1 U - \int U P'_1 du,$$

$$\int P_2 U' du = P_2 U - \int U P'_2 du,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\int P_n U' du = P_n U - \int U P'_n du.$$

Si l'on pose

$$U = \frac{U'_1}{P'_1}, \quad (*)$$

(*) Cette égalité suppose $P'_1 \neq 0$, c'est-à-dire P_1 variable. Si P_1 était constante, la première intégrale serait égale à $P_1 U$ et l'on n'aurait plus qu'à s'occuper des $n - 1$ autres intégrales.

U_1 désignant une nouvelle fonction arbitraire, les égalités précédentes deviennent

$$\begin{aligned}\int P_1 U' du &= \frac{P_1}{P'_1} U'_1 - U_1, \\ \int P_2 U' du &= \frac{P_2}{P'_1} U'_1 - \int \frac{P'_2}{P'_1} U'_1 du, \\ &\dots \dots \dots \\ \int P_n U' du &= \frac{P_n}{P'_1} U'_1 - \int \frac{P'_n}{P'_1} U'_1 du.\end{aligned}$$

La première quadrature est donc effectuée et les $n - 1$ autres intégrales s'expriment au moyen des suivantes :

$$(203) \quad \int \frac{P'_2}{P'_1} U'_1 du, \quad \dots, \quad \int \frac{P'_n}{P'_1} U'_1 du.$$

En opérant sur les $n - 1$ intégrales (203) comme on a opéré sur les n intégrales (202), on pourra calculer la première intégrale (203), et par suite la deuxième intégrale (202), et exprimer les $n - 2$ autres intégrales (203) au moyen de $n - 2$ intégrales de même forme que les intégrales (202) et (203). L'application répétée de la méthode déjà deux fois employée permettra de calculer les $n - 1$ premières intégrales (202) et d'exprimer la n^e de ces intégrales au moyen d'une intégrale de la forme

$$\int Q U'_{n-1} du,$$

Q désignant une fonction déterminée et U_{n-1} une fonction arbitraire. Pour calculer celle-ci, il suffira de poser, dans la formule

$$\int Q U'_{n-1} du = Q U_{n-1} - \int U_{n-1} Q' du,$$

que donne l'intégration par parties,

$$U_{n-1} = \frac{U'_n}{Q'}.$$

U_n désignant une fonction arbitraire. C'est au moyen de cette fonction et de ses dérivées des n premiers ordres que seront exprimées finalement les n intégrales (204).

Si l'on prend pour équation (e) l'équation (148), τ est une solution quelconque de l'équation (149) et s'exprime au moyen d'intégrales. En vertu de (178), il en est de même de $\psi_1, \dots, \psi_n$.

IX.

37. Indiquons quatre applications de la formule (200) à la géométrie.

Nous prendrons pour n , dans la première, un nombre ≥ 3 et dans les trois autres, comme dans le cas général (n° 31), un nombre ≥ 2 .

I. Posons $\nu = 1$ et annulons tous les Γ_{ik} sauf Γ_{23} . La formule (200) donnera

$$Z_1^2 + Z_2^2 + (\sqrt{-C_1} \Omega_1)^2 + 2\Gamma_{23}\Omega_2\Omega_3 = U + V$$

ou

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 - Z_4Z_5 = U + V,$$

étant posé

$$Z_3 = \sqrt{-C_1} \Omega_1, \quad Z_4 = \Omega_2, \quad Z_5 = -2\Gamma_{23}\Omega_3.$$

Les quantités $Z_1, Z_2, \dots, Z_5$ satisfont à l'équation (E); donc la sphère définie, en coordonnées cartésiennes rectangulaires x, y, z , par l'équation

$$Z_4(x^2 + y^2 + z^2) + 2Z_1x + 2Z_2y + 2Z_3z + Z_5 = 0,$$

engendre une congruence qui est cyclique d'une infinité de manières (*).

(*) Au sujet des congruences de sphères cycliques, le lecteur pourra consulter le mémoire de M. Guichard, cité plus haut, et le travail de l'auteur inséré dans ce *Bulletin*, année 1919, p. 339.

II. Posons $\nu = 2$ et annulons tous les Γ_{ik} . L'équation (200) donnera

$$Z_1^2 + Z_2^2 + (\sqrt{-C_1} \Omega_1)^2 + (\sqrt{-C_2} \Omega_2)^2 = U + V$$

ou

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2 = U + V,$$

étant posé

$$Z_3 = \sqrt{-C_1} \Omega_1, \quad Z_4 = \sqrt{-C_2} \Omega_2.$$

Les quantités Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 sont des solutions de l'équation (E); donc, en géométrie non euclidienne elliptique, la surface, lieu du point de coordonnées Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 , est la polaire réciproque, par rapport à l'absolu, d'une surface sur laquelle le réseau conjugué (u, v) est persistant (*).

III. Posons $\nu = 0$ et annulons tous les Γ_{ik} sauf Γ_{12} que nous prendrons égal à une constante positive. L'équation (200) donnera

$$Z_1^2 + Z_2^2 + \left[\sqrt{\frac{\Gamma_{12}}{2}} (\Omega_1 + \Omega_2) \right]^2 - \left[\sqrt{\frac{\Gamma_{12}}{2}} (\Omega_1 - \Omega_2) \right]^2 = U + V$$

ou

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 - Z_4^2 = U + V,$$

étant posé

$$Z_3 = \sqrt{\frac{\Gamma_{12}}{2}} (\Omega_1 + \Omega_2), \quad Z_4 = \sqrt{\frac{\Gamma_{12}}{2}} (\Omega_1 - \Omega_2).$$

Les quantités Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 sont des solutions de l'équation (E); donc, en géométrie non euclidienne hyperbolique, la surface, lieu du point de coordonnées Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 , est la polaire réciproque, par rapport à l'absolu, d'une surface sur laquelle le réseau conjugué (u, v) est persistant.

(*) Au sujet des surfaces non euclidiennes qui possèdent un réseau conjugué persistant, le lecteur pourra consulter le mémoire de M. Bianchi, cité plus haut.

IV. Posons $\nu = 1$ et annulons tous les Γ_{ik} . L'égalité (200) donnera

$$Z_1^2 + Z_2^2 + (\sqrt{-C_1} \Omega_1) = U + V$$

ou

$$(204) \quad Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 = U + V,$$

étant posé

$$Z_3 = \sqrt{-C_1} \Omega_1.$$

Les quantités Z_1, Z_2, Z_3 étant solutions de l'équation (E), les fonctions x, y, z données par les égalités

$$x = H(Z_2, Z_3), \quad y = H(Z_3, Z_1), \quad z = H(Z_1, Z_2)$$

sont les coordonnées d'une surface rapportée au réseau (u, v) de ses asymptotiques. En vertu de (204), la courbure totale de cette surface est égale à $-\frac{1}{(U+V)^2}$.

On peut faire en sorte que les figures considérées dans les quatre applications précédentes soient réelles (n° 35).

Les formules qui définissent ces figures ne contiennent que des quantités connues, si l'on prend pour équation (e), l'équation (130) ou l'équation (143); elles ne contiennent que des quantités connues et des intégrales, si l'on prend pour équation (e) l'équation (148).

Cette propriété, en ce qui concerne les trois premières applications, résulte des considérations du n° 36. Établissons-la pour la quatrième. Si l'on se reporte au n° 17, où l'on fera $p = 2$ et où l'on annulera tous les C_i sauf C_1 , on reconnaîtra que x, y, z sont des fonctions connues de $H(z_1, z_2)$, de $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ et de $\psi_1, \dots, \psi_n$.

Dans tous les cas, en vertu des formules (176), (177), (178), les quantités $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ sont connues.

Si l'on prend pour équation (e) l'équation (130), l'intégrale $H(z_1, z_2)$, en vertu de (167), et $\psi_1, \dots, \psi_n$, en vertu de (176), sont connues.

Si l'on prend pour équation (e), l'équation (143), $H(z_1, z_2)$ et $\psi_1, \dots, \psi_n$ s'expriment, en vertu de (170) et de (177), en fonction de quantités connues et des intégrales

$$\int u U_i' du, \quad \int \sqrt{\frac{m_i}{2u - m_i}} U_i' du, \quad i = 1, \dots, n.$$

Or, il est possible de mettre U_i sous une forme telle que ces $n + 1$ intégrales puissent être calculées (n° 36).

Enfin, si l'on prend pour équation (e) l'équation (148), les équations (173) et (178) montrent que $H(z_1, z_2)$ et $\psi_1, \dots, \psi_n$ sont données par des quadratures.

BIOLOGIE. — **L'habitat et les allures du Collembole marin
Actaletes,**

par VICTOR WILLEM, membre de l'Académie.

Au cours des mois d'août et de septembre derniers, à Wimeux, j'ai eu l'occasion de retrouver, en grand nombre, *Actaletes*, que j'y avais étudié en septembre 1900⁽¹⁾ et vainement recherché, diverses années, pendant les vacances de Pâques. En récoltant, à la Tour de Croï, des échantillons pour des études anatomiques, j'ai été frappé par les allures de ce Collembole marin, qu'on n'a rencontré jusqu'à présent que sur les rochers du Boulonnais.

1. **Habitat.** — *Actaletes* s'observe, à la Tour de Croï, sur de gros blocs rocheux appartenant au Portlandien supérieur et faisant partie de deux des assises de grès que comprend le socle du vieux fort. En raison de l'existence d'un petit synclinal, incliné vers l'ouest, ces couches, épaisses d'environ 60 à 80 centimètres, plongent vers la mer et forment deux cercles concentriques, visibles surtout du côté sud, de roche en place ou éboulée en fragments, sur la couche résistante inférieure, par suite de l'enlèvement de l'argile sous-jacente. Dans la région du haut, ces rochers à *Actaletes* sont couverts, sur leurs faces verticales et supérieure, de *Ceramium rubrum*, avec des touffes d'Ulves et de grands Fucus; ils portent souvent à leur face inférieure un revêtement d'*Halichondria panicea* et quelques groupes de *Morchellium argus*; dans la zone des Laminaires, on y voit suspendus des *Actinoloba dianthus*. Du côté ouest, vers le large, les deux bancs se continuent, à un niveau nota-

(1) V. WILLEM, *Description de l'« Actaletes Neptuni »* Giard. (BULLETIN SCIENTIFIQUE DE LA FRANCE ET DE LA BELGIQUE, t. XXXIV, 1901.

blement inférieur, par deux tables horizontales affaissées et craquelées, dont les interstices sont occupés par de grosses agglomérations cavernueuses de tubes d'Hermelles. Plus haut, les masses d'Hermelles sont moins volumineuses et garnissent surtout le bas des rochers. Ces blocs de grès hétérogène ont leurs faces creusées d'anfractuosités et des fissures s'engagent plus ou moins profondément dans leur masse; leurs cavités abritent de petits groupes d'Hermelles, des Serpules, des *Saxicava*, *Pilumnus hintellus* et nombre d'animaux variés. Presque toujours, ces blocs sont revêtus, sur de larges surfaces, d'une couche de tubes de *Polydora*.

Actaletes ne s'observe qu'en très petit nombre par les marées de 18; on en trouve encore sur des portions des bancs de la zone à Laminaires, qui ne sont accessibles que par des marées calmes de 6 ou 8. Toutes les hautes mers recouvrent, de 4 à 7 mètres d'eau, la bande circulaire habitée par le Collembole en question : sa zone supérieure peut rester submergée, aux mortes eaux, même par temps calme, pendant deux ou trois jours; et la zone inférieure peut n'être découverte qu'à des intervalles assez éloignés. *Actaletes* est donc un Insecte « sous-marin », encore que sa respiration soit franchement aérienne et qu'il ait conservé un système trachéen, exception rare parmi les Collemboles ⁽¹⁾. Il s'abrite, à mer haute, dans les nombreuses anfrac-

(1) Un système trachéen exclusivement céphalique, débutant de chaque côté par un orifice stigmatique (*s*) sans cadre, situé dans le pli qui sépare la tête du prothorax. La couche chitineuse des téguments plonge horizontalement dans la cavité céphalique en conservant son épaisseur et sans présenter de renforcement ou de crête spiraloïde; la couche chitinogène contient aussi quelques grains pigmentaires. Après avoir fourni du côté externe des rameaux trachéens qui se dirigent vers les muscles de la maxille (*m'*) et du côté interne des rameaux pour le collier nerveux périœsophagien (*o*), le tube principal, à peu près au-dessus des muscles transversaux adducteurs des mandibules, acquiert des parois très minces. Du cul-de-sac terminal qui suit immédiatement part un fouillis de petits troncs trachéens dont la très grande majorité s'éparpillent sur les faces postérieure et externe du ganglion cérébroïde (*c*); d'autres se rendent soit au collier œsophagien (*o*), soit à la face dorsale du ganglion sous-œsophagien (*g*); un ramuscule me paraît se diriger vers la mandibule (*m*).

tuosités remplies d'air qu'offrent les blocs de grès; j'ai pu m'en assurer directement, en découvrant dans une galerie de 1 centimètre de diamètre et profonde de 2 décimètres, qu'avait mise à

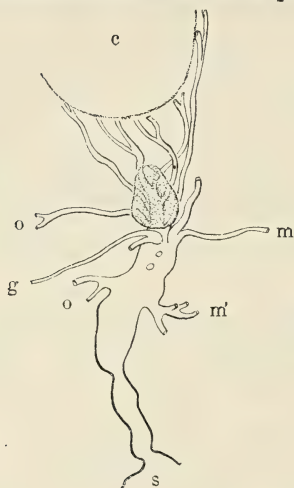


FIG. 1. — Système trachéen droit; vue dorsale ($\times 650$). Explications des lettres dans le texte ci-contre; le corps piriforme foncé est le noyau d'une cellule chitinogène.

La figure 2 montre, sur une coupe sagittale de l'animal, l'extension de ce système trachéen à la fois archaïque et résiduel, qui persiste, d'après un principe dont j'ai maintes fois signalé les applications, à l'usage des centres nerveux principaux.

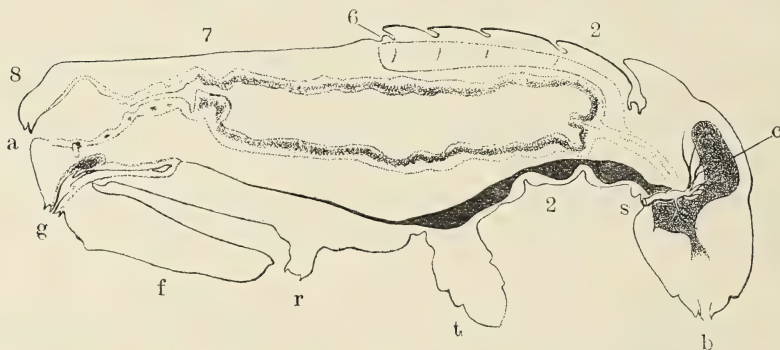


FIG. 2. — Coupe sagittale d'*Actaletes* femelle ($\times 145$), montrant le tube digestif, le cœur dorsal avec ses quatre ostioles, le système nerveux central et les conduits génitaux.

a, anus; 2, 6, 7, 8, numérotation des segments postcéphaliques; *b*, bouche; *c*, ganglions sus-œsophagiens; *f*, manubrium de la furca; *g*, orifice génital; *r*, retinaculum; *s*, stigmate trachéen; *t*, tube ventral.

nu la démolition d'un pan de roc, une vingtaine d'individus et, ce qui est plus démonstratif, un amas d'exuvies; ailleurs, j'ai rencontré des échantillons vivants et des dépouilles entre les

deux valves d'une coquille vide, restée en place, de *Saxicava*. Il est probable, mais je ne l'ai pas constaté objectivement, que l'Insecte puisse se loger dans les anfractuosités des accumulations d'Hermelles et peut-être aussi faut-il tenir compte de cloches aériennes persistant sous les faces inférieures, horizontales, de certains blocs de grès : l'existence de semblables cloches est indiquée par les bruits de glou-glou qu'on entend au moment de la baisse des eaux ⁽¹⁾.

Après le retrait des eaux, on observe dans la zone en question, surtout par des temps très clairs, des *Actaletes* très nombreux sur les parois verticales des blocs gréseux, grimpant obstinément sur les fucus, les ulves et surtout sur les touffes agglutinées de *Ceramium*. Si un saut rejette un individu au pied du bloc, il reprend son ascension sans retard. Et la population visible d'un rocher paraît ainsi occupée exclusivement à grimper sans répit et à sauter avec une fréquence qui varie avec l'agitation de l'atmosphère. Des exemplaires, récoltés dans un tube, gagnent obstinément les parties supérieures du récipient, même quand il est entièrement obscurci et manifestent donc ce qu'on peut appeler un « géotropisme négatif ». Ils s'orientent dans la direction de la région la plus lumineuse du ciel ; si l'on couvre d'une lame opaque la partie supérieure du tube maintenu horizontalement, on voit les *Actaletes* grimpant sur les parois s'arrêter le long des génératrices du cylindre qui séparent la zone éclairée de la zone obscurcie et ne point pénétrer dans celle-ci ; ils se rassemblent, d'autre part, dans la zone supérieure de la portion éclairée du tube, maintenu horizontalement, quand on en obscurcit une partie en l'entourant de la main fermée : un ensemble de réactions, qui décèlent un « phototropisme positif ».

(1) On rencontre dans le même habitat une Punaise, *Aepophilus Bonnairi* (Signoret), que Giard et moi avons prise pour la première fois à la Tour de Croï, en 1894. Comme l'augurait Giard, cet Hémiptère suce les Hermelles ; et ses repas semblent s'espacer d'assez longs intervalles. Cette forme sous-marine possède, chez l'adulte, un système trachéen.

Mais, après une heure ou une heure et demie de découvert, on s'aperçoit que les allures des *Actaletes* sont modifiées : leurs déplacements verticaux sont moins actifs, leurs bonds moins fréquents, et le nombre des individus visibles paraît fort réduit.

Ayant rapporté mes captures au laboratoire, dans des tubes logés en poche ou dans un seau en toile, je retrouve les *Actaletes* immobiles, agglomérés en îlots compacts, sur la paroi en verre, sur le bouchon, plus rarement sur un fragment d'Algue. Il faut, pour disperser les individus agglomérés, des chocs assez sérieux et répétés du tube, et les groupes se reconstituent très rapidement, aux mêmes places ou à d'autres. Ces réactions font songer, au premier abord, à des phénomènes qu'on a groupés sous le vocable de « thigmotactisme ».

D'autre part, les individus momentanément dispersés et reformant des agglomérations nouvelles suivent des trajectoires qui obéissent encore à un « géotropisme négatif », et leur redistribution semble indiquer un « phototropisme négatif », inverse de celui qu'on a constaté sur la plage : il y aurait eu, dans l'intervalle des observations « renversement du phototropisme ».

Puis un tube restant exposé sur une table, en face d'une fenêtre, avec une agglomération d'*Actaletes* localisée, en haut du récipient, dans sa région la plus éloignée de la source de lumière diffuse, je constate, plusieurs heures plus tard, la désagrégation progressive du groupement ; les individus qui s'en séparent successivement, en l'espace de deux heures, suivent la génératrice supérieure du tube horizontal, pour gagner la région la plus proche de la fenêtre et s'y assembler : le phototropisme redeviendrait positif.

2. Phototropisme. — Ces constatations feraient soupçonner, chez le Collembole soumis au rythme des marées, des renversements alternatifs du phototropisme. Et la première question qui se posait, en même temps que la vérification expérimentale de cette hypothèse, était de chercher la cause de l'inversion éventuelle.

Le 3 septembre, entre 9 $\frac{1}{4}$ et 10 heures (heure solaire) ⁽¹⁾, je récolte dans quatre tubes des exemplaires nombreux, la plupart au moment où l'eau montante atteint les trois blocs qui les hébergent. Je constate sur place leur phototropisme positif. Pendant le trajet du retour à la maison, ils s'agglomèrent dans le haut des tubes. Les groupes, dispersés par tapotements, se reforment en quelques minutes dans les récipients que j'ai couchés sur la tablette d'une fenêtre, et la plupart dans la moitié recouverte d'une étoffe opaque, qui est tournée du côté de la chambre. Le « phototropisme » est, dirait-on, négatif.

Des quatre tubes, deux restent exposés, sur la fenêtre, à la lumière du jour, par ciel gris; les deux autres sont abrités sous un écran opaque, dans une armoire fermée : mon intention est de vérifier si les modifications éventuelles du phototropisme seraient variables chez les exemplaires exposés à la lumière ou maintenus à l'obscurité.

Dans les tubes exposés à la lumière, qu'on peut surveiller facilement, les agglomérations persistent, pendant des heures, dans leurs localisations respectives, jusqu'au moment où des secousses sont imprimées aux récipients. A 17 heures, la reconstitution des agglomérations ne révèle pas de phototropisme bien accusé; il y a cependant indication de « phototropisme négatif » pour un des lots exposés à la lumière.

Mais à 20 heures, il y a manifestation très nette de phototropisme positif, à la lumière d'une ampoule électrique de 16 bougies, dont on approche les tubes; ce phototropisme n'est pas spécialement accusé chez les *Actaletes* précédemment maintenus à l'obscurité. Et le lendemain, à 6 h. 45, à 9 heures, à 13 heures, à 16 heures, à 22 heures, puis le troisième jour, durant toute la matinée, le phototropisme se révèle positif, avec une intensité variable, dépendant, semble-t-il, de l'intensité de la lumière excitatrice.

(1) Mer basse de 10, à 8.50 heures.

En résumé, le phototropisme s'est montré pendant la durée de l'observation, qui comporte plus de cinquante heures, constamment positif, dès le soir du premier jour, une dizaine d'heures après la capture : il n'y a manifestement pas de périodicité persistante, qui correspondrait au rythme des marées.

Mais il s'est produit un « renversement du phototropisme », immédiatement après la capture. La comparaison des deux lots d'*Actaletes* démontre qu'une exposition préalable des sujets à la lumière (diffuse) ne peut pas être raisonnablement invoquée pour expliquer le renversement observé et les alternances rythmiques qui paraissent, au premier abord, exister dans les conditions naturelles.

3. Régime alimentaire. — J'ai cru qu'il fallait alors chercher cette explication dans l'état de nutrition, et peut-être dans la fatigue musculaire des individus considérés; il convenait, avant tout, d'établir le régime alimentaire d'*Actaletes*.

Les pièces buccales d'*Actaletes* sont du type ordinaire : les mandibules ont des dents terminales propres à scier et une plaque masticatrice de dents en pavés; les maxilles, munies de deux cardes en éventails, semblent organisées pour attirer les particules alimentaires dans la cavité buccale ⁽¹⁾. Je m'attendais donc à voir cette forme se nourrir, comme la plupart des Collemboles, de substances végétales, des tissus d'Algues et particulièrement de *Ceramium*; mais c'est en vain que j'ai cherché à faire attaquer par mes sujets des fragments d'Algues variées, même hachés menus.

Ce fut aussi inutilement que je leur présentai des fragments de *Halichondria panicea* et de *Morchellium argus*. Puis, me

(1) Ces pièces sont moins robustes et moins compliquées que les mandibules et les maxilles des formes de Collemboles plus grandes (telles *Sminthurus* ou *Tomocerus*); mais elles sont du type masticateur et ne sont pas transformées en scies, comme chez *Anurida*.

souvenant que GIARD capturait autrefois des *Actaletes* au moyen d'appâts constitués par des bras d'Astéries arrachés et écrasés, j'ai offert à des exemplaires captifs, mais assez inutilement, des parcelles d'organes internes de Crustacés ou d'Étoile de mer.



FIG. 3. — Extrémités de la mandibule et de la maxille droite; vue dorsale.

Il en fut tout autrement pour une Hermelle, une Serpule ou un Polydora, extrait de son tube, ou pour un fragment de téguments d'*Asterias rubens* : *Actaletes* s'y accroche obstinément ; on voit, sous le microscope, les mandibules et les maxilles se mouvoir avec rapidité ⁽¹⁾, et le Collembole grossir à vue d'œil

(1) Pendant ce temps, le Collembole maintient relevées ses antennes frémissantes aussi loin que possible de la substance gluante qu'il ingère. Ce fait me paraît indiquer que les terminaisons olfactives, qu'on peut raisonnablement supposer devoir être utilisées au moment de la préhension des aliments, ne sont pas portées par les antennes, comme c'est le cas chez la plupart des Insectes ; il est, par contre, favorable à l'idée que l'odorat aurait pour siège l'organe post-antennaire, dont la structure générale concorde avec celle d'un chemo-récepteur à distance. Chez *Actaletes*, cet organe s'aperçoit comme un petit champ ovale, de la grandeur d'un ocelle, dans le pli qui sépare le champ oculaire de la base de l'antenne.

Il ne semble pas, d'ailleurs, que l'odorat intervienne beaucoup dans la découverte, à distance, d'une proie : des *Actaletes*, circulant sur un bloc à demi immergé et couvert d'une cloche en verre, passent à 3 ou 4 millimètres d'une Annélide exposée, sans se détourner de leur course ; ils ne s'y arrêtent qu'en passant tout à côté.

par la distension de son intestin moyen. Le remplissage dure environ deux minutes; l'intestin moyen se montre alors occupé par une masse liquide, assez transparente, contenant des globules très fins, variant avec la proie attaquée.

Quand la proie est relativement de très grande taille, *Actaletes* se contente des couches superficielles des téguments. S'attaquant, en nombre, à une proie plus petite, comme un *Polydora* (qui est cependant 20 à 50 fois plus volumineux qu'un *Actaletes*), les assaillants entament les téguments plus profondément; il se peut que des œufs soient expulsés par des déchirures, et l'on voit alors des *Actaletes* absorber même l'eau de mer, mêlée de mucus, de sang, de globules vitellins, qui entoure d'un ménisque le ver livré en pâte.

Sur les rochers, à mer basse, je constate qu'*Actaletes* s'attaque, souvent en très grand nombre, aux Étoiles de mer, surtout à leurs pédicellaires; je rencontre fréquemment des individus occupés à brouter sur *Actinoloba dianthus*, et j'observe un jour une douzaine de Collembolés rassemblés sur le pharynx évaginé d'un *Tealia crassicornis*, dans la zone des Laminaires.

Par contre, dans mes tubes, un *Phascolosoma*, qui se rencontre dans les anfractuosités des rochers, *Eulalia viridis*, et un petit Térébellien sont négligés : deux *Actaletes* qui s'approchent de ce dernier s'engluent misérablement dans le mucus abondant du Tubicole. A la plage, *Doris tuberculata* est toujours délaissé. On dirait qu'une couche abondante de mucus constitue une protection dont s'écartent les *Actaletes*.

Ces données sur l'alimentation d'*Actaletes* permettent, je pense, de comprendre la localisation du Collembolé : si des anfractuosités aériennes rendent possible son existence dans un habitat exceptionnel, c'est, avec ce facteur, la présence d'Astéries, de *Polydora*, et la fréquence de formes plus caractéristiques, comme *Actinoloba* et les Hermelles, qui fixent le niveau occupé par *Actaletes* dans la zone des marées.

Dans mes essais, les Annélides offerts aux *Actaletes* sont nus. Comment, dans les circonstances naturelles, le Collembole peut-il s'attaquer à ces Tubicoles, dont l'un, *Polydora*, est rétracté dans un tube de calibre trop étroit pour le corps du carnassier adulte, et dont les autres se protègent, du côté de l'orifice libre, par un opercule solide ou par une brosse de soies chitineuses? Je vois, dans mon petit aquarium recouvert d'une cloche, les *Actaletes* courir sur la portion émergée d'un bloc d'Hermelles et pénétrer, mais sans s'arrêter, dans les tubes habités par des individus rétractés. Après plusieurs heures d'exposition à l'air, certaines Hermelles s'étalent de leurs tubes et deviennent accessibles aux *Actaletes*, mais ce sont des individus dont les tubes, brisés postérieurement, ont laissé s'écouler leur eau. Cela semble indiquer que, dans les conditions naturelles, *Actaletes* ne peut guère s'attaquer qu'aux Tubicoles dont les étuis ont été accidentellement fracturés, ce qui ne doit pas être exceptionnellement rare sur les brisants où prospèrent les Hermelles.

Après vingt à trente heures, il y a expulsion d'un excrément, que je retrouve sur la paroi de mes récipients : une masse en forme de boudin, gélatineuse, transparente, rosée ou jaunâtre avec granulations, de la grandeur et de la forme du contenu solide de l'intestin moyen, qui a donc été rejetée en bloc ⁽¹⁾.

4. **Agglomérations.** — Or, c'est spécialement après un repas que je vois mes *Actaletes* constituer dans mes récipients ces agglomérations curieuses, où les individus sont groupés par quelques unités ou par douzaines. Ils y sont complètement immobiles, les pattes plus fléchies que pendant la marche,

(1) La figure 2 montre que l'intestin terminal, qui doit ainsi, à un moment déterminé, recevoir le noyau solide du contenu de l'intestin moyen, est beaucoup plus long que chez les autres formes de Collemboles (Cf. *Recherches sur Collemboles et Thysanoures*, 1900, planches III, IV, VI, VII, VIII).

chacun des associés touchant au moins un compagnon par une de ses antennes, en ce sens que le premier, le deuxième ou plus rarement le troisième article de cette antenne se trouve pressé contre le corps du voisin de façon à fléchir l'organe vers l'arrière.

Un individu s'amène, qui chemine en tapotant alternativement le substratum de ses antennes dirigées obliquement vers l'avant; dès le premier contact d'une de ses antennes avec le corps d'un autre Collembote, situé à la périphérie du groupement, le sujet s'arrête, pendant que ses antennes, étendues transversalement, continuent à frémir pendant quelques secondes; puis il avance un tantinet encore, jusqu'à ce que l'antenne se trouve fléchie en arrière. Et l'agglomération compte un associé immobile de plus.

À l'occasion d'une faible excitation, comme un choc léger du récepteur, on voit certains associés, peu serrés, remuer un instant leurs pattes et se pousser en avant jusqu'à obtenir un contact fléchissant davantage leurs antennes : c'est ainsi que les amas deviennent de plus en plus pressés.

Les agglomérations une fois constituées, on peut, sans secousse, les orienter comme on veut, et diriger leurs constituants n'importe comment par rapport à la lumière ou à la verticale. Pour disperser les groupements, il faut des secousses répétées, l'arrivée d'une nappe d'eau de mer qui les sépare du substratum, ou une augmentation brusque de l'éclairage. — Et ils se reconstituent, plus ou moins rapidement selon l'intensité de l'excitation perturbatrice : les individus dissociés n'obéissent que peu de temps, après cette excitation, à leur géotropisme et à leur phototropisme. Les groupements se reconstituent ordinairement plus lâches qu'antérieurement : tout associé se retrouve à une distance plus grande du voisin qu'il touche par une antenne fléchie; et il arrive qu'il y ait momentanément à la périphérie des individus isolés, sans contact avec

d'autres : comme si l'immobilisation, pour avoir duré, rendait plus difficile la reprise de la locomotion.

De cette manière donc se reconstituent dans mes récipients des agglomérations, en plaques circulaires sur les parois de verre (où elles se prêtent à l'observation sous le microscope), en amoncellements pressés, dans les petites anfractuosités que j'ai entaillées dans le liège de certains bouchons. L'arrivée d'eau de mer sur un îlot le soulève et le disperse; mais une manœuvre brusque arrive à submerger en bloc un amas logé dans une dépression : ses constituants restent immobiles, comme dans toute agglomération, sauf des mouvements de tassement que révèlent les changements de forme de la membrane argentée tendue sur les aspérités périphériques de l'amoncellement non mouillable. Et l'on se rend compte de ce que la bulle d'air qui reste englober le groupe est ordinairement beaucoup plus volumineuse que la somme des petites bulles que maintiendraient individuellement les participants isolés. — La formation d'agglomérations se comprend ainsi présenter des avantages dans les conditions naturelles, quand l'eau montante cerne un groupe d'*Actaletes* dans une dépression peu profonde : c'est une quantité d'air respiratoire plus grande, conservée à la disposition des Collemboles submergés temporairement.

Cette tendance à l'agglomération se manifeste spécialement chez les individus qui ont mangé plus ou moins récemment. Ainsi, des *Actaletes* qui, 36 heures auparavant, s'étaient rassasiés sur une Étoile de mer et refusaient de s'attaquer à une proie nouvelle, persistaient à constituer une agglomération à la lumière diffuse. Une exposition au soleil disperse momentanément les individus; mais ils finissent par se rassembler au haut du tube, dans une région relativement bien éclairée. — Par contre, des exemplaires qui ont jeûné depuis huit jours circulent, dans des conditions analogues, pendant deux heures au moins.

L'expérience montre que l'influence du repas précédent —

qui peut persister plus d'un jour ⁽¹⁾ — peut être suffisante pour établir une tendance à l'agglomération très prononcée, sans qu'il faille invoquer l'influence de mouvements antérieurs prolongés (« fatigue ») : les exemplaires de la première expérience, en effet, étaient restés agglomérés et immobiles pendant un jour et demi et ne furent amenés à marcher que pendant quelques minutes.

Mais la « fatigue » me paraît aussi favoriser la tendance à l'agglomération. Des exemplaires qui, le matin du 19 septembre, ont sauté deux heures au soleil avant de se réfugier — lorsque le récipient a été mis à la lumière diffuse — dans un creux obscur, cessent de sauter, l'après-midi, au soleil, après cinq minutes, et se rassemblent en dix minutes dans un enfoncement. — Le lendemain matin, j'obtiens un résultat analogue, semble-t-il, malgré l'inconstance de l'ensoleillement ; la persistance de temps couvert ne m'a pas permis de recommencer suffisamment ces essais.

En fin de compte, le phénomène de l'agglomération apparaît comme une réaction où l'attouchement particulier et la poussée en arrière d'une antenne déterminent une inhibition des mouvements de locomotion ; et cette réaction se manifeste spécialement chez les *Actaletes* qui ont mangé plus ou moins récemment, ou, semble-t-il, qui ont précédemment beaucoup sauté. — Je ne puis ranger une réaction semblable dans le groupe des tactismes ; elle comporte des associations de sensations, elle me rappelle des phénomènes d'« immobilisation réflexe » ; et, s'il me fallait absolument la classer, ce serait parmi « les complexes de réflexes qui se manifestent chez un animal dans certains états de sensibilisation de l'organisme ».

(1) Remarquons que cette influence du repas précédent, variable, et qui peut persister plus d'une journée, ne peut déterminer dans les allures d'*Actaletes* un rythme concordant avec celui des marées.

5. **Action de la lumière.** — Mais revenons à l'action de la lumière. J'ai maintenu longtemps de nombreux *Actaletes* dans un flacon cylindrique (d'environ un demi-litre), couvert par une plaque de verre, et constituant une sorte d'aquarium où émergeait de l'eau un petit bloc d'Hermelles, sur lequel j'avais disposé une Ulve et une petite touffe de *Ceramium*. Dans ce récipient où ils auraient vécu indéfiniment, semble-t-il, les *Actaletes*, abrités contre toute agitation de l'atmosphère et exposés à une lumière diffuse qui ne variait pas brusquement, restaient immobiles pendant des journées, la plupart amassés dans une anfractuosité du rocher, quelques-uns, isolés, sur la paroi en verre ou sur la surface de l'eau. Mais si, comme j'en ai dit un mot au paragraphe précédent, on expose le récipient à la lumière directe, au besoin en éclairant la cachette antérieurement obscurcie, tous les *Actaletes* se mettent à courir et à sauter; et leurs mouvements persistent pendant une heure, deux heures, toute la durée de leur exposition au soleil.

Un éclairage intense détermine donc une activation de la locomotion, rappelant l'action tonique qu'exercent les sensations lumineuses sur notre énergie musculaire. Et, pendant ce temps, si un individu en mouvement passe dans une zone obscure et se trouve soustrait à cette action de l'éclairage, il ralentit sa marche et même s'immobilise, surtout s'il vient à toucher un autre individu : après quelque temps, on trouve accumulés dans un creux du bloc d'Hermelles, qui a fonctionné comme « piège », un certain nombre des hôtes du récipient.

Or, je vois dans ce qui précède l'explication du phénomène décrit au paragraphe 2, qui pouvait au premier abord évoquer l'idée d'un renversement du phototropisme, d'abord positif : des *Actaletes*, introduits à la plage dans un tube qui séjourne ensuite une demi-heure dans une poche ou dans un seau de toile, se retrouvent agglomérés; dispersés à la lumière diffuse, par une agitation mécanique, ils s'agglomèrent de nouveau, de préférence dans les régions obscures du tube.

Car un fait m'a frappé dans la suite de ces observations : c'est que, si les *Actaletes*, à la plage ou au laboratoire, s'orientent positivement par rapport à la lumière et pivotent instantanément sur eux-mêmes quand on retourne leur tube de 180°, par contre, les exemplaires qui viennent de s'agglomérer et que je disperse, ne manifestent aucune orientation de ce genre ; ils courent dans tous les sens, en rond quelquefois, avant de se réunir. Je vois donc là, non le remplacement d'un phototropisme positif par un phototropisme négatif, qui ne se constate pas, mais l'intervention d'un comportement nouveau, assez compliqué, qui masque le phototropisme positif.

Ceci n'est pas tant une querelle de mots qu'une tendance analytique. J'avoue, en effet, une tendance à interpréter les réactions d'animaux comme les Insectes par des facteurs moins vagues que les tropismes, par des réflexes d'ordre plus compliqué. L'introduction dans la psychologie animale de la notion des tropismes a eu incontestablement une influence heureuse, en aidant à débarrasser cette discipline d'explications stérilisantes et en suscitant nombre de recherches fécondes. Mais on a abusé, je pense, des explications simplistes par les tropismes, qui ont à mes yeux le défaut de détourner l'attention du mécanisme de la réception et du fonctionnement de l'appareil qui relie le récepteur à l'effecteur. Et je crois constater que si l'on pousse l'analyse des phénomènes dans ces directions, on est amené fort souvent à expliquer des réactions soi-disant tropiques, par des « associations de sensations » et par l'interférence de réflexes compliqués. J'espère pouvoir développer prochainement ces idées.

Pour en revenir à *Actaletes*, il me semble que les expériences d'insolation qui précèdent, expliquent quelques faits observés dans les conditions naturelles. Par temps couvert, on ne rencontre sur les roches de la plage qu'un nombre très minime de Collembolles, qui ne sautent pas : ils sont restés dans leurs retraites ou se meuvent modérément ; et c'est sur, ou plutôt

sous les Astéries qu'on en capture, dans la zone habituelle. Par des marées médiocres, qui ne découvrent certains rochers qu'un temps trop court, on n'aperçoit que de très rares individus sur des blocs dont les anfractuosités en recèlent d'innombrables.

6. Géotropisme. — Comme je l'ai signalé déjà, *Actaletes* manifeste, constamment, un géotropisme négatif, sur le fonctionnement duquel je n'ai actuellement aucune idée. Je lui aperçois deux conséquences dans les conditions habituelles :

D'abord, en déterminant les Collemboles, sortis de leurs retraites à mer basse, à se déplacer en hauteur et à regrimper immédiatement sur le rocher au pied duquel un saut les a jetés ; cette tendance contrarie leur éparpillement dans le sens horizontal et les maintient dans la zone habitable et même sur le bloc habituel.

Puis après leur rentrée dans une anfractuosité, le géotropisme les amène à gagner le haut des cavités dont l'eau va envahir les régions inférieures.

*
* * *

Il reste à considérer les manœuvres de la retraite, vers le moment de la mer montante. En n'admettant pas l'apparition périodique d'un phototropisme négatif qui coïnciderait avec le retour des eaux, je dois renoncer à invoquer, pour comprendre la rentrée des *Actaletes* dans les anfractuosités protectrices, une attraction phototropique par une surface plus sombre, du genre de celle que G. BOHN constatait chez ses Littorines ; et il faut faire intervenir un mécanisme plus complexe, une association de sensations.

J'ai pu assister deux fois à la remonte régulière d'une mer très calme, au moment où elle atteignait et submergeait les blocs à *Actaletes*. Ces blocs avaient paru déserts un peu auparavant, et vraisemblablement leur population était déjà cachée dans les anfractuosités. Mais à la limite de l'eau montante, sur

une hauteur d'un décimètre ou deux, apparaissait une zone d'*Actaletes* grim pant, sautant parfois, retombant sur la surface de l'eau dont ils rebondissaient immédiatement : je me figure que c'étaient des individus qui s'étaient antérieurement agglomérés sous les *Ceramium*, en des points que l'eau pouvait atteindre, et qui se trouvaient obligés de chercher meilleures retraits.

Comme il était impossible de rester, par une mer agitée, à regarder de près comment des *Actaletes* se comporteraient vis-à-vis des vagues, j'ai fait quelques essais avec des exemplaires logés dans des tubes remplis au quart d'eau de mer, que je balançais de façon à les immerger plus ou moins brutalement. Après une secousse, il restait généralement des *Actaletes* flottant sur l'eau, rassemblés en îlot par la tension superficielle : certains se retrouvaient dans la position normale, prêts à sauter ; d'autres, mouillés en quelques régions circonscrites de leur corps, adhéraient au liquide. J'ai déjà décrit ⁽¹⁾ les mouvements très coordonnés qu'effectuent ces individus pour dégager de l'eau leurs organes mouillés et se redresser. Et le groupe se réduit progressivement par le départ d'unités qui, après un saut, vont s'agripper à la paroi du tube et s'agglomérer au plafond. On a là, je pense, des manœuvres analogues à celles qui permettent à des *Actaletes* de résister au choc des vagues qui les rejettent généralement sur leur rocher.

(1) *Bulletin scientifique de la France et de la Belgique*, t. XXXIV, 1901; p. 478.

BIOLOGIE. — **Sur un Flagellé nouveau à trichocystes,**
Reckertia sagittifera, n. g., n. sp.,

par W. CONRAD,
docteur en sciences,
professeur de biologie à l'Athénée et au Lycée de Saint-Gilles (Bruxelles)

I. — **Introduction.**

Au mois d'août 1920, parmi les Algues et les Schizophytes d'un petit aquarium de la Serre à Victoria, au Jardin Botanique de Bruxelles, se rencontra un Flagellé très curieux sur lequel il m'a été donné de faire quelques observations.

L'organisme était représenté par un nombre considérable d'individus. Il contribuait, avec les voiles bactériens et les détritits floconneux des plantes, à produire un trouble au sein du liquide.

La récolte fut conservée pendant près d'une semaine dans un petit cristalliseur de verre. Au bout de ce temps, le Flagellé disparut. Des essais de culture, faits dans des milieux divers, échouèrent complètement.

Avides d'oxygène, les Flagellés s'assemblaient généralement près de la surface du liquide. Il suffisait d'en prélever une goutte à l'aide d'une pipette et de la porter sur la lame en vue de l'étude microscopique. C'est ainsi que nous avons procédé chaque fois qu'il s'agissait d'examiner la cellule vivante, ou les réactions qu'elle présente à l'égard de réactifs déterminés.

*
* *

La cytologie des Flagellés offre encore des lacunes nombreuses et béantes. A part les données fournies par les admirables travaux de DANCEARD et de quelques autres naturalistes,

nous ne savons presque rien de la structure intime d'un organisme inférieur. Grâce aux méthodes de fixation et de montage préconisées, entre autres, par DANGEARD, il nous a été possible de pénétrer dans la structure si compliquée du cytoplasme, du noyau et, notamment, de ces organes extrêmement curieux, connus sous le nom de *trichocystes*.

La méthode générale de fixation à laquelle nous avons eu recours est simple. Vu la transparence de l'organisme, sa taille assez considérable, l'absence de chromatophores, elle a rendu inutile l'inclusion à la paraffine, si difficile lorsqu'il s'agit de Protistes, et quasi impossible si l'on ne dispose pas d'un matériel inépuisable.

Nous avons promené, à la surface des cultures, une lamelle tenue entre les branches d'une pince. La lamelle se charge de Flagellés — et d'autres organismes — rassemblés au contact de l'air. Puis on pose la lamelle directement à la surface du liquide fixateur contenu dans un petit verre de montre. Un certain nombre de cellules, foudroyées ainsi, restent adhérer à la lamelle et sont fixées. En prenant certaines précautions pour le transport des objets dans l'eau de lavage, les colorants et les alcools à concentration croissante, on arrive à monter quelques cellules, après déshydratation, dans l'essence de girofle, même dans le baume de Canada au xylol.

L'alcool absolu nous a rendu d'excellents services comme fixateur, surtout en présence de brome. Il foudroie les cellules sans les déformer sensiblement, s'élimine facilement par le lavage et permet l'emploi de tous les colorants.

II. — Description.

a) FORME ET DIMENSION (fig. 1). — La cellule de *Reckertia* est incolore; elle ne porte aucun chromatophore. Elle offre un aplatissement marqué, de sorte que la symétrie est franchement bilatérale et qu'il y a lieu d'en distinguer une face ventrale

légèrement concave (et où s'insèrent les fouets) et une face dorsale convexe. Observée par l'une de ces faces, la cellule présente un contour elliptique régulier. Par sa dorsiventralité, notre Flagellé a un habitus de Cryptomonadine et ressemble, en même temps, à certaines Chloromonadines telles que les *Gymnostomum*.

L'axe transversal du corps vaut les trois quarts de l'axe longitudinal. Le premier varie entre 26 et 44 μ ; le second entre 34 et 58 μ . La majorité atteint une longueur de 50 μ .

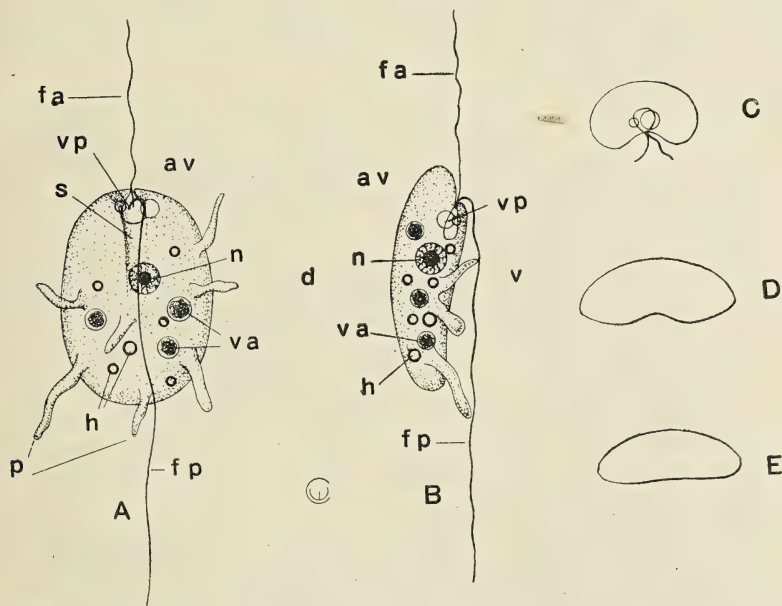


FIG. 1. — *Reckertia sagittifera*. — A, cellule vue par la face ventrale. — B, id, vue de côté. — C, D, E, coupes transversales dans la région de l'appareil vacuolaire (C), au milieu du corps (D) et dans la partie postérieure du corps (E).
av, avant du corps; d, région dorsale; v, région ventrale; fa, fouet antérieur; fp, fouet postérieur; s, sillon ventral; vp, vacuole pulsatile; va, vacuole alimentaire; n, noyau; h, gouttelettes d'huile; p, pseudopodes.

b) FOUETS ET LOCOMOTION (fig. 1). — La face ventrale est creusée, à sa partie antérieure, d'une gouttière longitudinale. A son début, donc près du pôle oral, ce sillon sert d'insertion à

deux fouets en communication avec un appareil vacuolaire complexe. L'un des fouets est dirigé en avant et sert à la *natation*. L'autre, que la cellule traîne derrière elle, sert de gouvernail et est donc préposé à la *direction*; sa longueur équivaut à deux fois celle du corps.

Pendant la natation, le fouet antérieur décrit des ondulations tremblotantes, tandis que le fouet directeur est tendu raide derrière la cellule ou, tout au plus, décrit quelques sinuosités très lâches. De temps en temps, son extrémité libre se fixe au substrat : l'organisme interrompt alors brusquement sa course, oscille à droite et à gauche pendant que le fouet nageur bat plus énergiquement.

Parfois le mode de locomotion est plus bizarre : la natation au moyen de fouets peut être remplacée par la *reptation*, sur la face ventrale, au moyen de *pseudopodes* semblables à ceux des Amibes.

Fixé parmi les détritrus, les voiles bactériens, etc., le Flagellé émet, sur la face ventrale, une demi-douzaine de prolongements protoplasmiques pouvant atteindre jusque 20 μ de longueur; leur extrémité libre est obtuse. C'est à l'aide de ces « lobopodes » que la cellule non seulement rampe sur le substrat, mais encore capture des proies telles que Bactéries, Flagellés et zoospores d'Algues.

c) DIFFÉRENCIATION DU CYTOPLASME (fig. 4). — Le cytoplasme de la cellule a acquis une remarquable différenciation. Il est limité, vers l'extérieur, par une *cuticule* extrêmement mince, sans double contour, même aux grossissements les plus considérables. Par l'action de l'hydrate de chloral (en solution aqueuse concentrée), la cellule s'évanouit, disparaît tout entière, ce qui se voit surtout bien après coloration par l'iode ioduré aqueux. Le chlorure de zinc iodé contracte plus ou moins la cellule; mais jamais la moindre membrane spécialisée ne peut être observée. C'est l'absence de toute enveloppe nettement différenciée, qui

permet : 1° l'explosion soudaine de toutes les batteries à trichocystes; 2° la formation de pseudopodes.

En dessous de la *cuticule* se remarque un *ectoplasme* épais de $2\ \mu$ environ, et différencié lui-même en une *couche hyaline*, périphérique, sans structure, et une *couche alvéolaire*, finement et nettement striée : c'est la *couche à trichocystes* proprement dite; nous allons nous y arrêter plus loin.

En dessous de l'ectoplasme, limité par la zone à trichocystes, se présente un *endoplasme* à structure alvéolaire, comme le montrent les figures 2, 3, 4.

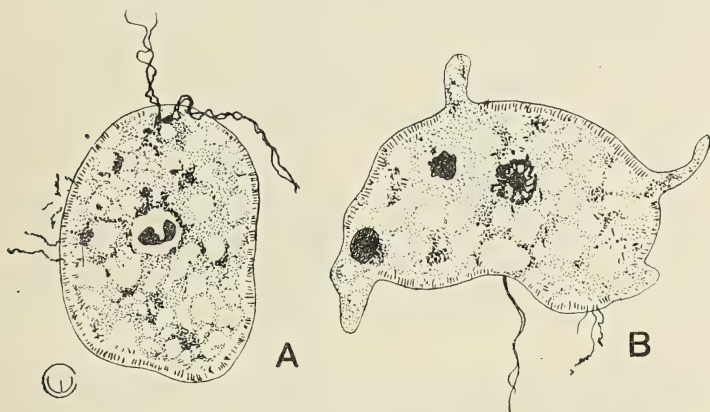


FIG. 2. — A, coupe longitudinale d'une cellule en division. Les deux fouets se sont dédoublés; le noyau subit la bipartition. On remarque la couche à trichocystes rayonnants; quelques-uns (à gauche) ont été lancés. (D'après une préparation : alcool absolu, brome, hématoxyline). — B, coupe transversale d'une cellule au repos. On voit l'insertion des deux fouets dans le sillon ventral, deux ingesta, la couche à trichocystes (quelques-uns ont explosé), le noyau vésiculeux et les pseudopodes dans lesquels ne pénètrent pas de trichocystes. (D'après une préparation : alcool absolu, brome, hématoxyline-éosine).

Lors de la formation des pseudopodes, l'endoplasme vient crever à la surface de la cellule après avoir distendu et troué, en quelque sorte, l'ectoplasme. Les pseudopodes, comme le montre si bien la figure 2B, n'offrent donc jamais de trichocystes.

d) NOYAU. — Le centre de la cellule abrite un gros noyau à peine visible sans l'intervention des réactifs. L'iode ioduré aqueux, le vert de méthyle, le rouge de magdala, le mettent en évidence. Mais c'est surtout après fixation par l'alcool absolu et coloration méticuleuse par l'hématoxyline au fer que sa structure apparaît nettement (fig. 2, 3.).

Ce noyau est sphérique. Il mesure 5 à 7 μ de diamètre. Il représente un organe très nettement limité, par rapport au cytoplasme environnant, par une couche de granulations chromophiles, qui se colorent en bleu-noir par l'hématoxyline. Il doit être entouré d'une membrane nucléaire très mince, car jamais elle n'offre de double contour.

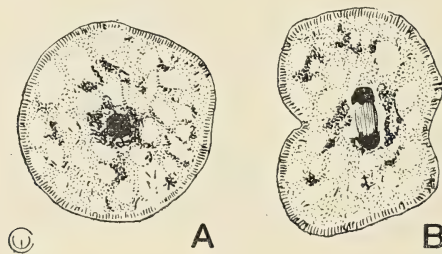


FIG. 3. — A, une cellule au repos. On remarque la couche à trichocystes, la structure alvéolaire de l'endoplasme (il renferme quelques trichocystes éparpillés), et le noyau. — B, division de la cellule par caryokinèse. (D'après une préparation : brome, O_3O_4 , hématoxyline.)

Le noyau appartient au type « vésiculeux » et possède un gros nucléole homogène, entouré par une zone de structure réticulée, riche en granulations chromophiles. Ce nucléole a beaucoup d'affinité pour la fuchsine acide, le vert de méthyle (acétique), le violet de gentiane, le rouge de magdala, et l'hématoxyline.

Par sa complexité remarquable, le noyau de notre Flagellé — nous savons fort peu de la structure du noyau chez ces

Protistes — s'éloigne beaucoup de celui des Flagellés inférieurs. Il se divise caryocinétiquement (fig. 2 A, 3 B) et la segmentation de la cellule est nettement longitudinale; elle est accompagnée du dédoublement des fouets (fig. 2 A).

e) VACUOLES PULSATILES. — Les fouets sont en relation avec un appareil vacuolaire hautement différencié. Il comprend deux vacuoles latérales, assez petites, et qui se contractent alternativement pour déverser leur contenu dans une vacuole apicale unique (fig. 1, A, B, C).

f) VACUOLES ALIMENTAIRES. — Des vacuoles alimentaires, renfermant des débris d'organismes divers, se montrent dans l'endoplasme central et même dans les pseudopodes; on peut donc affirmer que la nutrition est vacuolaire. Peut-être est-elle, en même temps, diffuse.

Nous inspirant du travail d'A. KHAISKY ⁽¹⁾, il nous a été possible de mettre en évidence le mécanisme de la digestion vacuolaire chez *Reckertia*. Notre procédé ressemble — dans ses grandes lignes, bien entendu — à celui décrit chez *Paramecium*.

Cette méthode intracellulaire, *in vivo*, est appelée à rendre de précieux services.

La base du « neutralrot » est une combinaison *jaune* qui *rougit* fortement par HCl en donnant le neutralrot proprement dit. En neutralisant très exactement une solution de ce colorant par une solution $\frac{1}{10}$ N de KOH, — il faut éviter tout excès de KOH, qui diminuerait la sensibilité de l'indicateur et produirait un précipité jaune foncé, — on obtient un liquide *incolore* dans

(1) *Physiologische Untersuchungen an Paramäcien*. — BER. DER UNIV. ZU WARSCHAU, 1906. (Résumé dans BIOL. CENTRALBL., t. XXX, 1910; p. 43.)

lequel la moindre trace de HCl libre reproduit la couleur rouge initiale ⁽¹⁾.

En ajoutant (à peu près comme l'a fait KHAINSKY [l. c., p. 45] chez ses Paramécies) 1 ou 2 gouttes d'une solution incolore de neutralrot à $\frac{1}{50.000}$, à quelques centimètres cubes de liquide de culture contenus dans un verre de montre, on observe, au microscope, au bout de quelques minutes, que les vacuoles alimentaires se teintent en rose et que cette coloration commence à la périphérie pour diffuser petit à petit vers le centre de la vacuole. Après quelques heures ⁽²⁾, la coloration a atteint le maximum d'intensité : la vacuole est franchement *rouge* et les ingesta sont devenus méconnaissables. Dans la seconde phase de la digestion, sans doute après solubilisation complète de la nourriture, la teinte rouge pâlit et finit par disparaître.

Ces réactions — appliquées, pour la première fois, pensons-nous, chez les Flagellés — montrent comment, sous l'influence d'une proie ingérée, la vacuole sécrète aussitôt un ferment digestif acide ; la réaction acide diminue et même cesse après la digestion ⁽³⁾.

g) HUILE. — Des gouttelettes d'huile sont réparties dans la

(1) La sensibilité de cette réaction est extrême. Six gouttes d'une solution incolore à 1 % de neutralrot exactement titrée par KOH, versées dans 50 cm³ d'eau distillée, se colorent en rose par l'addition d'une goutte d'une solution 5 %₀₀ de HCl. Une seule goutte d'une solution $\frac{1}{5}$ N de KOH fait de nouveau disparaître cette teinte.

(2) La digestion dure beaucoup moins de temps chez *Paramaecium*.

(3) Ces phénomènes sont connus grâce aux travaux de MEISSNER. (*Beiträge zur Ernährungsphysiologie der Protozoen*. ZEITSCHR. F. WISS. ZOOL., t. XLVI, 1888.) — M. METCHNIKOFF, *Recherches sur la digestion intracellulaire*. (ANN. DE L'INST. PAST., t. III, 1889.) — M.-F. LE DANTEC, *Recherches sur la digestion intracellulaire chez les Protozoaires*. (ANN. INSTIT. PASTEUR, t. IV et V, 1890 et 1891.) — M.-F. GREENWOOD, *Constitution and Formation of Food-Vacuoles in Infusoria*. (PHILOS. TRANS. [B], 185, 1894.) — C.-M. FÜRST, *Haarzellen und Flimmerzellen*. (ANAT. ANZEIG., t. XVIII, 1900), et surtout E. NIERENSTEIN, *Ernährungsphysiologie der Protisten*. (ZEITSCHR. F. ALLG. PHYS., t. V, 1905.)

cellule de notre Flagellé (fig. 1, A, B). Leur nombre et leur taille sont extrêmement variables. Elles se colorent nettement en brun-noir par les vapeurs de OsO_4 , et en orangé ou rouge par le Soudan III en solution dans l'alcool absolu. Elles disparaissent dans l'alcool absolu (non l'alcool à 94°) et le xylol.

L'huile est la seule réserve hydrocarbonée des Chloromonades. Jamais nous n'avons découvert de l'amidon ni des hydrates de carbone amyloïdes.

h) TRICHOCYSTES. — Il nous reste à parler des trichocystes.

A l'aide des grossissements considérables, — nous avons employé l'objectif apochromatique à immersion $\frac{1}{12}$ de Zeiss, combiné avec les oculaires compensateurs 12 et 18, — il nous a été possible de distinguer, sur les cellules vivantes, une striation très fine et très régulière de l'ectoplasme. Celui-ci renferme une infinité de minuscules bâtonnets, tous disposés perpendiculairement à la surface de la cellule. Ces bâtonnets sont cylindriques, très minces, et ne mesurent que 1 à $2,5\ \mu$ de longueur. Un examen très attentif permet de les retrouver, mais en petit nombre, distribués assez irrégulièrement dans les couches extérieures à l'endoplasme (fig. 2, 3, 4).

Le nombre considérable de ces bâtonnets, leur répartition régulière dans l'ectoplasme ne permettaient point de supposer qu'il s'agissait en l'occurrence de Bactéries absorbées ou parasites. Il ne pouvait non plus être question de les identifier avec des cristaux, car, en présence d'iode ioduré, ils disparaissaient instantanément de la cellule et se retrouvaient autour de celle-ci, parfois même encore adhérentes à la surface, sous la forme de filaments tenus souvent très allongés, sinueux, contournés, parfois même dilatés en glomérules, ou effilochés (fig. 4 B). Les bâtonnets avaient donc fait saillie au dehors du protoplasme; ils y laissaient même, pendant un certain temps, une traînée claire, comme le montre la même figure. Lorsqu'on fait agir sur la cellule de l'alcool absolu légèrement coloré par quelques

parcelles d'iode, la cellule est foudroyée également, mais les bâtonnets réfringents ne font pas explosion et se retrouvent intacts dans l'ectoplasme. Le brome, en solution aqueuse ou associé à l'alcool absolu, agit de même.

Il s'agit donc là, certainement, d'organes identiques ou analogues aux *trichocystes*, bien connus chez les Infusoires, où ils jouent un rôle défenseur, alors qu'ils se rencontrent très rarement dans le groupe des Flagellés, — certains Périдиниens en sont armés, — où leur étude est à peine ébauchée.

Les trichocystes de *Reckertia* s'observent difficilement sur le viv. Cela tient d'abord à leur dimension peu considérable et à leur minceur extrême; ensuite, à la différence peu prononcée entre leur indice de réfraction et celui du milieu où on les observe habituellement. Pour s'en convaincre, il suffit de laisser s'évaporer, sur la lamelle, une goutte de liquide dans laquelle les trichocystes ont été lancés et d'observer à sec : les trichocystes se voient alors avec une netteté beaucoup plus grande.

Par l'emploi de l'hydrate de chloral concentré (en solution aqueuse), le protoplasme des cellules est complètement désorganisé, mais les trichocystes, tous lancés, gonflent légèrement dans le liquide et s'observent facilement. En ajoutant alors une goutte de safranine, on les voit se colorer en un beau rouge.

Le rouge de ruthénium (sesquioxyde de ruthénium) en solution aqueuse très diluée, produit, après un temps variable (de $1/2$ à $1\ 1/2$ heure), la coloration rouge carmin des trichocystes encore renfermés dans la cellule. Ce réactif a déjà été utilisé par SCHERFFEL ⁽¹⁾, chez un Flagellé à trichocystes, *Monomastix opisthostoma*. L'hématoxyline colore les trichocystes en noir (fig. 2, 3, 4).

Cultivées dans une solution aqueuse de bleu de méthylène

⁽¹⁾ Zwei neue, trichocystenartige Bildungen führende Flagellaten. (ARCH. F. PROTISTENK., t. XXVII, 1912, pp. 93-128; pl. 6.)

extrêmement diluée (1 : 50.000 ou 1 : 100.000), les cellules se laissent pénétrer par le colorant, sans mourir. On voit les trichocystes prendre une teinte bleuâtre; les uns sont régulièrement inclus dans l'ectoderme; les autres sont en partie sortis du protoplasme; d'autres, enfin, se présentent sous la forme de

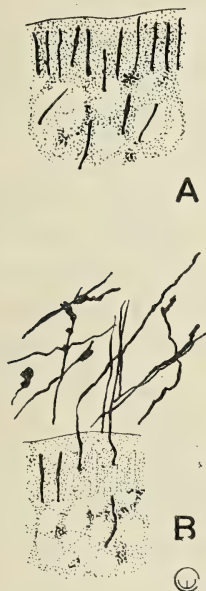


FIG. 4. — Les trichocystes de *Reckertia*. — **A**, on remarque les deux couches de l'ectoplasme : l'une, hyaline, externe (limitée par la cuticule), l'autre, alvéolaire, offrant une « palissade » de trichocystes non explosés. Une portion de l'endoplasme, à structure alvéolaire (avec quelques trichocystes) se voit également. — **B**, les trichocystes ont été éjaculés. Ils se retrouvent autour de l'organisme sous forme de filaments contournés, noueux ou effilochés. A droite, trainées claires laissées dans l'ectoplasme alvéolaire par le bolisme des trichocystes. — D'après des préparations (**A** : alc. abs. + Br; hématox. — **B** : alc. dil.; hématox.).

longs filaments appendus à la cuticule, et que le Flagellé traîne derrière lui.

Parmi les colorants, seuls le bleu de méthylène et erouge de ruthénium, à condition d'être assez dilués, permettent d'obtenir des trichocystes à différents stades de lancement. Tous les fixateurs, sauf OsO_4 , l'alcool absolu, et le brome, amènent immédiatement le bolisme des trichocystes. Et ce bolisme est tellement rapide qu'il n'est guère possible d'en suivre les diverses phases : il se produit comme une véritable explosion.

Quelle est la nature des trichocystes? Nous les considérons comme des *vacuoles*, des vacuoles ectoplasmiques, spécialisées,

explosives, renfermant une matière d'une nature spéciale. Celle-ci est semi-liquide, glaireuse, légèrement filante et visqueuse. Sous l'effet d'un excitant approprié — chimique ou physique — la vacuole se contracte, éjacule son contenu et celui-ci, s'évacuant par un minuscule pore de l'ectoplasme et de la cuticule, est comme passé par une filière : il prend l'aspect d'un fil ténu et allongé. Au contact de l'eau, ce fil se gonfle, s'épaissit irrégulièrement, d'où la formation de nœuds et de ramifications (fig. 4 B). Nous avons déjà dit qu'après l'éjaculation du trichocyste on remarque, pendant quelque temps, une traînée hyaline dans l'ectoplasme (même figure).

Le liquide des trichocystes ne semble point être une substance albuminoïde; l'éosine ne la colore pas. L'iode sulfurique, l'acide phosphorique iodé la colorent seulement en jaune-brun, et non en bleuâtre, ce qui ne permet point de lui attribuer une nature cellulosique. Par contre, cette matière a un pouvoir électif considérable pour le rouge de ruthénium, le bleu de méthylène, le vert de méthyle, le neutralrot, ce qui nous engage à la considérer comme une *gelée pectosique*.

Où et comment se forment les vacuoles trichocystiques? Nous ne sommes point parvenu à élucider cette question. Il nous a semblé que le nombre de trichocystes endoplasmiques — il n'est jamais très grand — était plus élevé chez les cellules venant de se diviser. Il se pourrait donc bien que ces organes se formassent dans l'endoplasme, au voisinage du noyau, pour émigrer ensuite vers la périphérie.

Jamais les trichocystes ne se rencontrent dans les pseudopodes (fig. 2 B).

III. — Systématique.

Reckertia est une *Chloromonadine* incolore. Il se rattache directement à la série *Vacuolaria* CIENK., *Trentonia* STOKES, *Gonyostomum* DIESING, conduisant au *Thaumatomastix* de

LAUTERBORN. Il est très voisin de cette dernière forme, non seulement par son aspect général, la différenciation du cytoplasme, la faculté d'émettre des pseudopodes, mais encore par son mode d'alimentation et ses vacuoles pulsatiles. Mais *Thaumatomastix* n'offre ni sillon ventral, ni trichocystes.

[*
*] *

P.-S. — J'ai appelé ce nouvel organisme : *Reckertia*, en souvenir de mon ami WALTER RECKERT, de Libau (Courlande).

Bénéficiaire du prix Leo Errera, j'étudiais, pendant l'été 1913, à la station biologique de Plön, les organismes inférieurs que je récoltais dans les admirables lacs de la Holsace. J'y fis la connaissance de RECKERT. Il venait de terminer ses études moyennes et, quoique d'âge différent du mien, plein de cet enthousiasme juvénile, recueilli et fougueux à la fois, pour les choses de la nature, il fut mon compagnon dans mes flâneries à travers bois et champs et dans mes expéditions au bord des eaux.

Le rêve grandiose qu'il avait rêvé — s'adonner, à l'Université, à l'étude des sciences naturelles — ne se réalisa point, hélas ! Il dut interrompre les études commencées, en 1914, à l'Université de Dorpat, pour prendre part à la guerre, dans l'armée russe, où il acquit le grade d'officier.

En juin 1919, non loin de Bellenhof (Livland), il fut tué d'une balle dans la tête, par les bolchevistes; il n'avait que 24 ans.

Il a laissé une riche collection de pêches algologiques et de nombreuses annotations; je compte me consacrer à leur étude et les publier un jour (1).

Je remplis un devoir pieux en consacrant ces quelques lignes à un inconnu dans le domaine de la science, à un jeune ami si simple, si sincère, si merveilleusement enthousiaste de la Nature.

(1) Des pêches effectuées antérieurement par W. Reckert, aux environs de Libau, ont été étudiées par nous, dans les *Annales de biol. lac.*, t. VII, p. 126.

Sur une surface du quatrième ordre à douze points doubles coniques,

par LUCIEN GODEAUX,

lieutenant d'artillerie, docteur en sciences, répétiteur à l'École militaire (*).

Dans des recherches antérieures (**), nous avons déterminé les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface Φ de genres un soit l'image d'une involution appartenant à une surface F de genres un. Ces conditions sont l'existence de certains points doubles pour la surface Φ et celle de certains systèmes de surfaces passant par ces points doubles et ayant, avec la surface Φ , en chaque point d'intersection, des contacts déterminés. Cependant, l'existence de la surface Φ elle-même n'est pas démontrée par la connaissance de ces conditions. Pour cette raison, il ne nous a pas paru inutile de consacrer cette note à la construction d'une surface-image d'une involution d'ordre quatre engendrée, sur une surface de genres un, par un groupe trirectangle de transformations birationnelles involutives.

Nous démontrons précisément que

Une surface du quatrième ordre possédant douze points doubles coniques distribués par couples sur les arêtes d'un tétraèdre est l'image d'une involution d'ordre quatre engendrée, sur une surface du quatrième ordre, par un groupe trirectangle d'homographies biaxiales involutives.

(*) Présenté par MM. Stuyvaert et Neuberg.

(**) *Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres un.* (ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, 1914, 3^e sér., t. XXXI, pp. 337-430; 1919, 3^e sér., t. XXXVI, pp. 51-70.)

Il est d'ailleurs bien connu qu'une surface du quatrième ordre ne contenant que des points doubles coniques est de genres un ($p_a = p_g = \dots = P_4 = \dots = 1, p^{(1)} = 1$) (*).

1. — Soit Φ une surface d'ordre quatre, possédant douze points doubles coniques (et dépourvue d'autres points multiples) distribués par couples sur les arêtes d'un tétraèdre que nous prendrons comme tétraèdre de référence. Désignons par P_{ik}, P'_{ik} les points situés sur l'arête d'équations $x_i = x_k = 0$, ik étant une combinaison des nombres 1, 2, 3, 4.

Nous avons établi que, pour que Φ soit l'image d'une involution d'ordre quatre et de deuxième espèce (c'est-à-dire engendrée par un groupe trirectangle de transformations birationnelles involutives) appartenant à une surface F de genres un, il faut et il suffit que l'on puisse partager les douze points doubles en deux groupes de huit (ayant quatre points communs) tels qu'il y ait ∞^1 quadriques passant par les points de chacun des groupes et touchant Φ en chaque point d'intersection.

Soient $P_{12}, P'_{12}, P_{34}, P'_{34}, P_{13}, P'_{13}, P_{24}, P'_{24}$ les points formant le premier groupe, (P_1) , $P_{12}, P'_{12}, P_{34}, P'_{34}, P_{14}, P'_{14}, P_{23}, P'_{23}$ les points formant le second groupe (P_2) .

Nous avons montré autrefois que si, par huit points doubles coniques d'une surface du quatrième ordre, il passe ∞^1 quadriques touchant cette surface en chaque point d'intersection, ces huit points sont associés (c'est-à-dire communs aux quadriques d'un réseau) et la surface du quatrième ordre est l'enveloppe d'une série ∞^1 d'indice deux de quadriques (**).

(*) Cela résulte du fait qu'un point double d'une surface algébrique est sans influence sur les adjointes, et que d'autre part, une surface du quatrième ordre générale est régulière et a une courbe canonique d'ordre zéro.

(**) *Mémoire sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation.* (ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE, 1914, 3^e sér., t. V, pp. 289-312.) (Voir p. 314.)

Nous allons montrer que les points de chacun des groupes (P_1) , (P_2) sont associés et ensuite que Φ peut être considérée de deux manières comme l'enveloppe d'une série ∞^1 d'indice deux de quadriques.

2. — Auparavant, nous établirons que les douze points doubles de Φ sont situés sur une quadrique (*).

Considérons le cône formé par les droites issues de P_{12} et touchant Φ en un autre point. Il est du sixième ordre et passe doublement par les onze points doubles restants de Φ . Mais les points P'_{12} , P_{13} , P'_{13} , P_{14} , P'_{14} sont situés dans un plan $x_1 = 0$ passant par P_{12} ; donc ce plan fait partie du cône en question et touche par suite Φ suivant une conique γ_1 . De même, les plans $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ touchent Φ suivant des coniques respectivement γ_2 , γ_3 , γ_4 . Deux coniques γ_i , γ_k ont en commun les deux points P_{ik} , P'_{ik} . Par γ_1 , γ_2 passent donc ∞^1 quadriques. Considérons celle de ces quadriques qui passe par P_{34} . Elle rencontre γ_3 en cinq points, P_{23} , P'_{23} , P_{14} , P'_{14} , P_{34} ; donc elle contient cette conique. De même, elle contient γ_4 et par suite :

Les douze points doubles de Φ sont sur une quadrique (Rohn).

3. — Soit

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

l'équation de cette quadrique. Remarquons qu'elle possède nécessairement des termes en x_1^2 , x_2^2 , x_3^2 , x_4^2 .

Les points du groupe (P_1) sont sur les quadriques linéairement indépendantes

$$x_1x_4 = 0, \quad x_2x_3 = 0, \quad f = 0,$$

(*) Ce théorème est dû à M. ROHN, qui a étudié la surface Φ dans le mémoire : *Die Flächen vierter Ordnung hinsichtlich ihrer Knötenpunkte und ihrer Gestaltung*. (PREISSCHRIFTEN VON DER FÜRST. JABLONOWSKI'SCHEN GESELLSCHAFT ZU LEIPZIG, 1886.)

et les points de (P_2) sur les quadriques

$$x_1x_3 = 0, \quad x_2x_4 = 0, \quad f = 0;$$

donc ce sont des groupes de points associés.

Considérons les deux systèmes ∞^1 d'indice deux :

$$\lambda^2x_1x_4 + 2\lambda f(x_1, x_2, x_3, x_4) + ax_2x_3 = 0,$$

$$\mu^2x_1x_3 + 2\mu f(x_1, x_2, x_3, x_4) + ax_2x_3 = 0,$$

où a est une constante. Ils ont comme enveloppe commune la surface

$$(1) \quad \{f(x_1, x_2, x_3, x_4)\}^2 - ax_1x_2x_3x_4 = 0,$$

qui est irréductible et du quatrième ordre.

Remarquons, d'autre part, que deux surfaces du quatrième ordre ayant les douze points doubles $P_{12}, \dots, P'_{34}$ se touchent nécessairement le long des coniques $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$. Par suite, il y a au plus ∞^1 (formant un faisceau) de ces surfaces. Deux de celles-ci sont $f^2 = 0$ et $x_1x_2x_3x_4 = 0$; donc l'équation (1) représente une surface générale du type envisagé (*) et en particulier, elle représente la surface Φ pour une valeur convenable de a .

De tout ceci, on conclut que la surface Φ représente une involution d'ordre quatre, engendrée par un groupe trirectangle, appartenant à une surface F de genres un.

4. — Ainsi que nous l'avons montré dans notre *Mémoire* cité au début, on peut prendre, comme « modèle projectif » de la surface F , la surface d'équations

$$(1) \quad [f(x_1, x_2, x_3, x_4)]^2 - ax_1x_2x_3x_4 = 0,$$

$$(2) \quad x_5^2 = \lambda^2x_1x_4 + 2\lambda f(x_1, x_2, x_3, x_4) + ax_2x_3,$$

$$(3) \quad x_6^2 = \mu^2x_1x_3 + 2\mu f(x_1, x_2, x_3, x_4) + ax_2x_4,$$

où λ et μ ont des valeurs déterminées. F est d'ordre seize.

(*) ROHN, *loc. cit.*

L'involution d'ordre quatre, dont Φ est l'image, est engendrée par les transformations birationnelles

$$\begin{aligned} (T_1) \quad & \frac{x'_1}{x_1} = \frac{x'_2}{x_2} = \frac{x'_3}{x_3} = \frac{x'_4}{x_4} = \frac{x'_5}{-x_5} = \frac{x'_6}{x_6}, \\ (T_2) \quad & \frac{x'_1}{x_1} = \frac{x'_2}{x_2} = \frac{x'_3}{x_3} = \frac{x'_4}{x_4} = \frac{x'_5}{x_5} = \frac{x'_6}{-x_6}, \\ (T_3 \equiv T_1 T_2) \quad & \frac{x'_1}{x_1} = \frac{x'_2}{x_2} = \frac{x'_3}{x_3} = \frac{x'_4}{x_4} = \frac{x'_5}{-x_5} = \frac{x'_6}{-x_6}. \end{aligned}$$

Nous allons transformer birationnellement F en une surface F^* , du quatrième ordre, située dans un S_3 . A cet effet, posons, ρ étant un facteur de proportionnalité,

$$(4) \quad \begin{cases} \rho x_1 = y_1^2, & \rho x_2 = y_2^2, & \rho x_3 = y_3^2, & \rho x_4 = y_4^2, \\ \rho x_5 = \lambda y_1 y_4 + \sqrt{a} y_2 y_3, & \rho x_6 = \mu y_1 y_3 + \sqrt{a} y_2 y_4. \end{cases}$$

Cela revient à rapporter projectivement les hyperplans de l'espace S_5 ($x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$) contenant F aux quadriques d'un système linéaire

$$(5) \quad \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \alpha_3 y_3^2 + \alpha_4 y_4^2 + \alpha_5 (\lambda y_1 y_4 + \sqrt{a} y_2 y_3) + \alpha_6 (\mu y_1 y_3 + \sqrt{a} y_2 y_4) = 0,$$

d'un S_3 (y_1, y_2, y_3, y_4). Remarquons que ce système linéaire de quadriques est dépourvu de points-base.

Moyennant les formules (4), les équations (1), (2), (3) deviennent

$$(1') \quad [f(y_1^2, y_2^2, y_3^2, y_4^2)]^2 - a y_1^2 y_2^2 y_3^2 y_4^2 = 0,$$

$$(2'), (3') \quad \sqrt{a} y_1 y_2 y_3 y_4 = f(y_1^2, y_2^2, y_3^2, y_4^2).$$

La première relation est vérifiée par la seconde. Les formules (4) transforment donc F en une surface F^* d'ordre quatre, d'équation

$$(6) \quad \sqrt{a} y_1 y_2 y_3 y_4 - f(y_1^2, y_2^2, y_3^2, y_4^2) = 0.$$

La courbe commune à deux quadriques du système (5) rencontre F^* en seize points; donc, l'ordre de F étant seize également, les surfaces F , F^* se correspondent birationnellement.

A la transformation T_1 correspond une transformation T_1^* de F^* en elle-même. Le point (y'_1, y'_2, y'_3, y'_4) que T_1^* fait correspondre à (y_1, y_2, y_3, y_4) doit être tel que

$$\frac{y_1'^2}{y_1^2} = \frac{y_2'^2}{y_2^2} = \frac{y_3'^2}{y_3^2} = \frac{y_4'^2}{y_4^2} = \frac{\lambda y'_1 y'_4 + \sqrt{a} y'_2 y'_3}{-\lambda y_1 y_4 - \sqrt{a} y_2 y_3} = \frac{\mu y'_1 y'_3 + \sqrt{a} y'_2 y'_4}{\mu y_1 y_3 + \sqrt{a} y_2 y_4}.$$

On en déduit aisément que T_1^* ne peut être que l'homographie biaxiale

$$(T_1^*) \quad \frac{y'_1}{y_1} = \frac{y'_2}{-y_2} = \frac{y'_3}{y_3} = \frac{y'_4}{-y_4}.$$

De même, aux transformations T_2 , T_3 correspondent respectivement des homographies involutives biaxiales :

$$(T_2^*) \quad \frac{y'_1}{y_1} = \frac{y'_2}{-y_2} = \frac{y'_3}{-y_3} = \frac{y'_4}{y_4},$$

$$(T_3^* \equiv T_1^* T_2^*) \quad \frac{y'_1}{y_1} = \frac{y'_2}{y_2} = \frac{y'_3}{-y_3} = \frac{y'_4}{-y_4}.$$

Et ces trois homographies forment bien un groupe trirectangle :

$$T_3^* \equiv T_1^* T_2^* \equiv T_2^* T_1^*, \dots$$

5. — Inversement, l'involution d'ordre quatre engendrée sur F^* , d'équation (6), par T_1^* , T_2^* , T_3^* , a bien pour image la surface Φ .

En effet, les quadriques ne passant par aucun point fixe et invariantes par rapport aux trois transformations, forment un système linéaire

$$\alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \alpha_3 y_3^2 + \alpha_4 y_4^2 = 0.$$

Rapportons projectivement ces quadriques aux plans d'un S_3 , en posant

$$\frac{x_1}{y_1^2} = \frac{x_2}{y_2^2} = \frac{x_3}{y_3^2} = \frac{x_4}{y_4^2}.$$

L'équation (6) se transforme en

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sqrt{a} \cdot \sqrt{x_1 x_2 x_3 x_4},$$

équivalente à l'équation (1).

Remarquons de plus que la surface (6) est la surface la plus générale d'ordre quatre invariante pour T_1^* , T_2^* , T_3^* .

Nous avons donc complètement démontré le théorème énoncé au début de ce travail.

Observation. — Dans le mémoire cité plus haut, M. Rohn établit une classification des surfaces d'ordre quatre ayant de huit à seize points doubles. Il résulte de cette classification que parmi les surfaces à douze points doubles, il existe des types ne pouvant pas être image d'une involution d'ordre quatre analogue à celle qui a été rencontrée ici. On voit donc que les deux groupes de conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface normale de genres un soit l'image d'une telle involution, à savoir :

- 1° L'existence de douze points doubles coniques ;
- 2° L'existence de certains systèmes d'hyperquadriques touchant la surface,

sont en général indépendants.

PHYSIOLOGIE. — Mensuration de la pression sanguine dans les artères de l'iris. Ses modifications sous l'influence de quelques substances toxiques,

par le Dr GEORGES LEPLAT, assistant à l'Université de Liège.

NOTE PRÉLIMINAIRE (1).

Des travaux récents se sont occupés à nouveau de la circulation sanguine intraoculaire. BAILLIART (1917) a indiqué une technique qui permet de déterminer les chiffres de pression du réseau rétinien par l'étude des pulsations observées dans l'artère et la veine centrales de la rétine. Ces pulsations sont provoquées par une pression exercée sur le globe oculaire au moyen d'un dynamomètre ou peson, gradué en grammes. Les milieux oculaires font l'office du manchon du sphygmomanomètre. Leur tension est mesurée soit par un manomètre, soit par un tonomètre.

Des recherches expérimentales ont permis à MAGITOT et BAILLIART (1919) de déterminer les modifications de la tension oculaire sous l'influence des pressions exercées sur le globe. Grâce au barème qu'ils ont publié, il est donc possible de connaître quelles pressions subit l'artère au moment où y apparaît une pulsation et au moment où celle-ci est effacée.

Comme on sait, le pouls sera le plus marqué au moment où la paroi artérielle subira une pression externe égale à la tension sanguine minima, soit la tension diastolique. Le pouls sera effacé dès que la pression extérieure dépassera la tension systolique.

Cette technique, appliquée au réseau rétinien, a déjà été

(1) Présentée par M. Frédéricq.

féconde mais elle n'a pas pu être appliquée, chez l'homme, aux vaisseaux de l'uvée, parce qu'ils ne sont pas directement perceptibles. Or, la circulation sanguine uvéale est la plus importante par sa masse et son rôle physiologique est considérable, surtout dans le maintien du tonus oculaire.

Certains mammifères présentent des dispositions plus favorables que l'homme pour ces mensurations. Chez le Chien, par exemple, les deux artères ciliaires longues et leurs branches iriennes sont visibles à l'œil nu, à la surface de l'iris. J'ai essayé de tirer parti de cette circonstance favorable et de leur appliquer la technique de BAILLIART. Comme il y a de nombreuses anastomoses entre les réseaux irien, ciliaire et choroïdien, les données ainsi fournies me paraissent intéressantes.

Il est utile, pour arriver à une précision satisfaisante, d'éclairer obliquement l'iris au moyen d'une lentille convexe et d'observer les artères au moyen d'une loupe binoculaire. La pression est exercée sur la cornée par le dynamomètre de BAILLIART. Nous savons que la tension oculaire du chien est de 15 à 25 millimètres de Hg. Le tonomètre de SCHIOTZ nous indiquera ses modifications éventuelles et leur sens relatif.

Le premier fait constaté est que, le plus souvent, il existe une pulsation spontanée des artères iriennes, que le Chien soit à l'état de veille ou en narcose par le chloroforme ou la chloralose. Ce pouls existe donc sous une tension de 15 à 20 millimètres de Hg, mais s'amplifie sous l'effet d'une pesée surajoutée de 30 à 45 grammes. Ce fait démontre qu'au moins pour des vaisseaux de ce calibre, l'apparition de la pulsation ne correspond pas exactement à la tension diastolique mais la précède.

Sous la pesée progressive, le pouls diminue d'amplitude et s'efface enfin. La pesée atteint à ce moment 75 à 90 grammes. A 100-110 grammes de pesée, les artères sont écrasées, vidées de sang. Si la pression de 100 à 150 grammes est maintenue pendant 30 à 40 secondes, le pouls ne réapparaît qu'une à deux minutes après relâchement du peson. Ceci s'explique par une

hypotension oculaire transitoire mais aussi par une légère hypertension artérielle; celle-ci est décelée par une nouvelle mensuration.

La narcose superficielle au chloroforme ne modifie pas ces chiffres. Mais si le Chien reçoit une injection sous-cutanée préalable de morphine ($\frac{1}{2}$ à 1 centigr. par kilogr.), la tension sanguine est élevée pendant quinze à vingt minutes. Il convient donc d'écarter ce facteur de variations des tensions générale et locale.

En nous rapportant au barème de MAGITOT et BAILLIART nous pouvons conclure qu'aux chiffres de 30-45 et 65-90 du dynamomètre correspondent une tension diastolique de 50 à 65 millimètres de Hg et une tension systolique de 75-95 millimètres de Hg dans les artères iriennes. Chez le Chien, la tension carotidienne est de 140 à 160 millimètres de Hg. WEISS estimait que la pression, diminuant du cœur à la périphérie, devait n'être que de 50-70 millimètres de Hg dans les artères ciliaires au moment de la diastole. Nos essais confirment donc expérimentalement les déductions de WEISS. BAILLIART estime les tensions diastolique et systolique de l'artère centrale de la rétine de l'homme à 30 et 70 millimètres de Hg. Les artères iriennes du Chien sont de calibre plus élevé. Chez cet animal, la vascularisation de la rétine ne se prête pas à la mensuration des tensions artérielles. Je n'ai pas pu établir les rapports des pressions dans les artères rétiniennes et iriennes et leur dissociation éventuelle.

Comme la méthode décrite permettait de mesurer les variations de la tension artérielle des vaisseaux iriens sous l'influence des collyres, une série d'expériences a été entreprise dans ce but; je voudrais en résumer, ici, brièvement les résultats. L'*atropine* augmente nettement la pression dans les artères iriennes sans variation de la tension oculaire (de 30-75 à 65-105). Les artères semblent dilatées mais sont difficiles à bien voir dans le tissu irien rétracté.

La *cocaïne* élève légèrement la tension artérielle irienne et

de façon transitoire. Les vaisseaux paraissent subir une légère constriction.

La *pilocarpine* et l'*ésérine* provoquent une vasoconstriction très nette et une hypotension oculaire qui est peut-être secondaire à la vasoconstriction. En rapport avec celle-ci se manifeste une légère élévation de la tension artérielle. Les myotiques essayés sur un Chien morphinisé n'ont modifié ni la tension oculaire ni la tension artérielle. L'effet hypertensif de la morphine a empêché l'action vasoconstrictrice des myotiques de se manifester.

La *dionine* n'a fait varier ni le tonus oculaire ni la tension artérielle.

Après l'*adrénaline*, la tension artérielle irienne semble s'élever de façon considérable en même temps que la tension oculaire augmente. La vasoconstriction est très nette. De ces essais, si brièvement indiqués, se dégage cette conclusion que les phénomènes vasomoteurs semblent plus importants que les variations de la tension vasculaire locale, secondaires souvent, primitives parfois. Ils montrent que les vaisseaux oculaires peuvent réagir de façon particulière à certaines substances. C'est ainsi que la pilocarpine, qui dilate les vaisseaux périphériques quand elle est administrée par voie hypodermique, provoque, instillée dans le cul-de-sac conjonctival, une constriction des artères iriennes. Nous avons vu cet effet se produire alors même que la pilocarpine est résorbée au point d'exagérer la salivation de l'animal.

Les expériences entreprises, pour être complètes, devraient être accompagnées des graphiques de la tension sanguine générale.

Mon but ici a été surtout de signaler une technique facile de sphgmomanométrie des artères de l'iris. Son application permettrait de compléter en les précisant des recherches antérieures de physiologie oculaire. Elle pourrait être essayée à d'autres espèces animales et peut-être, dans certains cas spécialement favorables, à l'homme.

Octobre 1920.

BIBLIOGRAPHIE.

- BAILLIART, P., *La pression artérielle dans les branches de l'artère centrale de la rétine*; nouvelle technique pour la déterminer. (ANN. D'OCULIST., nov 1917.)
- Id., *La circulation rétinienne à l'état normal et pathologique (Étude de pression vasculaire locale.)* (SOC. D'OPHT. DE PARIS, nov. 1919)
- MAGITOT et BAILLIART, *Modifications de la tension oculaire sous l'influence de pressions exercées sur le globe.* (ANN. D'OCUL., nov. 1919.)
- WEISS, O., *Échanges liquides intraoculaires.* (ZEITSCH. F. AUG. 1911.)
-

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

- Buttgenbach (H.)*. Les Minéraux du Massif de Slatà (Tunisie). Paris, 1920; extr. in-8° (pp. 1-45).
- Buttgenbach (H.) et Gillet (C.)*. La Cesàrolite (nouvelle espèce minérale) s. l. n. d. extr. in-8° (pp. 1-3).
- Pelseeneer (Paul)*. Les premiers temps de l'idée évolutionniste, Lamark, Geoffroy-Saint-Hilaire et Cuvier. Bruxelles, 1920; extr. in-8° (pp. 53-89).
- Stuyvaert (M.)*. Statique dynamique. Gand, 1920; in-8° (203 p.)
- Massart (Jean)* Éléments de biologie générale et de botanique. Vol. I, premier fascicule. Bruxelles, 1920; in-8° (208 p. planches).
- Zunz (Edgard)*. Notions de pharmacographie. Bruxelles, 1920; petit in-4° (73 pages).
- Les facteurs accessoires de la croissance et de l'équilibre. s. l. 1920; extr. in-8° (pp. 1-10).
- Sur la teneur en phosphore et en cendres du corps thyroïde chez l'homme. s. l. 1920; extr. in 8° (2 p.).
- Influence des conditions de la transfusion (vitesse, pression, hétérogénéité) sur le maintien ultérieur de la pression artérielle. s. l. 1920; extr. in 8° (3 p.).
- Sur la teneur en phosphore et en cendres du thymus chez l'homme. s. l. 1920; extr. in 8° (2 p.).
- Considérations biochimiques sur les lipoïdes et plus spécialement sur les phosphatides. Bruxelles, 1920; in-8° (37 p.).
-

TABLE DES MATIÈRES.

CLASSE DES SCIENCES. — *Séance du samedi 6 novembre 1920.*

M. le Directeur félicite M. J. Bordet, lauréat du prix Nobel	495
CORRESPONDANCE. M. le Ministre des Sciences et des Arts fait savoir qu'il tiendra compte du vœu exprimé par la Classe relativement au conseil de l'Observatoire royal. — Le même Ministre annonce qu'il transmet au Ministre de l'Agriculture, pour avis, le vœu de la Classe relatif au Jardin botanique de l'Etat. Le même Ministre prie l'Académie de lui présenter une liste de dix noms pour la constitution d'un Comité de lecture appelé à choisir et classer les manuscrits d'ouvrages scientifiques. — Le même Ministre fait savoir que le jury central n'a pas délivré cette année de diplôme de docteur en sciences chimiques avec la plus grande distinction. — La même communication est faite par les Universités de Bruxelles, de Gand et de Louvain. — L'Université de Liège annonce qu'elle a conféré à M. Ch.-J. Guhlissen le diplôme de docteur en sciences chimiques avec la plus grande distinction. — Le Secrétaire général du Comité international des Tables annuelles des constantes et données numériques de chimie, de physique et de technologie remercie l'Académie de la subvention qu'elle lui a accordée. — L'Université de Bologne annonce qu'elle célèbre (le 1 ^{er} novembre) le 40 ^e anniversaire de l'entrée en fonctions d'Augusto Righi. — J. Debyts adresse une note au sujet du Congrès international des mathématiciens à Strasbourg. — M. Julin adresse le texte d'une motion. — M. J. Verschaffelt remercie l'Académie de l'avoir inscrit au nombre de ses associés. — Hommages d'ouvrages.	
	495
RAPPORTS	497
NOMINATION DES COMITÉS NATIONAUX RATTACHÉS AUX UNIONS SCIENTIFIQUES INTERNATIONALES NOUVELLEMENT CONSTITUÉES OU EN VOIE DE CONSTITUTION.	
	497
SUBVENTIONS A ACCORDER PAR LA FONDATION AGATHON DE POTTER	498
MOTION DE M. JULIN.	498
LECTURE DES RAPPORTS de MM. Stroobant et le Paige sur le prix Mailly, 6 ^e période, lauréat M. G. Van Biesbroeck	499

Communications et Lectures.

ANALYSE MATHÉMATIQUE ET GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE. — <i>Sur les équations de Moutard à solutions quadratiques</i> (suite), par A. Demoulin.	503
BIOLOGIE. — <i>L'habitat et les allures du collembole marin Actaletes</i> , par Victor Willem	524
BIOLOGIE. — <i>Sur un Flagellé nouveau à trichocystes, Reckertia sagittifera, n. g., n. sp.</i> , par W. Conrad.	541
GÉOMÉTRIE. — <i>Sur une surface du quatrième ordre à douze points doubles coniques</i> , par Lucien Godeaux	554
PHYSIOLOGIE. — <i>Mensuration de la pression sanguine dans les artères de l'iris. Ses modifications sous l'influence de quelques substances toxiques</i> , par le Dr Georges Leplat.	561



06.493

ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE

BULLETIN

DE LA

CLASSE DES SCIENCES

1920 — N° 12



BRUXELLES

MAURICE LAMERTIN

LIBRAIRE-ÉDITEUR

Rue Coudenberg, 58-62

M. HAYEZ

IMPRIMEUR DE L'ACADÉMIE ROYALE

Rue de Louvain, 112

1920

Séance du samedi 4 décembre 1920.

M. A. GRAVIS, directeur de la Classe.

M. P. PELSENEER, secrétaire perpétuel.

Sont présents : MM. G. Cesàro, *vice-directeur* ; A. Gilkinet, J. Deruyts, Léon Fredericq, A. Lameere, Ch.-J. de la Vallée Poussin, Max Lohest, Fr. Swarts, Jean Massart, A. Demoulin, A. Rutot, A. de Hemptinne, Victor Willem, P. Stroobant, Ch. Julin, G. Lecointe, Émile Marchal, Pierre Nolf, *membres* ; L. Crismer, A. Brachet, Th. De Donder, Paul Fourmarier, O. Van der Stricht, V. Grégoire, *correspondants*.

M. G.-A. Boulenger, *associé*, assiste à la séance.

Absences motivées : MM. C. le Paige et J. Cornet, membres.

Avant d'aborder l'ordre du jour, M. le Directeur adresse les félicitations de la Classe à M. J. Bordet, promu Commandeur de l'Ordre de Léopold.

Il félicite également M. J. Cornet à qui vient d'être attribué le prix décennal des sciences minéralogiques (troisième période : 1907-1916).

CORRESPONDANCE.

M. le Ministre des Sciences et des Arts fait parvenir une ampliation de l'arrêté royal du 6 novembre 1920, nommant M. G. Cesàro Président de l'Académie pour l'année 1921.

Le même Ministre annonce qu'il sera tenu bonne note du désir de la Classe d'être représentée au sein de la Commission des Échanges internationaux (Section littéraire).

Le même Ministre fait connaître que la nouvelle Commission de la Bibliothèque royale sera assistée de membres correspondants, consultés au sujet des achats, et demande que la Classe désigne ceux de ses membres qu'elle voudrait voir nommer à ces fonctions. — A la suite d'un échange de vues auquel prennent part MM. Swarts, Stroobant, de Hemptinne et Lecointe, la Classe décide de maintenir son point de vue que c'est au sein même du Conseil de la Bibliothèque que la présence de personnalités compétentes en matière scientifique est nécessaire.

Le même Ministre demande à quelles conditions une table pourrait être louée au Laboratoire zoologique de Wimereux (Pas-de-Calais).

L'Académie de Médecine de Paris prie la Classe des sciences de l'Académie royale de Belgique de se faire représenter à la célébration de son Centenaire, les 20, 21 et 22 décembre courant; la Classe désigne MM. Fredericq, Bordet et Brachet pour la représenter.

M. A. Meuris s'informe de l'accueil fait à ses dernières communications, afin de savoir s'il doit continuer à en adresser à l'Académie.

La Société royale de Londres fait parvenir le rapport sur la Conférence des 28 et 29 septembre 1920, au sujet du Catalogue international de la littérature scientifique.

L'Université de Bruxelles prie la Classe de se faire représenter par son Bureau à la manifestation organisée en l'honneur de M. J. Bordet, au Palais d'Egmont, le samedi 18 décembre après-midi; MM. le Directeur de la Classe et le Secrétaire perpétuel sont délégués à cet effet. — La Classe décide, à ce propos, qu'au cours de sa séance publique du 16 décembre, elle organisera une manifestation académique en l'honneur de M. Bordet, à l'occasion du Prix Nobel qui vient de lui être attribué; M. Nolf accepte d'y faire l'exposé succinct de l'œuvre de M. J. Bordet.

RAPPORTS.

De MM. Swarts, Crismer et de Hemptinne sur les travaux présentés pour le Prix Louis Melsens (4^e période). Sur la proposition des trois rapporteurs, la Classe attribue le prix à M. O. Dony-Hénault.

Rapport de M. Fréd. Swarts, premier commissaire.

Un seul concurrent a présenté des travaux en vue de l'obtention du Prix Melsens : c'est M. Dony-Hénault qui soumet à l'appréciation de l'Académie deux ouvrages :

1^o Un traité intitulé : *Principes et applications de l'électrochimie* ;

2^o Un mémoire manuscrit sur les *Fours à résistances granulaires*.

Le premier ouvrage, qui fait partie de l'Encyclopédie des sciences chimiques appliquées, est dû à la collaboration de M. Dony-Hénault, de M. Gall, H., ingénieur, et de M. Ph. Guye, le savant professeur de Genève. Il ne s'agit pas d'une collaboration que j'appellerai enchevêtrée : M. Dony-Hénault a rédigé la première partie du traité, consacrée aux lois fondamentales de l'électrochimie ; M. Guye a, dans la troisième partie, traité la question de l'obtention de l'acide nitrique par combustion électrique de l'azote.

Cependant la deuxième partie, qui étudie l'application de l'électrochimie, est l'œuvre mixte de MM. Dony-Hénault et Gall, sans qu'il soit possible de déterminer avec précision la part de chacun d'eux. Néanmoins il y a de fortes présomptions pour que le chapitre X, le plus considérable de l'ouvrage, et qui est consacré à l'électrolyse des sels haloïdes des métaux alcalins,

soit dû pour la plus grande part à M. Dony, car y sont relatés de nombreux résultats de ses expériences personnelles, résultats en partie inédits avant la publication de ce traité.

Avant d'examiner cet ouvrage, il était une question préalable à trancher : un traité peut-il être présenté au Concours pour l'obtention du Prix Melsens ? Il n'est, en effet, aucun précédent.

L'article premier du règlement déterminant les conditions d'attribution du Prix Melsens stipule que « ce prix sera décerné tous les quatre ans à l'ouvrage le plus remarquable se rapportant à la chimie ou à la physique appliquée ».

Il n'est donc pas dit d'une manière expresse que l'ouvrage doit être l'exposé de recherches originales de l'auteur, et la donatrice, M^{me} Melsens, ne paraît pas avoir eu cette pensée. Dès lors j'estime, pour ma part, qu'un traité peut être admis au Concours.

Il est un deuxième point, plus délicat peut-être : l'ouvrage soumis à l'appréciation de l'Académie est dû à la collaboration de trois auteurs ; l'un d'eux est Français, un autre Suisse. Or l'article 2 du règlement dit que « sont seuls admis les travaux d'auteurs belges ».

Il paraît évident que pour sa première partie, qui est l'œuvre exclusive de M. Dony-Hénault, le traité qui nous est soumis est recevable. J'estime aussi que les chapitres de la seconde partie dans lesquels sont relatées les expériences personnelles de M. Dony doivent être l'objet de l'examen par les commissaires de la Classe.

La première partie du traité, consacrée aux lois de l'électrochimie, débute par la théorie des solutions, à laquelle fait suite l'étude de la dissociation électrolytique et de la conductivité. Puis est donnée la théorie des forces électromotrices et de la polarisation électrique ; l'étude de l'électrolyse termine cette première partie.

L'ensemble constitue un exposé clair et fort précis des notions fondamentales de l'électrochimie, que de nombreux tableaux

graphiques complètent très heureusement. On ne peut naturellement pas s'attendre à trouver dans l'exposé d'un sujet déjà aussi travaillé un caractère d'originalité marquée, ou beaucoup de choses neuves. Citons cependant une contribution personnelle intéressante de l'auteur à l'étude du voltamètre à cuivre et du rôle qu'y joue la formation de sels cuivreux.

M. Dony-Hénault ne présente pas les lois de l'électrochimie avec dogmatisme : il ne craint pas de montrer éventuellement l'impossibilité de trouver dans les théories actuelles l'interprétation de certains faits ; on ne saurait que l'en louer.

Si j'avais une observation critique à formuler, je dirais qu'il me paraît superflu de consacrer, dans un traité d'électrochimie, un chapitre à l'étude de la pression osmotique. Celle-ci doit être supposée connue du lecteur.

La seconde partie de l'ouvrage traite des applications de l'électrochimie ; c'est le point de vue industriel qui est essentiellement pris en considération : les réactions dont l'application n'a pas industriellement réussi sont passées sous silence. Je ne partage pas complètement à cet égard l'opinion des auteurs ; dans un traité qui, comme ils le disent, est destiné aux chercheurs et aux étudiants, il ne faut pas écarter la description de procédés qui, présentant un intérêt théorique, n'ont pas encore surmonté les difficultés qui rendent leur application industrielle peu avantageuse. Qui sait ce que réserve demain ? Ce sont en effet ces réactions qui constituent bien souvent la réserve pour l'avenir et dont la réalisation économique constitue précisément le problème sur lequel il convient d'attirer l'attention du chercheur. A cet égard on pourrait souhaiter qu'une place plus importante eût été réservée aux applications de l'électrochimie à la chimie organique. L'oxydation par électrolyse, par exemple, a été appliquée à la préparation de l'anthraquinone ; la réduction électrolytique de l'azobenzène, à l'obtention de la benzidine, pour ne citer que deux exemples d'opérations industrielles.

Ces remarques n'enlèvent d'ailleurs rien à l'excellente impres-

sion que m'a donnée la lecture très attentive de l'ouvrage. Les descriptions des applications industrielles et l'électrochimie sont des plus heureuses; les parts faites à la théorie des opérations et à leur technique sont harmonieusement pondérées; les auteurs ne se sont pas perdus dans les descriptions des détails de construction et sont néanmoins parvenus à donner des réactions qu'ils étudient une idée exacte et très suffisamment complète.

Un développement particulièrement important a été donné à l'électrolyse des solutions de chlorures alcalins. Si ce chapitre est l'objet d'une prédilection manifeste, il ne faut pas l'attribuer exclusivement à son importance au point de vue technique. M. Dony-Hénault a fait plus spécialement de cette question l'objet de ses recherches personnelles; il a notamment étudié le rôle des chromates dans la préparation électrolytique des chlorates et l'influence de la nature de la cathode sur l'action catalytique de ces sels.

Signalons encore un procédé pour provoquer la décomposition catalytique de l'hypochlorite dans les lessives de chlorate de sodium.

Cette revue de la contribution personnelle de M. Dony-Hénault à l'électrolyse industrielle des chlorures alcalins est loin d'être complète. A la lecture très attachante du chapitre X du traité, on en retrouve la trace à chaque instant.

On peut affirmer que cette partie de l'ouvrage constitue un exposé excellent et complet de nos connaissances sur l'électrolyse des chlorures alcalins dissous. Il est sans doute des monographies plus détaillées; je pense qu'il n'en existe pas donnant une notion plus parfaite de la question.

Il est plus difficile d'établir la part qui appartient en propre à M. Dony dans le reste de l'ouvrage et notamment dans les chapitres fort importants consacrés à l'électrolyse des sels fondus et au four électrique.

Il ne me paraît pas qu'il convienne qu'à l'occasion d'un

prix à décerner par l'Académie, nous soumettions les travaux de MM. Gall et Guye à une analyse critique qui ne nous est pas demandée. Je m'en abstiendrai donc, malgré tout le bien que j'aimerais à en dire.

Je ne crois cependant pas déroger à ces raisons de convenance en formulant l'opinion que les *Principes et applications de l'électrochimie* constituent une œuvre de premier ordre, le meilleur traité d'électrochimie qui ait été écrit en langue française.

M. Dony-Hénault présente en outre un mémoire sur l'emploi des résistances métalliques granulaires au chauffage électrique. Ce mémoire a été présenté il y a quelques mois à la Classe des sciences et j'ai déjà à cette occasion signalé l'intérêt qu'il présente.

Au cryptol, résistance granulaire formée de charbon de cornue, M. Dony substitue des grains métalliques, meilleurs conducteurs thermiques que le carbone. [Il a naturellement recours à des métaux peu fusibles : chrome, alliage de chrome molybdène et même l'acier.

Il a fait des propriétés de ces résistances une étude détaillée, surtout au point de vue de leur rendement thermique, et a montré les grands avantages qu'elles présentent au point de vue de la régularité du chauffage.

Grâce à leur conductibilité thermique élevée, elles sont supérieures au cryptol et, d'autre part, par leur masse considérable, elles assurent mieux que les résistances filiformes l'uniformité dans le chauffage. Elles sont, comme le dit l'auteur, de véritables thermostats.

Ces résistances sont faciles à construire, peu coûteuses : pour les températures ne dépassant pas 1,200°, on peut employer des billes de roulement en acier ; ce dernier se recouvre d'une couche de magnétite, également conductrice. D'autre part les billes se soudent par leurs points de contact en une masse continue.

Les essais industriels que M. Dony-Hénault avait commencés avant la guerre ont dû être interrompus; dans ces conditions il n'a pas été possible d'assurer au procédé de chauffage préconisé par l'auteur la consécration du succès industriel.

Pour conclure, il me paraît que par la nature et la valeur des ouvrages que M. Dony-Hénault soumet à l'appréciation de l'Académie, ce savant remplit toutes les conditions requises pour que le Prix Melsens lui soit conféré et je me plais à proposer à la Classe de couronner par cette récompense académique la contribution importante que notre correspondant a apportée à la chimie et à la physique appliquée.

Rapport de M. Léon Crismer, deuxième commissaire.

Le traité intitulé « Principes et applications de l'électrochimie », présenté par M. O. Dony-Hénault au jury du Prix Melsens, est le premier ouvrage publié en langue française où soit établie sur les lois de la dissociation électrolytique l'étude systématique des électrolyseurs. Les auteurs n'y étudient que des domaines dont ils avaient la connaissance et l'expérience personnelles.

Mon savant confrère M. Swarts a parfaitement établi la part qui revient à M. Dony-Hénault dans cette œuvre importante : exposé de la partie théorique, expériences inédites réalisées soit dans la pratique industrielle dans les usines électrochimiques de M. H. Gall, soit dans les laboratoires de l'École des Mines de Mons, ou des Instituts Solvay, et introduites dans les chapitres relatifs à l'électrolyse des chlorures alcalins et à l'action de l'effluve électrique.

Je m'associe, sans réserve, aux éloges que M. Swarts décerne à l'œuvre et à ses auteurs.

Dans son mémoire « sur l'emploi des résistances métalliques

granulaires au chauffage électrique », M. Dony-Hénault montre les avantages de ces fours au point de vue du rendement et de la répartition homogène de la température. M. Dony-Hénault s'est attaché à conserver à son exposé un caractère purement scientifique, à dégager les lois spéciales de la transmission électrique et thermique dans les conducteurs granulaires.

Je suis heureux de me rallier à la proposition qui vous est faite par mon savant confrère M. Swarts d'attribuer le Prix Melsens à M. Dony-Hénault.

Rapport de M. de Hemptinne, troisième commissaire.

Je ne puis rien ajouter au rapport si complet du premier commissaire; je suis heureux de pouvoir me rallier à ses conclusions.

Sur la convergence du développement en série de la fonction perturbatrice par la méthode de M. Brendel dans le cas de la planète (279) Thule ; note par Jan Krassowski, présentée par M. P. Stroobant.

Rapport de M. Stroobant.

M. Krassowski, professeur à l'Université et directeur actuel de l'Observatoire de Varsovie, m'a adressé une petite note de mécanique céleste, qu'il voudrait voir insérer au *Bulletin* de l'Académie royale de Belgique; il en serait, dit-il, particulièrement honoré, à cause des sentiments sympathiques que notre pays a si souvent témoignés aux Polonais.

Le but de cette note est de démontrer la convergence du développement de la fonction perturbatrice, d'après la méthode de M. Brendel (et dans les conditions indiquées par celui-ci), pour le cas de la petite planète Thule (279). Cet astéroïde présente la particularité d'être à la limite extérieure de l'anneau

proprement dit des petites planètes et, d'autre part, d'avoir une durée de révolution presque exactement égale aux trois quarts de celle de Jupiter. On sait que le cas particulier du problème des trois corps, où les moyens mouvements de la planète troublante et de la planète troublée sont commensurables, a donné lieu, depuis une trentaine d'années, à de nombreuses recherches.

Je propose à la Classe l'impression au *Bulletin* de la note de M. Krassowski.

— Adopté.

NOMINATION DE LA COMMISSION SPÉCIALE DES FINANCES.

Sont élus : MM. Demoulin, Deruyts, Fredericq, Lameere et le Paige.

NOMINATION

DES MEMBRES DES COMITÉS NATIONAUX RATTACHÉS AUX UNIONS
SCIENTIFIQUES INTERNATIONALES NOUVELLEMENT CONSTITUÉES
OU EN VOIE DE FORMATION.

La Classe adopte successivement les douze noms proposés pour chacun des Comités suivants :

1° Comité d'Astronomie; 2° Comité de Géodésie et de Géophysique; 3° Comité de Physique et de Radiotélégraphie; 4° Comité de Géologie; 5° Comité de Géographie; 6° Comité de Bibliographie scientifique.

BIOGRAPHIES D'ACADÉMICIENS DÉCÉDÉS.

M. A. Gilkinet sera prié de rédiger la notice biographique sur M. Jorissen.

COMMUNICATION.

BOTANIQUE. — Quelques résultats d'observations phénologiques sur des végétaux,

par E. VANDERLINDEN, météorologiste à l'Institut royal météorologique ⁽¹⁾.

Dans un travail publié en 1910 ⁽²⁾, j'ai montré dans quelle mesure les observations phénologiques indiquent des rapports entre les variations climatiques et la précocité et la tardiveté des floraisons. La conclusion principale qui s'est dégagée de cette étude est que (pour autant qu'il s'agisse du climat d'Uccle) la température et la radiation sont les seuls facteurs climatiques dont l'influence soit visible sur les phénomènes en question. J'avais alors pris en considération principalement les floraisons printanières d'arbustes, observées de 1896 à 1909. Ces constatations ont été poursuivies pendant la période 1910-1920. La plupart de ces années eurent des hivers et des printemps fort doux et, partant, des floraisons printanières prématurées. Ajoutées à la série d'observations 1896-1909, elles ont eu pour effet d'avancer un peu les dates moyennes calculées antérieurement. Cette conséquence est en somme peu importante.

Dans la présente notice, destinée à compléter sommairement mon premier travail, je ferai connaître ce que les observations montrent quant à la manière dont les plantes herbacées réagissent sous l'influence des agents atmosphériques. Comme éléments d'étude, je disposais d'une série d'observations de floraisons d'une quarantaine d'espèces commencées en 1906. J'ai arrêté mon investigation à l'année 1920.

Ayant fait autrefois un exposé bibliographique du sujet, je n'y reviendrai plus.

Les données statistiques des observations sont résumées dans

⁽¹⁾ Présenté par M. Jean Massart.

⁽²⁾ *Étude sur les phénomènes périodiques de la végétation dans leurs rapports avec les variations climatiques.* (RECUEIL DE L'INSTITUT BOTANIQUE LÉO ERRERA, t. VIII.)

les deux tableaux, qui renseignent les dates annuelles de floraison. Les dates extrêmes y sont indiquées en caractères gras. On y trouvera aussi la date moyenne, déduite des différentes années, ainsi que l'amplitude ou nombre de jours qui séparent la date la plus hâtive de la plus tardive.

L'examen de ces données statistiques conduit à certaines conclusions intéressantes.

Considérons les années 1912, 1913, 1914, 1916 et 1920, qui ont fourni des floraisons en très grande majorité prématurées. Nous trouvons aux espèces ligneuses, dont la floraison s'effectue normalement entre fin février et fin mai, une avance moyenne en jours indiquée ci-dessous :

1912	1913	1914	1916	1920
11,0	12,4	10,0	12,4	20,7

Pour les espèces herbacées fleurissant normalement endéans la même période, l'avance moyenne fut :

1912	1913	1914	1916	1920
8,4	5,6	5,2	4,1	12,4

Les années 1908, 1909 et 1917 furent, par contre, des années tardives. Le retard moyen fut pour les mêmes espèces ligneuses :

1908	1909	1917
11,1	9,5	16,4

et pour les herbacées :

1908	1909	1917
8,0	6,7	10,2

Dans les deux cas, les écarts furent moindres chez les espèces herbacées.

L'influence des variations thermiques est donc plus intense sur les espèces ligneuses. Il me semble que la raison en réside dans le fait que chez elles les matières de réserve accumulées en vue de la formation de nouvelles fleurs se trouvent dans des organes aériens et sont ainsi plus affectées par les mouvements de la température. Chez les espèces herbacées, ces greniers alimentaires, étant souterrains, sont soumis à une température plus régulière.

Il ressort aussi des observations que chez les espèces herbacées les écarts entre les dates extrêmes de floraison obéissent à une périodicité. Ils sont très considérables jusque vers avril, décroissent ensuite et passent par un minimum vers le début de juin, pour augmenter progressivement après. En somme, les floraisons de la dernière quinzaine de mai et de tout juin sont les plus stables et s'écartent le moins de la date normale. J'avais fait remarquer autrefois la même particularité pour les espèces ligneuses.

Pour l'explication de cette périodicité, je ne puis que répéter ce que j'ai dit antérieurement : elle est une conséquence de la loi de l'optimum. Le facteur climatique le plus souvent en défaut, et spécialement au premier printemps, est en nos contrées la température. Les végétaux qui fleurissent à cette époque de l'année sortent très tôt de leur repos hivernal. Ayant subi très tôt les modifications chimiques préalables, ils « partent » sous l'influence des premières températures efficaces et celles-ci sont relativement faibles.

La période à floraisons plus régulières résulte de ce qu'elle fournit moins de températures inhibitrices. En outre, à valeur égale, les déficits thermiques qui surviennent alors troublent moins le processus évolutif des organes floraux, parce qu'ils représentent des écarts par rapport à une température normale plus élevée. On se rapproche donc du climat tropical. A partir de juillet, les floraisons sont déjà moins constantes. Ici le phénomène de floraison se complique, parce qu'il ne dépend plus uniquement des variations climatiques concomitantes, mais aussi de celles du passé et notamment de celles du printemps. En effet, chez les plantes à floraison estivale, les ébauches florales ne sont plus préexistantes, mais se forment l'année même. Un printemps défavorable se traduira donc par un retard, que des périodes subséquentes favorables ne pourront plus effacer entièrement. Ici la radiation solaire intervient aussi plus activement.

Dates de floraison

ESPÈCES.	1896	1897	1898	1899	1900	1901	1902	1903	1904	1905	1906	1907
<i>Corylus Avellana</i> . . .	7 3	»	19 3	17 2	26 2	5 3	1 3	6 2	13 2	11 2	17 2	4
<i>Alnus glutinosa</i> . . .	»	»	19 3	17 2	1 3	9 3	1 3	16 2	»	2 3	19 2	7
<i>Salix caprea</i>	»	»	8 4	14 3	19 3	8 4	22 3	14 3	29 3	20 3	17 3	29
<i>Forsythia viridissima</i> .	»	»	»	»	»	»	28 3	21 3	13 4	1 4	4 4	5
<i>Ribes sanguineum</i> . . .	25 3	26 3	5 4	4 4	17 4	20 4	7 4	19 3	15 4	27 3	26 3	3
<i>Ribes alpinum</i>	»	»	25 4	13 4	20 4	22 4	9 4	27 3	14 4	4 4	12 4	10
<i>Ribes rubrum</i>	»	»	»	»	»	»	»	27 3	13 4	3 4	12 4	10
<i>Prunus spinosa</i>	10 4	18 4	21 4	10 4	22 4	23 4	17 4	27 3	18 4	14 4	11 4	17
<i>Sambucus racemosa</i> . . .	23 4	15 4	26 4	21 4	23 4	29 4	20 4	5 4	20 4	16 4	12 4	10
<i>Prunus Padus</i>	»	»	10 5	3 5	30 4	3 5	24 4	10 4	23 4	22 4	19 4	24
<i>Syringa vulgaris</i>	»	5 5	13 5	13 5	7 5	13 5	3 5	5 5	2 5	9 5	5 5	6
<i>Pirus aucuparia</i>	»	»	»	20 5	6 5	13 5	10 5	4 5	3 5	9 5	6 5	10
<i>Syringa persica</i>	12 5	13 5	17 5	15 5	8 5	13 5	12 5	5 5	6 5	15 5	7 5	11
<i>Mespilus monogyna</i> . . .	12 5	15 5	21 5	15 5	16 5	17 5	16 5	6 5	13 5	15 5	13 5	12
<i>Cydonia vulgaris</i>	»	»	»	»	»	»	26 5	14 5	17 5	17 5	8 5	12
<i>Laburnum vulgare</i>	15 5	12 5	17 5	18 5	15 5	17 5	26 5	12 5	14 5	16 5	7 5	12
<i>Evonymus europaea</i> . . .	22 5	20 5	23 5	24 5	28 5	24 5	28 5	11 5	19 5	24 5	17 5	20
<i>Rosa rugosa</i>	17 5	19 5	25 5	30 5	»	»	28 5	23 5	21 5	»	21 5	21
<i>Philadelphus coronarius</i>	29 5	22 5	4 6	1 6	2 6	28 5	4 6	28 5	26 5	30 5	25 5	27
<i>Rosa canina</i>	»	»	»	»	»	»	19 6	1 6	31 5	4 6	1 6	30
<i>Sambucus nigra</i>	»	»	»	»	»	22 6	23 6	30 5	6 6	31 5	7 6	27
<i>Cornus sanguinea</i>	5 6	4 6	18 6	12 6	11 6	4 6	20 6	8 6	7 6	5 6	7 6	5
<i>Hydrangea paniculata</i> .	»	14 7	1 8	25 7	25 7	2 8	24 7	4 8	16 7	12 7	24 7	20

Espèces ligneuses.

1908	1909	1910	1911	1912	1913	1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	MOYENNE.	Différence des dates extrêmes.
18 2	10 3	21 2	18 2	10 2	1 2	12 2	9 2	22 1	13 3	24 1	23 2	1 2	18 2	56
8 3	20 3	23 2	25 2	13 2	1 2	16 2	4 3	5 2	23 3	9 2	»	11 2	20 2	47
4 4	7 4	11 3	22 3	5 3	5 3	10 3	26 3	16 3	20 4	5 3	21 3	23 2	21 3	56
17 4	10 4	9 3	23 3	5 3	5 3	17 3	24 3	5 2	2 5	14 3	11 3	19 2	22 3	86
7 4	15 4	11 3	28 3	15 3	6 3	1 4	6 4	16 3	30 4	23 3	19 3	3 3	30 3	57
21 4	17 4	5 4	31 3	20 3	26 3	1 4	10 4	28 3	26 4	24 3	7 4	6 3	7 4	50
17 4	17 4	6 4	12 4	1 4	2 4	6 4	23 4	5 4	3 5	31 3	23 4	28 3	10 4	37
1 5	23 4	9 4	14 4	27 3	24 3	3 4	19 4	31 3	5 5	31 3	18 4	18 3	12 4	47
3 5	27 4	18 4	23 4	9 4	5 4	10 4	28 4	4 4	4 5	7 4	18 3	26 3	17 4	38
4 5	27 4	20 4	22 4	10 4	11 4	12 4	30 4	9 4	10 5	7 4	5 5	30 3	23 4	40
16 5	30 4	3 5	4 5	22 4	28 4	18 4	7 5	27 4	13 5	3 5	12 5	7 4	4 5	39
11 5	12 5	12 5	3 5	22 4	22 4	20 4	7 5	28 4	13 5	2 5	14 5	3 4	5 5	46
16 5	8 5	12 5	9 5	25 4	28 4	23 4	10 5	27 4	18 5	5 5	14 5	15 4	9 5	51
16 5	10 5	12 5	6 5	23 4	21 4	22 4	8 5	28 4	20 5	4 5	15 5	12 4	9 5	38
19 5	13 5	13 5	9 5	27 4	28 4	28 4	8 5	28 4	20 5	4 5	14 5	17 4	9 5	38
19 5	13 5	19 5	10 5	25 4	28 4	23 4	8 5	1 5	23 5	7 5	17 5	13 4	10 5	42
22 5	23 5	20 5	15 5	8 5	5 5	5 5	19 5	4 5	23 5	9 5	20 5	24 4	17 5	33
28 5	22 5	22 5	27 5	11 5	21 5	9 5	24 5	12 5	24 5	18 5	26 5	12 5	21 5	19
2 6	26 5	26 5	22 5	17 5	21 5	18 5	26 5	17 5	28 5	19 5	26 5	10 5	26 5	21
4 6	26 5	28 5	26 5	21 5	21 5	18 5	30 5	18 5	28 5	22 5	26 5	14 5	28 5	35
3 6	4 6	28 5	19 5	21 5	19 5	22 5	31 5	8 5	28 5	19 5	21 5	14 5	29 5	39
4 6	1 6	5 6	31 5	1 6	31 5	2 6	1 6	29 5	2 6	26 5	7 6	26 5	5 6	25
20 7	31 7	18 7	10 7	10 7	17 7	9 7	13 7	3 8	4 8	24 7	31 7	7 7	21 7	28

Dates de floraison :

Espèces ligneuses.

ESPÈCES.	1896	1897	1898	1899	1900	1901	1902	1903	1904	1905	1906	1907	1908	1909	1910	1911	1912	1913	1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	MOTENNE.	Différence des dates extrêmes.
<i>Corylus Avellana</i> . . .	7 3	»	19 3	17 2	26 2	5 3	1 3	6 2	13 2	11 2	17 2	4 3	18 2	10 3	21 2	18 2	10 2	1 2	12 2	9 2	22 1	13 3	24 1	23 2	1 2	18 2	56
<i>Alnus glutinosa</i> . . .	»	»	19 3	17 2	1 3	9 3	1 3	16 2	»	2 3	19 2	7 3	8 3	20 3	23 2	25 2	13 2	1 2	16 2	4 3	5 2	23 3	9 2	»	11 2	20 2	47
<i>Salix caprea</i>	»	»	8 4	14 3	19 3	8 4	22 3	14 3	29 3	20 3	17 3	29 3	4 4	7 4	11 3	22 3	5 3	5 3	10 3	26 3	16 3	20 4	5 3	21 3	23 2	21 3	56
<i>Forsythia viridissima</i> . .	»	»	»	»	»	»	28 3	21 3	13 4	1 4	4 4	5 4	17 4	10 4	9 3	23 3	5 3	5 3	17 3	24 3	5 2	2 5	14 3	11 3	19 2	22 3	86
<i>Ribes sanguineum</i> . . .	25 3	26 3	5 4	4 4	17 4	20 4	7 4	19 3	15 4	27 3	26 3	3 4	7 4	15 4	11 3	28 3	15 3	6 3	1 4	6 4	16 3	30 4	23 3	19 3	3 3	30 3	57
<i>Ribes alpinum</i>	»	»	25 4	13 4	20 4	22 4	9 4	27 3	14 4	4 4	12 4	10 4	21 4	17 4	5 4	31 3	20 3	26 3	1 4	10 4	28 3	26 4	24 3	7 4	6 3	7 4	50
<i>Ribes rubrum</i>	»	»	»	»	»	»	»	27 3	13 4	3 4	12 4	10 4	17 4	17 4	6 4	12 4	1 4	2 4	6 4	23 4	5 4	3 5	31 3	23 4	28 3	10 4	37
<i>Prunus spinosa</i>	10 4	18 4	21 4	10 4	22 4	23 4	17 4	27 3	18 4	14 4	11 4	17 4	1 5	23 4	9 4	14 4	27 3	24 3	3 4	19 4	31 3	5 5	31 3	18 4	18 3	12 4	47
<i>Sambucus racemosa</i> . . .	23 4	15 4	26 4	21 4	23 4	29 4	20 4	5 4	20 4	16 4	12 4	10 4	3 5	27 4	18 4	23 4	9 4	5 4	10 4	28 4	4 4	4 5	7 4	18 3	26 3	17 4	38
<i>Prunus Padus</i>	»	»	10 5	3 5	30 4	3 5	24 4	10 4	23 4	22 4	19 4	24 4	4 5	27 4	20 4	22 4	10 4	11 4	12 4	30 4	9 4	10 5	7 4	5 5	30 3	23 4	40
<i>Syringa vulgaris</i>	»	5 5	13 5	13 5	7 5	13 5	3 5	5 5	2 5	9 5	5 5	6 5	16 5	30 4	3 5	4 5	22 4	28 4	18 4	7 5	27 4	13 5	3 5	12 5	7 4	4 5	39
<i>Pirus aucuparia</i>	»	»	»	20 5	6 5	13 5	10 5	4 5	3 5	9 5	6 5	10 5	11 5	12 5	12 5	3 5	22 4	22 4	20 4	7 5	28 4	13 5	2 5	14 5	3 4	5 5	46
<i>Syringa persica</i>	12 5	13 5	17 5	15 5	8 5	13 5	12 5	5 5	6 5	15 5	7 5	11 5	16 5	8 5	12 5	9 5	25 4	28 4	23 4	10 5	27 4	18 5	5 5	14 5	15 4	9 5	51
<i>Mespilus monogyna</i> . . .	12 5	15 5	21 5	15 5	16 5	17 5	16 5	6 5	13 5	15 5	13 5	12 5	16 5	10 5	12 5	6 5	23 4	21 4	22 4	8 5	28 4	20 5	4 5	15 5	12 4	9 5	38
<i>Cydonia vulgaris</i>	»	»	»	»	»	»	26 5	14 5	17 5	17 5	8 5	12 5	19 5	13 5	13 5	9 5	27 4	28 4	28 4	8 5	28 4	20 5	4 5	14 5	17 4	9 5	38
<i>Laburnum vulgare</i>	15 5	12 5	17 5	18 5	15 5	17 5	26 5	12 5	14 5	16 5	7 5	12 5	19 5	13 5	19 5	10 5	25 4	28 4	23 4	8 5	1 5	23 5	7 5	17 5	19 4	10 5	42
<i>Evonymus europaea</i> . . .	22 5	20 5	23 5	24 5	28 5	24 5	28 5	11 5	19 5	24 5	17 5	20 5	22 5	23 5	20 5	15 5	8 5	5 5	5 5	19 5	4 5	23 5	9 5	20 5	24 4	17 5	33
<i>Rosa rugosa</i>	17 5	19 5	25 5	30 5	»	»	28 5	23 5	21 5	»	21 5	21 5	28 5	22 5	22 5	27 5	11 5	21 5	9 5	24 5	12 5	24 5	18 5	26 5	12 5	21 5	19
<i>Philadelphus coronarius</i>	29 5	22 5	4 6	1 6	2 6	28 5	4 6	28 5	26 5	30 5	25 5	27 5	2 6	26 5	26 5	22 5	17 5	21 5	18 5	26 5	17 5	28 5	19 5	26 5	10 5	26 5	21
<i>Rosa canina</i>	»	»	»	»	»	»	19 6	1 6	31 5	4 6	1 6	30 5	4 6	26 5	28 5	26 5	21 5	21 5	18 5	30 5	18 5	28 5	22 5	26 5	14 5	28 5	35
<i>Sambucus nigra</i>	»	»	»	»	»	22 6	23 6	30 5	6 6	31 5	7 6	27 5	3 6	4 6	28 5	19 5	21 5	19 5	22 5	31 5	8 5	28 5	19 5	21 5	14 5	29 5	39
<i>Cornus sanguinea</i> . . .	5 6	4 6	18 6	12 6	11 6	4 6	20 6	8 6	7 6	5 6	7 6	5 6	4 6	1 6	5 6	31 5	1 6	31 5	2 6	1 6	29 5	2 6	26 5	7 6	26 5	5 6	25
<i>Hydrangea paniculata</i> .	14 7	1 8	25 7	25 7	2 8	24 7	4 8	16 7	12 7	24 7	20 7		20 7	31 7	18 7	10 7	10 7	17 7	9 7	13 7	3 8	4 8	24 7	31 7	7 7	21 7	28

Dates de floraison

ESPÈCES.	1906	1907	1908	1909	1910	1911	1912
<i>Galanthus nivalis</i> . . .	10 2	22 2	19 2	10 3	19 2	21 2	16 2
<i>Pulmonaria officinalis</i> . .	»	30 3	»	11 4	16 3	25 3	23 3
<i>Pachysandra procumbens</i> .	12 4	2 4	16 4	15 4	29 3	4 4	26 3
<i>Saxifraga crassifolia</i> . .	17 4	24 4	1 5	27 4	27 4	27 4	6 4
<i>Luzula sylvatica</i> . . .	21 4	8 5	7 5	4 5	27 4	28 4	25 4
<i>Asperula odorata</i> . . .	30 4	8 5	9 5	8 5	28 4	1 5	15 4
<i>Doronicum pardalianches</i>	»	14 5	17 5	11 5	13 5	9 5	25 4
<i>Linaria cymbalaria</i> . . .	8 5	22 5	20 5	22 5	22 5	11 5	6 5
<i>Symphytum officinale</i> . .	14 5	21 5	21 5	23 5	22 5	15 5	8 5
<i>Cerastium tomentosum</i> . .	18 5	23 5	26 5	24 5	19 5	16 5	6 5
<i>Iris florentina</i> . . .	14 5	17 5	22 5	22 5	25 5	18 5	9 5
<i>Dianthus cæsius</i> . . .	25 5	25 5	27 5	21 5	22 5	15 5	9 5
<i>Lupinus polyphyllus</i> . . .	»	»	»	22 5	23 5	20 5	22 5
<i>Pæonia officinalis</i> (1) . .	17 5	23 5	23 5	21 5	23 5	15 5	11 5
<i>Geranium sanguineum</i> . .	25 5	25 5	24 5	23 5	19 5	19 5	11 5
<i>Iris siberica</i>	29 5	25 5	27 5	26 5	24 5	19 5	17 5
<i>Lathyrus niger</i>	27 5	28 5	31 5	3 6	25 5	26 5	11 5
<i>Veronica teucrium</i>	1 6	31 5	3 6	1 6	30 5	29 5	21 5
<i>Aristolochia Clematitis</i> . .	26 6	10 6	4 6	3 6	3 6	27 5	21 5

(1) 1-6-1899. — Les dates moyennes pour *Asperula odorata*, *Pæonia officinalis* et *Melissa*

phénologiques sur des végétaux.

Espèces herbacées.

1913	1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	MOYENNE.	Différence des dates extrêmes.
1 2	9 2	18 2	4 2	12 3	9 2	18 2	1 2	16 2	39
23 3	23 3	24 3	18 3	19 4	13 3	11 3	2 3	23 3	47
26 3	31 3	8 4	3 4	25 4	26 3	9 4	22 3	5 4	33
21 4	14 4	3 5	5 5	8 5	26 4	5 5	3 4	25 4	34
26 4	25 4	30 4	26 4	12 5	3 5	6 5	9 4	29 4	28
24 4	21 4	3 5	23 4	12 5	29 4	7 5	9 4	30 4	32
28 4	6 5	10 5	4 5	18 5	4 5	11 5	30 4	8 5	22
»	23 5	10 5	5 5	21 5	3 5	13 5	9 4	12 5	43
9 5	11 5	19 5	11 5	22 5	14 5	16 5	28 4	15 5	24
13 5	13 5	17 5	10 5	24 5	15 5	15 5	3 5	16 5	23
16 5	»	17 5	12 5	23 5	14 5	17 5	12 5	17 5	15
14 5	13 5	17 5	15 5	25 5	16 5	24 5	10 5	19 5	18
19 5	22 5	23 5	17 5	24 5	18 5	24 5	12 5	21 5	11
14 5	11 5	21 5	16 5	25 5	18 5	23 5	7 5	21 5	24
14 5	19 5	26 5	24 5	28 5	23 5	28 5	19 5	22 5	16
24 5	19 5	23 5	22 5	23 5	19 5	26 5	15 5	23 5	13
24 5	16 5	26 5	20 5	27 5	22 5	26 5	19 5	24 5	22
24 5	22 5	27 5	22 5	31 5	22 5	31 5	22 5	28 5	13
26 5	23 5	25 5	24 5	23 5	1 6	24 5	24 5	30 5	35

officinalis sont déduites de la période 1896-1920.

Dates de floraison : Espèces herbacées.

ESPÈCES.	1906	1907	1908	1909	1910	1911	1912	1913	1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	MOYENNE.	Différence des dates extrêmes.
<i>Galanthus nivalis</i> . . .	10 2	22 2	19 2	10 3	19 2	21 2	16 2	1 2	9 2	18 2	4 2	12 3	9 2	18 2	1 2	16 2	39
<i>Pulmonaria officinalis</i> . .	»	30 3	»	11 4	16 3	25 3	23 3	23 3	23 3	24 3	18 3	19 4	13 3	11 3	2 3	23 3	47
<i>Pachysandra procumbens</i> .	12 4	2 4	16 4	15 4	29 3	4 4	26 3	26 3	31 3	8 4	3 4	25 4	26 3	9 4	22 3	5 4	33
<i>Saxifraga crassifolia</i> . .	17 4	24 4	1 5	27 4	27 4	27 4	6 4	21 4	14 4	3 5	5 5	8 5	26 4	5 5	3 4	25 4	34
<i>Luzula sylvatica</i> . . .	21 4	8 5	7 5	4 5	27 4	28 4	25 4	26 4	25 4	30 4	26 4	12 5	3 5	6 5	9 4	29 4	28
<i>Asperula odorata</i> .	30 4	8 5	9 5	8 5	28 4	1 5	15 4	24 4	21 4	3 5	23 4	12 5	29 4	7 5	9 4	30 4	32
<i>Doronicum pardalianches</i>	»	14 5	17 5	11 5	13 5	9 5	25 4	28 4	6 5	10 5	4 5	18 5	4 5	11 5	30 4	8 5	22
<i>Linaria cymbalaria</i> . . .	8 5	22 5	20 5	22 5	22 5	11 5	6 5	»	23 5	10 5	5 5	21 5	3 5	13 5	9 4	12 5	43
<i>Symphytum officinale</i> . .	14 5	21 5	21 5	23 5	22 5	15 5	8 5	9 5	11 5	19 5	11 5	22 5	14 5	16 5	28 4	15 5	24
<i>Cerastium tomentosum</i> .	18 5	23 5	26 5	24 5	19 5	16 5	6 5	13 5	13 5	17 5	10 5	24 5	15 5	15 5	3 5	16 5	23
<i>Iris florentina</i> . . .	14 5	17 5	22 5	22 5	25 5	18 5	9 5	16 5	»	17 5	12 5	23 5	14 5	17 5	12 5	17 5	15
<i>Dianthus cæsius</i> . . .	25 5	25 5	27 5	21 5	22 5	15 5	9 5	14 5	13 5	17 5	15 5	25 5	16 5	24 5	10 5	19 5	18
<i>Lupinus polyphyllus</i> . .	»	»	»	22 5	23 5	20 5	22 5	19 5	22 5	23 5	17 5	24 5	18 5	24 5	12 5	21 5	11
<i>Pæonia officinalis</i> (1) . .	17 5	23 5	23 5	21 5	23 5	15 5	11 5	14 5	11 5	21 5	16 5	25 5	18 5	23 5	7 5	21 5	24
<i>Geranium sanguineum</i> .	25 5	25 5	24 5	23 5	19 5	19 5	11 5	14 5	19 5	26 5	24 5	28 5	23 5	28 5	19 5	22 5	16
<i>Iris siberica</i>	29 5	25 5	27 5	26 5	24 5	19 5	17 5	24 5	19 5	23 5	22 5	23 5	19 5	26 5	15 5	23 5	13
<i>Lathyrus niger</i>	27 5	28 5	31 5	3 6	25 5	26 5	11 5	24 5	16 5	26 5	20 5	27 5	22 5	26 5	19 5	24 5	22
<i>Veronica teucrium</i> . . .	1 6	31 5	3 6	1 6	30 5	29 5	21 5	24 5	22 5	27 5	22 5	31 5	22 5	31 5	22 5	28 5	13
<i>Aristolochia Clematitis</i>	26 6	10 6	4 6	3 6	3 6	27 5	21 5	26 5	23 5	25 5	24 5	23 5	1 6	24 5	24 5	30 5	35

(1) 1-6-1899. — Les dates moyennes pour *Asperula odorata*, *Pæonia officinalis* et *Melissa**officinalis* sont déduites de la période 1896-1920.

Dates de floraison.

ESPÈCES.	1906	1907	1908	1909	1910	1911	19
<i>Epilobium spicatum</i> . .	9 6	10 6	10 6	8 6	8 6	5 6	5
<i>Tradescantia virginica</i> .	16 6	17 6	10 6	8 6	8 6	»	5
<i>Thalictrum minus</i> . . .	21 6	15 6	5 6	14 6	11 6	6 6	5
<i>Campanula persicifolia</i> .	20 6	15 6	15 6	11 6	10 6	5 6	30
<i>Scrophularia nodosa</i> . .	8 6	15 6	11 6	12 6	12 6	3 6	8
<i>Sedum acre</i>	19 6	17 6	12 6	9 6	10 6	5 6	12
<i>Lysimachia numullaria</i> .	»	20 6	18 6	14 6	14 6	6 6	10
<i>Gratiola officinalis</i> . . .	»	»	25 6	26 6	11 6	6 6	10
<i>Cephalaria alpina</i>	22 6	23 6	19 6	26 6	14 6	12 6	7
<i>Hemerocallis fulva</i> . . .	2 7	30 6	22 6	24 6	14 6	17 6	20
<i>Valeriana officinalis</i> . .	»	24 6	24 6	2 7	21 6	21 6	22
<i>Veronica spicata</i>	3 6	6 7	8 7	8 7	27 6	21 6	26
<i>Achillea ptarmica</i>	27 6	28 6	28 6	22 7	1 7	24 6	26
<i>Gallium verum</i>	10 7	18 7	4 7	19 7	11 7	7 7	6
<i>Hyssopus officinalis</i> . .	30 6	6 7	29 6	21 6	26 7	12 7	7
<i>Melissa officinalis</i> . . .	18 7	24 7	10 7	3 8	19 7	15 7	12
<i>Solidago mexicana</i> . . .	23 7	22 7	15 7	29 7	18 7	12 7	8
<i>Eupatorium cannabinum</i> .	19 7	24 7	12 7	3 8	18 7	15 7	15
<i>Origanum vulgare</i>	24 7	5 8	18 7	6 8	20 7	15 7	17
<i>Veronica virginica</i> . . .	12 7	20 7	»	17 8	30 7	18 7	17
<i>Helleborus niger</i>	»	»	»	»	»	»	23

phénologiques sur des végétaux.

espèces herbacées (suite).

1913	1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	MOYENNE.	Différence des dates extrêmes.
31 5	8 6	8 6	3 6	5 6	2 6	9 6	24 5	6 6	17
11 6	6 6	8 6	7 6	4 6	26 5	10 6	27 5	7 6	22
7 6	6 6	12 6	2 6	6 6	5 6	7 6	31 5	8 6	20
4 6	9 6	9 6	7 6	13 6	2 6	10 6	28 5	9 6	22
11 6	11 6	11 6	21 6	8 6	6 6	16 6	10 6	11 6	19
14 6	15 6	8 6	14 6	6 6	5 6	9 6	10 6	11 6	14
14 6	16 6	11 6	5 6	7 6	3 6	10 6	3 6	11 6	17
11 6	19 6	15 6	21 6	9 6	7 6	13 6	10 6	14 6	20
7 6	17 6	16 6	14 6	20 6	7 6	16 6	1 6	15 6	24
12 6	13 6	14 6	7 6	14 6	15 6	16 6	13 6	18 6	24
24 6	26 6	21 6	30 6	19 6	30 6	24 6	20 6	24 6	13
24 6	»	22 6	27 6	16 6	18 6	28 6	19 6	24 6	23
27 6	29 6	18 6	15 7	29 6	8 7	»	30 6	1 7	34
22 7	9 7	3 7	15 7	23 6	6 7	8 7	3 7	9 7	29
30 7	28 7	10 7	10 7	9 7	3 7	17 7	9 6	9 7	50
26 7	18 7	7 7	20 7	8 7	10 7	15 7	7 7	16 7	27
22 7	16 7	10 7	11 7	9 7	9 7	22 7	7 7	16 7	21
»	16 7	20 7	3 8	20 7	18 7	24 7	13 7	21 7	22
26 7	20 7	9 7	28 7	9 7	18 7	22 7	17 7	21 7	28
2 8	28 7	»	28 7	16 7	25 7	25 7	1 7	23 7	46
21 11	8 12	3 12	25 12	30 11	16 12	29 12	»	»	»

Dates de floraison : Espèces herbacées (suite).

ESPÈCES.	1906	1907	1908	1909	1910	1911	1912	1913	1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	MOYENNE.	Différence des dates extrêmes.
<i>Epilobium spicatum</i> . . .	9 6	10 6	10 6	8 6	8 6	5 6	»	31 5	8 6	8 6	3 6	5 6	2 6	9 6	24 5	6 6	17
<i>Tradescantia virginica</i> . .	16 6	17 6	10 6	8 6	8 6	»	5 6	11 6	6 6	8 6	7 6	4 6	26 5	10 6	27 5	7 6	22
<i>Thalictrum minus</i> . . .	21 6	15 6	5 6	14 6	11 6	6 6	5 6	7 6	6 6	12 6	2 6	6 6	5 6	7 6	31 5	8 6	20
<i>Campanula persicifolia</i> . .	20 6	15 6	15 6	11 6	10 6	5 6	30 5	4 6	9 6	9 6	7 6	13 6	2 6	10 6	28 5	9 6	22
<i>Scrophularia nodosa</i> . . .	8 6	15 6	11 6	12 6	12 6	3 6	8 6	11 6	11 6	11 6	21 6	8 6	6 6	16 6	10 6	11 6	19
<i>Sedum acre</i>	19 6	17 6	12 6	9 6	10 6	5 6	12 6	14 6	15 6	8 6	14 6	6 6	5 6	9 6	10 6	11 6	14
<i>Lysimachia nummularia</i> . .	»	20 6	18 6	14 6	14 6	6 6	10 6	14 6	16 6	11 6	5 6	7 6	3 6	10 6	3 6	11 6	17
<i>Gratiola officinalis</i> . . .	»	»	25 6	26 6	11 6	6 6	10 6	11 6	19 6	15 6	21 6	9 6	7 6	13 6	10 6	14 6	20
<i>Cephalaria alpina</i>	22 6	23 6	19 6	26 6	14 6	12 6	7 6	7 6	17 6	16 6	14 6	20 6	7 6	16 6	1 6	15 6	24
<i>Hemerocallis fulva</i>	2 7	30 6	22 6	24 6	14 6	17 6	20 6	12 6	13 6	14 6	7 6	14 6	15 6	16 6	13 6	18 6	24
<i>Valeriana officinalis</i> . . .	»	24 6	24 6	2 7	21 6	21 6	22 6	24 6	26 6	21 6	30 6	19 6	30 6	24 6	20 6	24 6	13
<i>Veronica spicata</i>	3 6	6 7	8 7	8 7	27 6	21 6	26 6	24 6	»	22 6	27 6	16 6	18 6	28 6	19 6	24 6	23
<i>Achillea ptarmica</i>	27 6	28 6	28 6	22 7	1 7	24 6	26 6	27 6	29 6	18 6	15 7	29 6	8 7	»	30 6	1 7	34
<i>Gallium verum</i>	10 7	18 7	4 7	19 7	11 7	7 7	6 7	22 7	9 7	3 7	15 7	23 6	6 7	8 7	3 7	9 7	29
<i>Hyssopus officinalis</i> . . .	30 6	6 7	29 6	21 6	26 7	12 7	7 7	30 7	28 7	10 7	10 7	9 7	3 7	17 7	9 6	9 7	50
<i>Melissa officinalis</i>	18 7	24 7	10 7	3 8	19 7	15 7	12 7	26 7	18 7	7 7	20 7	8 7	10 7	15 7	7 7	16 7	27
<i>Solidago mexicana</i>	23 7	22 7	15 7	29 7	18 7	12 7	8 7	22 7	16 7	10 7	11 7	9 7	9 7	22 7	7 7	16 7	21
<i>Eupatorium cannabinum</i> . .	19 7	24 7	12 7	3 8	18 7	15 7	15 7	»	16 7	20 7	3 8	20 7	18 7	24 7	13 7	21 7	22
<i>Origanum vulgare</i>	24 7	5 8	18 7	6 8	20 7	15 7	17 7	26 7	20 7	9 7	28 7	9 7	18 7	22 7	17 7	21 7	28
<i>Veronica virginica</i>	12 7	20 7	»	17 8	30 7	18 7	17 7	2 8	28 7	»	28 7	16 7	25 7	25 7	1 7	23 7	46
<i>Helleborus niger</i>	»	»	»	»	»	»	23 11	21 11	8 12	3 12	25 12	30 11	16 12	29 12	»	»	»

ASTRONOMIE. — Sur la convergence du développement en série de la fonction perturbatrice par la méthode de M. Brendel dans le cas de la planète (279) Thule,

par JAN KRASSOWSKI.

Il y a quelques années M. Brendel a publié sa théorie des petites planètes, basée sur les principes de Gyldén. Le but de cette note est de démontrer l'utilité et la possibilité du développement en série de la fonction perturbatrice et de ses dérivées, par la méthode de M. Brendel, pour le cas extrême de la planète 279 (Thule), appartenant au type $3/4$. En se rapportant à une remarque de Gyldén (*), on pourrait a priori admettre pour Thule la convergence des développements. Cependant nous avons voulu, en suivant le travail de M. Happel (**), démontrer la convergence des développements de M. Brendel, spécialement dans le cas de Thule.

Remarquons ici, ce qui d'ailleurs a été fait par M. Brendel, que la méthode en question ne peut s'appliquer que pendant un intervalle de temps qui n'est pas supérieur à cent ans.

En partant de la théorie de Gyldén, M. Brendel donne les formules suivantes (***) :

$$(1) \quad \frac{a}{\Delta} = R_0 + 2R_1 \cos H + 2R_2 \cos 2H + \dots$$

$$R_n = \frac{2}{\pi} \cdot \alpha^{n+1} \frac{a'}{r'} (1 - \lambda)^{\frac{n}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n} \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi + \alpha^2 \lambda \sin^2 \varphi}},$$

(*) GYLDÉN. *Undersökningar af teorien för himlakropparnas rörelser*, II, p. 48.

(**) HAPPEL. *Untersuchungen über die Convergenz der beim Problem der drei Körper auftretende Reihenentwicklungen*. Göttingen, 1900.

(***) BRENDEL. *Theorie d. kl. planeten*, I, pp. 47-49.

où H est l'angle compris entre les rayons vecteurs r et r' du corps troublé et du corps troublant, et

$$\alpha = \frac{a}{a'} \quad \text{et} \quad |1 - \lambda| < 1.$$

(Nous employons les symboles dans le sens de M. Brendel.)

Les dérivées partielles de la fonction perturbatrice Ω seront

$$Q = \frac{r^2}{a(1 - \gamma^2)} \frac{\partial \Omega}{\partial v} \quad \text{et} \quad P = r^2 \frac{\partial \Omega}{\partial r}.$$

En suivant le travail de M. Happel, nous introduisons une nouvelle variable χ , définie par la relation $r = \bar{a}_0 (1 + \chi)$. Cette nouvelle variable χ est une fonction des variables gyldéniennes γ et ρ , et $\bar{a}_0$ est une quantité numérique que l'on peut calculer en partant des éléments connus.

Nous aurons donc

$$Q = \bar{a}_0 (1 + \chi)^2 \frac{\partial \Omega}{\partial v} \quad \text{et} \quad P = (1 + \chi)^2 \frac{\partial \Omega}{\partial \chi}.$$

Avec les éléments de Thule, calculés par M. Viljev (Ast. Nach. 4661), nous trouvons pour l'intervalle de temps prévu pour l'application de la méthode : $|\chi| \leq 0,15$ et $\alpha < 0,82$.

Pour déterminer la convergence du développement en série de la fonction perturbatrice Ω et de ses dérivées, nous allons comparer chaque membre de la série (1) à une nouvelle série

$$(2) \quad \Omega' = R'_0 + 2R'_1 \cos H + \dots,$$

où, en exprimant λ par χ , nous aurons

$$R'_n = \frac{2}{\pi} B_n \alpha (1 + \chi)^n \sqrt{\frac{1}{1 - q_0 (1 + \chi)^2}},$$

(B_n et q_0 sont des valeurs faciles à calculer.)

Développons les R'_n par rapport à χ ; nous aurons

$$\bar{R}_n = \sum_s \bar{R}_{ns} \chi^s.$$

La série des $\bar{R}_n$ est absolument convergente; nous aurons donc

$$2 \sum'_n |\bar{R}_n| = 2 \sum'_n \left| \sum_s \bar{R}_{ns} \chi^s \right|$$

et nous pourrons appliquer le théorème de M. Pringsheim sur les séries doubles (*). Nous écrirons

$$2 \sum'_n \left(\sum_s |\bar{R}_{ns} \chi^s| \right) = 2 \sum'_{ns} |\bar{R}_{ns} \chi^s|;$$

d'où nous pourrons conclure que la série

$$(3) \quad \Omega = 2 \sum'_{ns} R_{ns} \chi^s \cos nH$$

sera convergente pour un intervalle de temps considéré dans la théorie de M. Brendel.

Passons maintenant aux développements de P et Q et démontrons leur convergence. D'abord occupons-nous de Q : multiplions par $(1 + \chi)^2$ la série (3); nous aurons

$$(4) \quad \Omega (1 + \chi)^2 = 2 \sum'_{ns} K_{ns} \chi^s \cos nH.$$

Différentions la série (4), qui est, comme il est facile de le voir, absolument convergente; nous aurons

$$(5) \quad -2 \{ 2 \sum' K_{1s} \chi^s \sin H + 2 \cdot 2 \sum' K_{2s} \chi^s \sin 2H + \dots \};$$

(*) PRINGSHEIM. *Sitzungsberichte der math.-phys. Cl. der Akad. de Wiss. zu München*. Bd. XXVII (1897), p. 401.

mais chaque terme de la série (5) est plus petit que chaque terme de la série convergente

$$(6) \quad 2 \sum' \bar{K}_{4s} \chi^s + 2 \cdot 2 \sum' \bar{K}_{2s} \chi^s + \dots;$$

donc la série (5) converge et nous pourrons la différentier par rapport à v (H étant une fonction de v).

Les K_{ns} contiennent α en facteur; nous écrirons donc

$$K_{ns} = \alpha K'_{ns}.$$

Comme la série

$$2 \sum'_{ns} K_{ns} \chi^s = 2 \sum'_{ns} \alpha^n K'_{ns} \chi^s$$

converge absolument et que c'est une série ordonnée par rapport à α , nous pourrons la différentier; la série ainsi obtenue sera absolument convergente; elle ne différera de la série donnant Q que par un facteur constant; donc nous pourrons écrire

$$Q = -2 \sum'_s K_{4s} \chi^s \sin H + 2 \sum'_s 2 K_{2s} \chi^s \sin 2H + \dots = -2 \sum_n \sum'_s n K_{ns} \chi^s \sin nH.$$

Cette série est aussi absolument convergente; en appliquant de nouveau le théorème de M. Pringsheim, nous trouverons que dans le cas considéré la série $Q = -\sum'_n n K_{ns} \sin H$ sera convergente.

Une démonstration tout à fait analogue permet de démontrer la convergence du développement de P .

Séance du mercredi 15 décembre 1920.

M. A. GRAVIS, directeur de la Classe.

M. PAUL PELSENEER, secrétaire perpétuel.

Sont présents : MM. G. Cesàro, *vice-directeur* ; J. Deruyts, Léon Fredericq, A. Lameere, Ch.-J. de la Vallée Poussin, Max Lohest, Fr. Swarts, Jean Massart, A. Demoulin, A. Rutot, A. de Hemptinne, Victor Willem, Paul Stroobant, G. Lecointe, Émile Marchal, *membres* ; Th. De Donder, V. Grégoire, O. Dony-Hénault, *correspondants* ; G.-A. Boulenger, *associé*.

Absences motivées : MM. C. le Paige, J. Cornet et P. Nolf, *membres*.

Avant d'aborder l'ordre du jour, M. le Directeur adresse les chaleureuses félicitations de la Classe à Émile Marchal, à qui vient d'être attribué le Prix décennal des sciences botaniques pour la troisième période (1909-1918). (*Applaudissements.*)

M. Marchal remercie.

CORRESPONDANCE.

Par une lettre du Palais, S. M. le Roi fait exprimer ses regrets de ne pouvoir assister à la séance publique de la Classe.

M. le Ministre de l'Industrie annonce qu'il assistera à la séance publique du 16 décembre.

MM. les Ministres des Affaires Étrangères, des Travaux Publics, de l'Agriculture, des Sciences et des Arts regrettent de ne pouvoir assister à la séance publique.

S. Exc. l'Ambassadeur de France fait connaître à l'Académie que le Centenaire de l'Académie de Médecine de Paris sera célébré du 20 au 23 décembre.

M. Gilkinet décline l'honneur d'écrire la biographie d'Armand Jorissen.

M. le Ministre des Sciences et des Arts annonce que les jurys des Prix décennaux de la troisième période pour les sciences minéralogiques et les sciences botaniques ont attribué ces prix respectivement à M. J. Cornet : pour son travail, *Tectonique et morphologie du Katanga*, et à MM. Élie Marchal et Émile Marchal pour leur travail : *Aposporie et Sexualité*.

L'Institut météorologique de la République tchéco-slovaque, à Prague, demande l'échange des publications.

M. J. Cornet remercie la Classe des félicitations qu'elle lui a adressées à l'occasion du Prix décennal qui lui a été attribué.

HOMMAGES D'OUVRAGES.

Société royale zoologique et malacologique de Belgique. Table des cinquante premières années des *Annales*. (Publication faite avec l'aide d'une subvention accordée par l'Académie. Fondation Agathon De Potter.)

Calcul des organes des machines. — Cours de mécanique appliquée aux machines. Paris, 1921, 6^e volume, 2^e partie. Machines et Chaudières marines et leurs appareils auxiliaires.

En présentant, les ouvrages de M. Boulvin, M. A. Demoulin prononce les paroles suivantes :

« Au nom de MM. Michel et Pierre Boulvin, fils de feu Jules Boulvin, j'ai l'honneur de présenter à la Classe deux ouvrages de notre regretté confrère. Ces ouvrages, qui viennent de paraître, étaient en cours d'impression lorsque la mort ravit à la science leur savant auteur. Ils reproduisent une partie des

leçons que Boulvin faisait avec tant d'éclat à l'Université de Gand. L'un, intitulé *Calcul des organes des machines*, est un ouvrage nouveau. L'autre, consacré aux machines et aux chaudières marines, est la deuxième édition d'un volume du *Cours de mécanique appliquée*, qui a valu à Boulvin une réputation universelle. Tous deux, par leur perfection, raviveront les regrets que nous a causés la perte de ce confrère éminent, qui a appartenu pendant si peu de temps à l'Académie et dont la collaboration nous eût été si précieuse. »

A. DEMOULIN.

COMITÉ SECRET. — ÉLECTIONS.

Sont élus, dans la Section des sciences mathématiques et physiques :

Membres titulaires :

A) En remplacement de M. Armand Jorissen, décédé : M. Léon Crismer, *correspondant* ;

B) En remplacement de M. J. Verschaffelt, devenu associé : M. Ed. Van Aubel, *correspondant*.

Associé :

En remplacement de Sir Norman Lockyer, décédé : Sir Frank Watson Dyson, à Greenwich.

PRIX CHARLES LEMAIRE

EN FAVEUR DES QUESTIONS RELATIVES AUX TRAVAUX PUBLICS.

(Douzième période : 1^{er} juillet 1913-30 juin 1915, prorogée
au 30 juin 1920.)

La Classe adopte les conclusions que le jury du Prix Lemaire, 12^e période, présente dans son rapport, et décerne le prix à MM. Willame et Chenu, pour leur ouvrage : *Études sur les fondations par empattements*.

Rapport des Commissaires délégués à MM. les Directeur, Secrétaire perpétuel et Membres de la Classe des sciences de l'Académie royale de Belgique ⁽¹⁾.

MESSIEURS,

La Classe des Sciences de l'Académie royale de Belgique a prorogé, en faveur de ses prix perpétuels, la période s'étendant d'avant-guerre jusqu'à l'une ou l'autre des années terribles infligées sans raison à notre bien-aimée Patrie par un ennemi plus injuste et cruel que savant.

Tandis qu'étaient suspendus les grands travaux publics ; pendant que le génie militaire déployait, sur le front, toutes ses ressources au service d'une victoire conquise, après quatre années et demie, à force d'intelligence, d'héroïsme, d'endurance, les ingénieurs civils veillaient aussi. Ils vquaient aux progrès de leur art et de leur science en exil, en prison, au milieu des soucis, des tracas enveloppant, de toutes parts, chaque jour, les citoyens occupés simplement à remplir leurs devoirs souvent périlleux envers la Patrie et la famille.

Par là s'explique le mérite exceptionnel des cinq mémoires adressés à la Classe des sciences pour l'obtention du Prix Charles Lemaire, pendant la douzième période allant du 1^{er} juillet 1913 au 30 juin 1915, prorogée au 30 juin 1920. Les soussignés, auxquels la Classe des sciences a fait le nouvel honneur de con-

(1) Le jury était composé de MM. DE HEMPTINNE, membre de l'Académie royale, *président* ; DUFOURNY, Directeur général honoraire des Ponts et Chaussées ; LAMBIN, Ingénieur en chef Directeur des Ponts et Chaussées dans le Brabant ; VAN BRABANDT, Directeur général au Secrétariat général du Ministère des Chemins de fer, Marine, Postes et Télégraphes ; LAGASSE DE LOCHT, Directeur général honoraire des Ponts et Chaussées, Président de la Commission royale des Monuments et des Sites et de la Société scientifique de Bruxelles, *rapporteur*.

fier le jugement de ce concours, ne se souviennent pas d'un résultat aussi remarquable. L'esprit a besoin de se recueillir, fût-ce au sein d'indicibles souffrances, pour étendre, élever, approfondir l'objet de ses études.

En rendant un hommage mérité à la haute valeur de chacun des mémoires soumis à notre examen, nous manquerions à la vérité si nous n'ajoutions, aussitôt, que, sans aucun concert, sans la moindre hésitation, notre choix unique s'est porté sur l'un d'eux, parce qu'il l'emporte de beaucoup sur les quatre autres, on ne saurait le contester.

EXAMEN DE CES QUATRE MÉMOIRES.

I. — *De l'extraction de l'humidité originelle ou de construction dans les bâtiments des locaux nouvellement construits, au moyen du « froid artificiel »*, par A. KNAPEN, architecte.

Les pages dactylographiées de M. A. Knapen répondent bien à ce que la Classe des sciences, interprétant largement les termes de la donation, réclamait des concurrents, sous le littéra *b* de sa définition reproduite ci-après :

« *b*) Puis et subsidiairement, les recherches théoriques sur
» la résistance des matériaux, sur la stabilité des constructions,
» sur l'hydraulique.

» La Classe admettra comme concurrents, non seulement ceux
» qui feront parvenir à M. le Secrétaire perpétuel, dans le délai
» déterminé, des mémoires publiés pendant la période fixée, sur
» les objets précités, mais encore ceux qui signaleront leurs
» études, leurs expériences, leurs pratiques concernant les
» mêmes objets, par un simple rapport, bref et précis, adressé
» également au Secrétaire perpétuel de l'Académie ⁽¹⁾. »

(1) *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), n° 4 pp. 202-203, 1110.

En quelques pages, l'auteur rappelle des expériences faites en grand, dont plusieurs ont été vues par le rapporteur, pour démontrer qu'il faut assécher, par le refroidissement plutôt que par la chaleur, les parois d'une enceinte nouvellement construite.

« Pour rendre utilisables ou habitables immédiatement des locaux après leur mise sous toit, contrairement à tout ce qui a été fait jusqu'ici dans ce but, écrit M. Knapen, on doit se servir du froid artificiel.

» Ce n'est que par l'utilisation judicieuse des températures bien appropriées au milieu qu'il est possible d'assécher, en quelques heures, d'assainir et de rendre habitables les nouvelles constructions par l'extraction définitive de l'humidité des mortiers et des enduits nouveaux. »

Solution vraiment originale mais dont toutes les conséquences n'ont pas encore été recueillies. Elle caractérise, une nouvelle fois, la manière personnelle et ingénieuse qui a valu à M. A. Knapen le Prix Charles Lemaire en 1911, pour ses travaux sur *L'humidité dans les constructions et les procédés nouveaux pour y remédier*.

II. — *Ce que l'on peut attendre de l'organisation scientifique des mines*, par M. ACHILLE BAIJOT, ingénieur des mines.

Ce travail très intéressant étudie, avec grand soin et méthode, les applications du *Taylorisme* aux chantiers de la mine.

Sans doute, les procédés américains, dont il ne faut pas exagérer l'importance pratique, sont de nature à contribuer aux progrès des grands travaux à la surface ou sous terre. Mais, dans la pensée du jury, il faut dépasser encore l'interprétation très large qu'a donnée la Classe des sciences aux termes de la donation, pour ne point écarter du concours ce mémoire distingué.

Au surplus, au point de vue social, les idées de l'auteur sont-

elles progressistes? Il semble condamner les primes de fin d'année, la participation des ouvriers aux bénéfices, parce que les premières et la seconde sont, à ses yeux, le fruit du travail collectif et que l'on n'y peut mesurer la part de l'intervention personnelle du travailleur manuel. Que d'objections soulève pareille thèse!

Au fond, l'auteur estime qu'une récompense, plutôt mathématique que morale, est due à l'ouvrier. Les réalités de la vie heurtent cette conception par trop subjective.

III. — *Contribution aux études théoriques relatives à la circulation de l'eau à travers les filtres artificiels ou naturels et dans les terrains arénacés*, par M. PAUL QUESTIENNE, ingénieur en chef directeur du service technique provincial de Liège, en retraite.

L'auteur est un géomètre, un analyste de réelle valeur. Il affecte trop de sévérité à l'égard des questions spéciales d'hydraulique qui l'occupent lorsqu'il les apprécie ainsi : « Elles ont déjà fait l'objet de nombreuses études, sans qu'on soit parvenu à des solutions rigoureuses. »

Il nous eût plu de corriger, en sa faveur, ce jugement de M. Questienne si son mémoire, souvent étayé d'abondants calculs bien ordonnés, élégants même, avait apporté quelque nouvelle solution d'importance, sinon contribué à des progrès notables de l'une ou l'autre méthode usitée sur les chantiers de captation des eaux par galeries ou par puits.

IV. — *Le théorème de la variation des quantités de mouvement appliqué à la mécanique des fluides*, par M. HERMANN CHAUVIN, chef de travaux à l'Institut électrotechnique Montefiore.

Dans l'introduction de son remarquable mémoire, M. H. Chauvin déclare qu'il le consacre à prouver l'erreur dans laquelle il

a versé jadis, en défendant la formule $\frac{\Delta V}{2}$ plutôt que celle ΔV , l'une et l'autre s'appliquant aux poussées exercées sur un appareil (de navigation aérienne) mettant en mouvement, par unité de temps, une masse Δ à la vitesse uniforme V . M. Chauvin ajoute que la formule ΔV , déduite directement du théorème de la variation des quantités de mouvement, semble confirmée par les résultats des essais de Drzewiecki.

Dès lors, on pourrait se demander s'il était bien utile de se livrer à une étude aussi développée que celle du savant auteur. Mais tout travail consciencieux, encore qu'il ne s'impose point, porte des fruits. Il y a là des considérations originales sur la force pariétale; la contraction de la veine fluide; le coefficient de perfection d'un vaisseau aérien; enfin, des applications numériques intéressantes. Elles n'ont, en l'espèce, qu'un défaut: ce sont plutôt des recherches de mécanique pure n'ayant qu'un rapport indirect, éloigné, avec ce qui regarde les travaux publics.

LE MÉMOIRE MIS A PART.

V. — *Étude sur les fondations par empattements, béton, béton armé, maçonnerie, etc.*, par MM. AIMÉ WILLAME, ingénieur en chef directeur de service au Ministère des Chemins de fer, et HENRI CHENU, ingénieur principal des Chemins de fer de l'État.

Il en est tout autrement de l'étude de MM. A. Willame et H. Chenu.

Quelle satisfaction complète n'eût pas goûtée Charles Lemaire, cet esprit large, curieux, attentif, cet ingénieur friand de conceptions théoriques, capable de réalisations pratiques auxquelles l'avait habitué la direction de la grande maison d'entreprises de travaux publics, Gouin et C^{ie} de Paris, s'il lui avait été donné de méditer les pages où de belles formules, enrichies d'abaques, fouillent, comme par la pointe d'un burin de graveur, jusque

dans les derniers recoins, avec la fine et rigoureuse précision du langage mathématique, la théorie, ici, des fondations sur massifs formés soit d'empâtements isolés, soit de radiers en maçonnerie; là, des semelles et des radiers flexibles.

On essaierait en vain de résumer ce substantiel travail mieux que ne l'ont fait les éminents auteurs, aussi bien en leur érudite introduction que dans leurs conclusions et sur la planche annexée. Cette dernière constitue, à elle seule, tout un enseignement offrant aux praticiens de véritables révélations; des trouvailles inattendues sur les dimensions que de sages et profondes considérations théoriques attribuent rationnellement à des « *massifs équivalents* » supportant la même charge et assurant la même pression sur un terrain peu glissant, glissant, infiniment glissant, à l'aide d'un cube minimum de maçonnerie, soit de blocage non susceptible de résister à des efforts de traction, soit de matériaux où ces efforts sont admissibles, tels le béton maigre, la brique ou béton riche, les dalles résistantes, les libages plats.

Si l'on doutait que le métier de l'ingénieur participât, à la fois, de l'art et de la science, le mémoire de MM. Williams et Chenu convertirait les plus sceptiques. Il brille par l'heureux équilibre des facultés intellectuelles mises en œuvre pour le produire. On y reconnaît le coup d'œil révélateur du maître; le diagnostic de praticiens exercés; la critique avisée des jugements « *émis de sentiment* », suivant l'expression des auteurs, jugements trop prompts à se prononcer dans les problèmes techniques que soulève, sous tant d'aspects divers, l'exécution des travaux publics; l'analyse objective jusqu'au scrupule mathématique des phénomènes envisagés; la synthèse originale mais prudente des découvertes du calcul et jusqu'à la mémoire historique ornant le tout des jolieses de l'érudition humaniste.

Le jury est unanime pour proposer à la Classe des sciences de l'Académie royale de Belgique d'attribuer le Prix Charles

Lemaire à MM. A. Willame et H. Chenu, en y ajoutant les chaleureuses félicitations que mérite, sans conteste, un travail honorant à ce point le Corps des ingénieurs belges.

Le Président,

A. DE HEMPTINNE.

Le Rapporteur,

LACASSE DE LOCHT.

Les Membres :

DUFOURNY,

LÉON VAN BRABANDT,

LAMBIN.

CONCOURS DE 1922.

La Classe dresse un programme provisoire qui sera adopté dans la séance de janvier.

COMITÉS NATIONAUX RATTACHÉS AUX UNIONS SCIENTIFIQUES INTERNATIONALES.

La Classe adopte, pour ces Comités, le règlement général rédigé par sa Commission spéciale.

PRÉROGATIVES REVENDIQUÉES PAR L'ACADÉMIE.

Désignation de deux représentants de la Classe au sein de la délégation chargée de les exposer à M. le Premier Ministre.

La Classe désigne MM. Massart et Stroobant.

COMMUNICATIONS ET LECTURES.

Sur la présence de thiosulfate de calcium dans Achromatium oxaliferum, par M^{lle} G. Hannevart, présenté par M. Massart, avec un rapport verbal concluant à l'impression dans le *Bulletin* de la séance. — Adopté.

Recherches sur les involutions cubiques appartenant à une surface algébrique, par M. L. Godeaux. — Renvoi à MM. Stuyvaert et Neuberg.

MM. Gravis et De Donder communiquent leurs discours et lecture destinés à la séance publique.

BOTANIQUE. — Sur la présence de thiosulfate de calcium dans ACHROMATIUM OXALIFERUM Schew.

par GERMAINE HANNEVART.

Au cours des travaux pratiques du doctorat en botanique, sous la direction de M. le Prof^r Massart, nous avons eu l'occasion de rencontrer abondamment, dans une mare du jardin botanique de Bruxelles, l'*Achromatium oxaliferum* Schew.

Découvert en 1893 par Schewiakoff, aux environs de Mannheim, l'*Achromatium oxaliferum* fut décrit par lui comme une nouvelle Bactérie d'eau douce, et ainsi dénommée à cause de son apparente ressemblance avec *Chromatium Okenii* et de la présence présumée d'oxalate de calcium dans ses vacuoles.

En 1897, Frenzel décrit le même organisme sous le nom de *Modderula Hartwigi*.

En 1909, West et Griffiths le présentent sous le nom de *Hilhousia mirabilis*, comme une Bactérie sulfureuse géante.

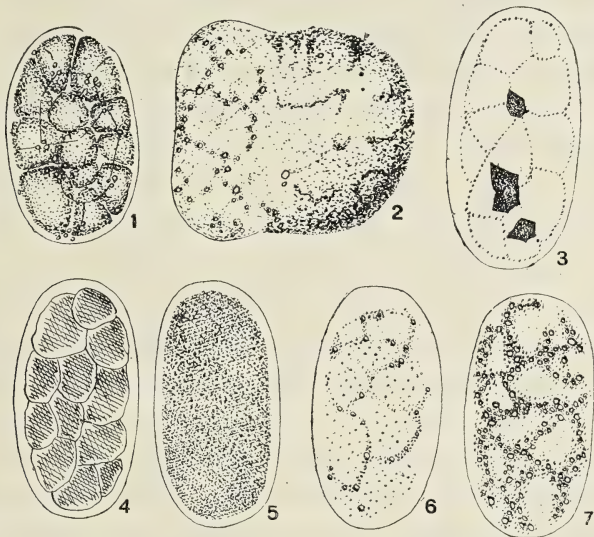
La cytologie en a été soigneusement étudiée par Virieux dans sa note à l'Académie des sciences en 1912.

L'*Achromatium oxaliferum* se présente comme une Bactérie

gigantesque, d'environ 30 μ sur 20, qui rampe sur la vase du fond.

Il est entouré d'une membrane gélifiée, transparente.

Il présente un chromidium analogue à celui que l'on a pu mettre en évidence chez différents Protistes par l'action de colorants comme le bleu Unna (Virieux).



1. *Achromatium oxaliferum* normal, avec réseau protoplasmique portant des grains de soufre et des inclusions de thiosulfate de calcium.

2. Action de l'acide oxalique.

3. Action du chlorure mercurique.

4 et 5. Action du nitrate d'argent.

6. Action de l'acide chlorhydrique en février 1920.

7. Action de l'acide chlorhydrique en novembre 1920.

Toutes les figures sont grossies 800 fois.

Ce chromidium offre l'aspect d'un réseau s'étendant à travers toute la masse de la cellule et portant des granulations très vraisemblablement constituées par du soufre. En effet, elles ne fixent aucun colorant, résistent aux acides minéraux et présentent une faible solubilité (d'ailleurs variable) dans les alcools et le sulfure de carbone.

Entre les mailles de ce réseau, et le masquant presque entièrement, de grosses inclusions. Chez certains exemplaires, ces grandes vacuoles laissent cependant voir le réseau protoplasmique chargé de grains de soufre (fig. 4).

Il semble donc bien que le soufre et la substance vacuolaire existent concurremment.

Quelle est la nature de ces inclusions?

La question a été fortement discutée.

Schewiakoff croit qu'il s'agit d'oxalate de calcium.

D'après Bersa, qui a récemment étudié la question (1920), ce serait, au contraire, du carbonate de calcium.

A mon avis, ces deux opinions doivent être rejetées l'une et l'autre, et il me semble que l'on a plutôt affaire à de l'hypo-sulfite (= thiosulfate) de calcium.

En effet, si l'on fait passer une solution d'acide oxalique sous la lamelle, on obtient un précipité. Une hernie se forme, gonflée de solution, atteignant parfois trois et quatre fois les dimensions de la cellule, et limitée par une pellicule d'oxalate qui se dissout au premier contact avec l'acide chlorhydrique (fig. 2).

La substance de réserve n'est donc pas de l'oxalate de calcium.

L'acide chlorhydrique la dissout entièrement sans dégagement de bulles (fig. 6 et 7).

Ces deux réactions sont d'accord avec l'hypothèse d'un sel de calcium, ce qu'admettent, du reste, Schewiakoff et Bersa.

D'autre part, au passage du nitrate d'argent sous la lamelle, il se forme dans les vacuoles un précipité, d'abord simple trouble, puis de plus en plus sombre et finalement noir, envahissant toute la cellule, après quinze à vingt minutes. Ce précipité se dissout instantanément dans l'acide nitrique (fig. 4 et 5).

La substance vacuolaire n'est donc pas du carbonate de calcium, car celui-ci ne donne pas de précipité en présence de NO^3Ag .

L'absence de bulles de CO^2 par l'action de HCl exclut d'ailleurs aussi le carbonate de calcium.

Sous l'action d'une solution de chlorure ferrique les vacuoles prennent une coloration violette, fugitive, puis, peu à peu, leur contenu se dissout entièrement (quinze à vingt minutes).

Ces deux réactions, NO^3Ag et FeCl^3 , caractérisent les hyposulfites (Treadwell). Nous les avons refaites en tubes à essai et sous le microscope.

Enfin, des *Achromatium* soumis à une température de 50 à 60° ont perdu toute la substance vacuolaire et montrent un réseau de grains de soufre : en effet, les hyposulfites se décomposent par la chaleur avec dépôt de soufre.

Il semble donc bien que ces inclusions renferment de l'hyposulfite de calcium.

Les principales réactions indiquées par Bersa nous ont donné des résultats analogues aux siens :

Précipité blanc avec le sulfate de Zn et l'acétate de Pb ;

Précipité brun-rouge avec le sublimé ;

Dissolution dans l'iode, dans la potasse et dans les acides minéraux.

Mais aucune de ces réactions n'est caractéristique.

Le précipité obtenu par l'action du sublimé est curieux : il se présente sous l'aspect de blocs brun-rouge de formes et de dimensions variables (fig. 3). Bersa admet que c'est de l'oxyde rouge de Hg ; nous croyons qu'il s'agit plutôt d'un complexe, puisqu'on sait que HgO^2 ne s'obtient pas par voie humide.

Nous avons essayé des cultures pures d'*Achromatium* en goutte suspendue. Une goutte d'eau de la mare, riche en *Achromatium*, était suspendue à une lamelle dans une cellule en carton mouillé et laissée pendant vingt quatre heures dans une chambre humide. Les *Achromatium* s'accumulent dans la partie déclive de la goutte ; il est donc assez facile de les reprendre au moyen d'une pipette effilée et de les transporter dans une goutte de solution minérale ou d'eau de la mare filtrée. Dès que la culture est à peu près pure, les *Achromatium* perdent

petit à petit leurs réserves et meurent. Nous avons essayé, sans succès, l'addition de sucre, d'hyposulfite, de sulfate, et de sulfure de Ca. Ce dernier milieu nous a donné pourtant, une seule fois, une prolifération intense.

L'existence d'hyposulfite de calcium indiquerait un terme de passage dans l'oxydation des matières organiques sulfurées qui se décomposent au fond des mares, en dégageant de l'hydrogène sulfuré. Celui-ci serait oxydé et précipité sous forme de soufre, comme dans les Bactéries sulfureuses étudiées par Winogradsky; puis il serait repris au fur et à mesure des besoins et transformé en hyposulfite, d'où l'on passerait par une nouvelle oxydation aux sulfates.

Quelques observations viennent à l'appui de cette thèse. Virieux a remarqué que si l'on ajoute chaque jour quelques gouttes de H^2S à l'eau d'un aquarium renfermant des *Achromatium*, ceux-ci se bourrent de grains de soufre, tandis que, dans l'eau pure, ils perdent granulations et inclusions en peu de jours.

Nous avons constaté une notable différence entre les *Achromatium* étudiés à la fin de l'hiver (mars 1920), et après l'été (novembre 1920). Ces derniers ont montré une vitalité beaucoup plus grande, qui s'accuse :

D'abord par des mouvements plus complexes; aux mouvements de rotation autour de l'axe et de reptation sur la lame, observés en février, s'ajoutent des mouvements d'avant en arrière, en prenant l'extrémité de l'axe comme point d'appui, ce qui assure une progression plus rapide.

Ensuite par une épaisseur plus grande de la membrane gélifiée qui enveloppe la Bactérie. En se coagulant au contact d' HCl , elle adhère tellement à la lame que l'on peut faire glisser le couvre-objet sans la détacher, ce qui ne se présentait pas en février.

Enfin, par une plus grande richesse du réseau en grains de soufre (fig. 6 et 7). L'iode qui, *in vitro*, décompose les hypo-

sulfites sans dépôt de soufre, a parfois laissé, en février, le réseau protoplasmique vierge de tout grain de soufre.

Il y aurait donc accumulation de réserves de soufre en été (la décomposition des matières organiques et le dégagement de H^2S sont plus considérables); pendant l'hiver le soufre serait utilisé, avec transformation intermédiaire en hyposulfite.

BIBLIOGRAPHIE.

- BERSA, E., *Ueber das Vorkommen von kohlen sauren Kalk in einer Gruppe von Schwefelbakterien.* (SITZUNGSBERICHTEN DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN IN WIEN [MATHEM.-NATURW. KLASSE]. Abteilung 1, 129. Bd, 5. und 6. Heft, 1920.)
- FRENZEL, J., *Neue oder wenig bekannte Süßwasserprotisten.* (BIOL. CENTRALBL.), Bd 17, S. 801, 1897.)
- SCHEWIAKOFF, W., *Ueber einen neuen bakterienähnlichen Organismus des Süßwassers.* (VERHANDL. DER MED.-NATURHIST. VER. Heidelberg (N. F.) Bd 5, 44, 1893.)
- VIRIEUX, J., *Sur l'Achromatium oxaliferum Schewiakoff.* (COMPTES RENDUS DE L'ACAD. DES SCIENCES, vol. CLIV, p. 717, 1912.)
- WEST, E.-S. AND GRIFFITHS, B.-M. *Hilhouisia mirabilis, a Giant Sulfur Bacterium* (PROC. OF THE R. S. London, Series B, vol. LXXXI, 1909.)
- WINOGRADSKY, S., *Ueber Schwefelbakterien.* BOT. ZEITUNG, Bd 45, 1887.)
- *Beiträge zur Morphologie und Physiologie der Bakterien. I, Schwefelbakterien.* Leipzig, 1888.
-

Séance publique du jeudi 16 décembre 1920.

M. A. GRAVIS, directeur de la Classe, occupe le fauteuil.

M. G. CESÀRO, vice-directeur.

M. PAUL PELSENEER, secrétaire perpétuel.

Prennent également place au bureau : MM. J. Brunfaut, directeur de la Classe des beaux-arts, président de l'Académie, et M. Jules Bordet, membre de la Classe, en l'honneur de qui est organisée la manifestation qui occupe la première partie de la séance.

M. le Ministre WAUTERS assiste à la séance.

Sont présents :

CLASSE DES SCIENCES. — MM. Léon Fredericq, A. Lameere, Ch.-J. de la Vallée Poussin, Max Lohest, F. Swarts, Jean Massart, A. Demoulin, A. Rutot, A. de Hemptinne, Paul Stroobant, V. Willem, G. Lecointe, Émile Marchal, Pierre Nolf, *membres*; Crismer, Brachet, De Donder, *correspondants*; G.-A. Boulanger, *associé*.

CLASSE DES LETTRES ET DES SCIENCES MORALES ET POLITIQUES. — MM. Maurice Wilmotte, L. de la Vallée Poussin, J. Bidez, *membres*; Paul Errera, *correspondant*.

CLASSE DES BEAUX-ARTS. — MM. G. De Groot, J. Winders, Émile Mathieu, F. Khnopff, P. Bergmans, *membres*.

Allocution de M. le Directeur de la Classe.

MONSIEUR LE MINISTRE,
MESDAMES,
MESSIEURS,

Le programme des séances publiques de chacune des Classes de l'Académie royale de Belgique est déterminé par le Règlement. En ce qui nous concerne, il comprend un discours par le Directeur de la Classe, une lecture par un membre, et enfin la proclamation des résultats des concours annuels, des Prix perpétuels et des Élections.

Cette année, un événement heureux permet de modifier un peu l'austérité de ce programme. Le Prix Nobel vient d'être attribué à l'un d'entre nous, à M. le docteur J. Bordet, Directeur de l'Institut Pasteur du Brabant et Professeur à l'Université de Bruxelles. Depuis l'institution du Prix Nobel, c'est la première fois que l'un de ces prix est décerné à un homme de sciences en Belgique. C'est un grand honneur qui a été fait à notre cher Confrère, un honneur qui rejaillit sur l'Académie et sur le pays tout entier.

Aussi, d'une voix unanime, nous avons décidé d'inscrire à l'ordre du jour de la séance d'aujourd'hui une manifestation en l'honneur de M. Bordet. Cette manifestation sera bien simple dans sa forme. Malgré l'élan de nos cœurs, nous ne pouvons rivaliser avec l'enthousiasme que ne manquera pas de manifester la jeunesse universitaire, lorsqu'il lui sera permis de témoigner son admiration à l'un de ses maîtres vénérés et aimés. Mais si nous sommes plus calmes, soyez assuré, cher Confrère, que nous sommes aussi plus conscients de votre valeur et que nous comprenons mieux toute l'importance de la distinction qui vous a été accordée. Nous vous en félicitons bien chaleureusement et bien sincèrement.

Pour mieux vous honorer publiquement, nous avons prié l'un d'entre nous, l'un des plus compétents en cette matière, de résumer vos recherches sur l'immunité, recherches qui vous ont valu la distinction grandiose dont nous nous réjouissons en ce jour.

M. le docteur P. Nolf, professeur à l'Université de Liège, a bien voulu se charger de cette mission. Je l'en remercie au nom de nous tous, et je lui cède la parole.

Discours prononcé par M. Nolf.

MONSIEUR LE MINISTRE,
MESDAMES ET MESSIEURS,

La Classe des sciences a voulu que les premières paroles prononcées en sa séance publique fussent adressées à celui de ses membres dont les travaux ont couvert de gloire l'Université de Bruxelles et la science belge tout entière. Anticipant sur la cérémonie grandiose de samedi prochain, elle a désiré que dès aujourd'hui il soit fait ici un exposé succinct des principales découvertes de notre Collègue. Elle m'a chargé de cette tâche aussi agréable que lourde. Heureux d'être l'interprète de notre compagnie pour dire toute l'estime et l'admiration que nous avons pour l'homme et pour son œuvre, je suis en même temps effrayé par l'énorme difficulté du sujet. Comment vous faire comprendre sinon les découvertes elles-mêmes, au moins l'intérêt général qu'elles présentent, alors qu'elles demandèrent à son auteur près de trente années de labeur opiniâtre et ininterrompu, et que je ne dispose moi-même que de quelques instants. A vouloir tout citer, on risque de ne composer qu'une aride nomenclature; veut-on se limiter aux faits que l'on juge principaux, on s'expose à trahir l'auteur, à ne donner de son œuvre qu'une image infidèle et tronquée. Puissé-je être assez heureux pour ne pas encourir le double reproche. Je voudrais que

ceux qui m'écoutent aujourd'hui, sortissent d'ici avec le désir d'en apprendre davantage et qu'ils aillent entendre samedi prochain des exposés plus longs et plus complets, dont celui-ci n'est que le prologue.

Quand Jules Bordet entra dans la carrière médicale, le problème qui occupait tous les esprits était celui de l'immunité dans les maladies infectieuses. En quelques années, plusieurs découvertes de la plus haute importance venaient de se succéder. Pasteur avait créé les méthodes générales grâce auxquelles, pour la première fois, on put immuniser contre la plupart des maladies infectieuses; Metchnikoff avait montré l'importance qui revient à certaines cellules de l'organisme, notamment aux globules blancs du sang et de la lymphe, dans la lutte que nous livrons aux microbes pendant la maladie; Behring et Kitasato avaient découvert la propriété antitoxique du sérum des animaux immunisés contre le tétanos et la diphtérie; d'autres savants : Buchner, Pfeiffer, avaient commencé avec fruit l'analyse expérimentale de l'influence qu'exercent les humeurs, sang et lymphe, sur la vitalité des microbes. Les médecins étaient partagés en deux camps : les uns cherchaient dans la chimie des liquides humoraux l'explication des faits d'immunité ; les autres voulaient tout attribuer aux cellules, aux phagocytes. C'était un chapitre nouveau de la querelle séculaire entre les humoristes et les solidistes.

Bordet avait pris le goût de la recherche scientifique auprès de ses maîtres Héger et L. Errera. Il eut l'incalculable chance de pouvoir achever son éducation médicale dans la maison hospitalière où l'illustre Pasteur terminait sa glorieuse carrière.

A cette époque, les disciples du grand savant, Duclaux, Roux, Metchnikoff, célèbres eux-mêmes par leurs travaux et leur enseignement, avait fait de l'Institut Pasteur le principal établissement de la Science médicale du monde entier. Les laboratoires et les auditoires étaient remplis de jeunes médecins venus de tous les pays. L'Institut était une ruche bourdonnante,

où s'élaborait un miel très pur : ses travaux étaient réputés pour la sûreté des observations et la richesse de l'invention. L'enseignement était merveilleux de méthode, de documentation, d'information. Pas une idée neuve, pas une publication importante de l'étranger qui n'y fussent commentées, contrôlées.

Dans ce milieu propice à l'éclosion des talents, un esprit aussi doué que Bordet devait se développer avec une prodigieuse rapidité. Dès son premier mémoire, notre Collègue appelait sur lui tous les regards ; on sentait qu'un nouveau maître venait de parler.

Ses premières recherches ont trait à l'immunité dans la péritonite du cobaye par le vibrion cholérique et les microbes voisins (1894). Pfeiffer et Issaëff venaient de publier d'importants résultats. Ils avaient reconnu que l'immunité, que produisent facilement quelques injections sous-cutanées d'une culture de vibrion cholérique au cobaye, s'accompagne de l'apparition d'une propriété particulière dans les humeurs de l'animal vacciné. Si l'on introduit dans son péritoine un peu d'une culture de vibrion cholérique, on assiste à une transformation très caractéristique du microbe dans la lymphe péritonéale. De bâtonnet incurvé et mobile qu'il était, il devient sphérique, immobile et perd en grande partie son affinité pour les matières colorantes. Chose remarquable, cette transformation granuleuse du vibrion peut être obtenue dans le péritoine d'un cobaye neuf, à la condition d'y introduire en même temps que la culture microbienne un peu de sérum sanguin d'un cobaye vacciné. Et cependant, d'après eux, ce sérum est inactif à lui seul. *In vitro*, il laisse intacts les vibrions auxquels on le mélange. Il n'agit qu'au contact du tissu vivant, de la séreuse péritonéale.

Reprenant l'étude de ce phénomène (1896), Bordet démontra tout d'abord que cette dernière affirmation est inexacte. Le sérum de l'animal vacciné est bien capable d'opérer la transformation granuleuse du vibrion. Pour cela, il faut et il suffit qu'il soit bien frais. Vieilli ou chauffé à 56°, il cesse d'agir. Mais il

recupère toute son activité, si on le mélange au sérum frais d'un animal normal. Bordet en conclut que le sérum de l'animal vacciné contient deux substances, dont l'une est détruite à 56° (ou par le vieillissement à la température ordinaire), tandis que l'autre résiste à cette température. La première est contenue dans le sérum frais de tous les animaux, tant vaccinés que neufs. C'est elle que plusieurs bactériologistes, notamment Buchner, avaient déjà étudiée sous le nom d'alexine. La seconde est produite au cours de la vaccination. Elle est spécifique, c'est-à-dire qu'elle porte son action exclusivement sur le microbe contre lequel on a vacciné. A elle seule, elle est incapable de détruire ou même d'atténuer le microbe. Son rôle est, en se fixant sur lui, en l'imprégnant, de le rendre sensible à l'action meurtrière de l'alexine, qui, sans cette imprégnation préalable, serait sans aucune influence sur lui. Pour caractériser cette fonction, Bordet lui donne le nom de substance sensibilisatrice.

Grâce à l'acquisition de ces données nouvelles et à leur exacte interprétation, un progrès important est réalisé dans notre compréhension de la lutte contre les microbes. Une formule simple et claire corrige et assemble des données jusqu'alors en partie erronées, en partie confuses et éparses. Elle est devenue classique et a permis d'interpréter d'innombrables observations.

En 1898, Bordet publie de nouveaux résultats hautement intéressants. On savait depuis Landois que le sérum de chaque vertébré n'est l'ami que de ses propres globules et qu'il détruit les globules des espèces étrangères, n'ayant pas plus d'égards pour eux que pour de simples bactéries. La destruction des globules rouges par une substance toxique s'appelle en médecine hémolyse. Certaines analogies qui existent entre la propriété hémolytique et la propriété bactéricide qu'il venait d'étudier amènent Bordet à se demander s'il n'est pas possible d'appliquer à l'hémolyse par les sérums les règles découvertes par lui pour la bactériolyse. Le résultat confirma pleinement les prévisions.

Ayant injecté à des cobayes du sang de lapin, il vit apparaître dans le sérum des cobayes un pouvoir hémolytique extrêmement intense, en tout semblable au pouvoir bactériolytique que confère la vaccination contre le vibron cholérique. Le chauffage à 56° enlève au sérum de cobaye vacciné son pouvoir hémolytique; mais celui-ci reparaît entier si l'on ajoute au liquide chauffé un peu du sérum d'un cobaye neuf ou même du lapin, dont on a pris les globules. Comme la bactériolyse, l'hémolyse est donc due à la coopération de deux substances : l'alexine et la sensibilisatrice. La première est détruite par une température de 56°; elle est présente dans le sang de tous les vertébrés; la seconde est thermostable, spécifique; elle n'existe que chez l'animal vacciné; elle est élaborée par lui au cours de la vaccination. Bordet démontra ultérieurement, contre Ehrlich et son école, que l'alexine est une : c'est la même substance qui, suivant qu'elle porte son action sur les globules rouges ou les microbes, détruit les uns et les autres; et que la sensibilisatrice hémolytique ne diffère de la sensibilisatrice bactériolytique que parce que son affinité spécifique l'oriente vers le globule rouge plutôt que vers le microbe.

Ainsi les substances employées dans la lutte contre les microbes ne sont pas des armes nouvelles, créées de toutes pièces pour un danger nouveau. Elles sont le produit d'une adaptation heureuse aux microbes d'une fonction vitale d'ordre général, dont les possibilités d'application débordent largement les limites de la maladie infectieuse.

La vérité de cette conception fut démontrée immédiatement par de nombreux auteurs, qui injectèrent aux animaux en expérience non plus des microbes ou des globules rouges, mais des globules blancs, des spermatozoïdes, des cellules prélevées à différents organes et obtinrent des sérums toxiques pour ces globules blancs, ces spermatozoïdes, ces cellules ou ces organes. L'analyse du mode d'action de ces sérums permit d'attribuer leur toxicité à la coopération de l'alexine et d'une sensibilisatrice.

Poussant plus loin cette enquête, Gengou, un collaborateur de Bordet, abandonnant les éléments figurés, injecta à l'animal des substances albuminoïdes en suspension ou en dissolution, telles que les protéines du sérum, la caséine du lait, l'albumine du blanc d'œuf, et il put établir qu'ici encore l'organisme réagit chaque fois, en accumulant dans son sérum une sensibilisatrice spécifique pour la substance injectée. Mise en présence de celle-ci, la sensibilisatrice s'unit à elle en un complexe colloïdal, sur lequel l'alexine se fixe ultérieurement. D'une enquête approfondie à laquelle se sont livrés de nombreux auteurs, il résulte que cette réaction si curieuse de notre organisme s'étend à la classe entière des substances protéiques et à elle seule. Elle n'est pas fonction de la grandeur de leur molécule, puisqu'elle fait défaut pour des molécules aussi volumineuses, telles que les féculs, ni de leur toxicité, puisque les albumines non toxiques la mettent en jeu autant sinon plus que les albumines toxiques; elle fait d'ailleurs défaut dans l'état d'accoutumance aux poisons de nature non protéique tels que glycosides et alcaloïdes. Diverses explications ont été proposées. La plus simple consiste à dire qu'elle appartient à cet ensemble de mécanismes régulateurs au moyen desquels l'organisme défend avec vigilance et précision la constance de composition de son milieu humoral; qu'elle est celui dont l'action s'oppose plus particulièrement à la pollution du milieu humoral par des protéines étrangères. Les travaux de Bordet sur les sérums cytotoxiques ont donc jeté une clarté inattendue sur un côté important de cette chimie mystérieuse de l'être vivant, qui s'élabore dans l'intimité des organes et des tissus et dont la connaissance est indispensable à la médecine.

Mais Bordet nous a donné plus que cette connaissance nouvelle, il nous a fourni un moyen de l'approfondir et de l'étendre, grâce à l'étude de l'hémolyse. Il n'est, en effet, pas d'altération cellulaire qui se prête mieux à l'observation que cette hémolyse, parce que les globules rouges du sang sont des éléments très

maniables, faciles à obtenir à l'état de pureté et dont l'altération même légère est accompagnée de la diffusion du pigment rouge, l'hémoglobine, qu'elles contiennent. Rien de plus aisé que de déceler ou de doser l'hémoglobine et, par conséquent, de mesurer le degré de souffrance des globules rouges. Ces heureuses circonstances ont fait que depuis la découverte de Bordet, des milliers de travaux ont été consacrés à l'hémolyse et que la liste est loin d'en être close. Bordet lui-même a fait de l'hémolyse l'index de sa méthode de la fixation du complément, dont les applications sont journalières en bactériologie et en clinique et qu'il convient d'exposer ici en quelques mots.

Il a été dit précédemment que toute protéine étrangère à l'organisme provoque, quand elle est injectée sous la peau ou dans le sang, la production d'une sensibilisatrice. Dans la nomenclature actuelle, on désigne la protéine ainsi utilisée par le vocable générique d'antigène et l'on donne à la sensibilisatrice le nom d'anticorps. Mis en présence l'un de l'autre, l'antigène et l'anticorps se combinent et le complexe colloïdal, antigène-anticorps, est doué de la propriété de fixer l'alexine. Supposons qu'un microbe vienne d'être isolé chez un malade : Nous désirons connaître sa nature exacte, savoir, par exemple, s'il est le microbe du choléra. Vite, nous le mettons en présence de l'anticorps cholérique, dont les laboratoires de bactériologie sont pourvus, et d'un peu de sérum frais qui apporte l'alexine. Après quelques instants de contact, nous recherchons si l'alexine a été fixée. Dans l'affirmative, le microbe est bien celui du choléra; dans la négative, il appartient à une autre espèce. Mais comment savoir si l'alexine a été fixée? Simplement en introduisant dans le mélange une gouttelette de sang de mouton accompagnée d'un peu d'anticorps hémolytique, c'est-à-dire de sérum chauffé à 56° d'un lapin qui a été injecté de sang de mouton. Globules rouges et anticorps hémolytique constituent aussi un groupe antigène-anticorps doué d'affinité par l'alexine. Si l'alexine a été fixée par les microbes, il n'en restera pas à la

disposition des globules rouges; l'hémolyse fera défaut et vice versa. Comme rien n'est plus simple que de déceler l'existence ou l'absence d'une hémolyse, on arrive aisément au but.

Le cas inverse peut se présenter : Le médecin se trouve en présence d'un malade qu'il soupçonne atteint de fièvre typhoïde. Pour assurer le diagnostic, il recueille, par une simple piqûre de la peau, quelques gouttes de sang du malade et fait agir le sérum chauffé à 56° sur une culture de bacille typhique en présence d'un peu de sérum frais de cobaye. Suivant que l'alexine est fixée ou non, il conclura que son malade est ou n'est pas atteint de fièvre typhoïde.

Cette méthode, découverte et décrite par Bordet, rend journellement les plus grands services aux médecins praticiens. Elle est d'exécution simple et facile; les renseignements qu'elle fournit dépassent en précision les résultats de l'examen clinique le mieux conduit. Elle a été appliquée avec un succès tout particulier par Wassermann au diagnostic de la syphilis, et le bénéfice qu'en a retiré l'humanité est inestimable.

Mais le problème de l'hémolyse offre encore d'autres aspects intéressants : L'hémolyse, c'est la mort du globule rouge, d'une cellule particulièrement simple et facile à observer. Avant les travaux de Bordet, les physiologistes s'étaient déjà beaucoup intéressés à l'hémolyse par les solutions salines hypotoniques, et les observations faites par Hamburger avaient montré la grande portée des phénomènes osmotiques en biologie. Ces observations devaient nécessairement conduire à l'étude des conditions de perméabilité de la paroi cellulaire qui est à l'heure actuelle un des problèmes les plus importants de la physiologie générale. Quand une cellule souffre ou meurt, sa paroi cesse d'être imperméable à des substances qu'elle ne laisse pas passer à l'état normal. Il en est ainsi du globule rouge. Seulement, comme son contenu est fortement coloré, on s'aperçoit aisément de la moindre fuite, ce qui fait de l'hémolyse un objet de choix pour l'étude des altérations d'une paroi cellulaire.

De ce point de vue, il était intéressant d'observer les rapports qui s'établissent entre la paroi globulaire et les substances hémolytiques, anticorps et alexine. Bordet a apporté une contribution expérimentale importante à la solution de ce problème. Il écarte délibérément toutes les explications simplistes basées sur des données empruntées à la chimie des substances cristalloïdes et montre que la lumière doit venir de cette partie encore mal connue de la chimie générale qui traite de l'état colloïdal de la matière.

Dans le même ordre d'idées, il prouve que l'agglutination des microbes et des globules rouges sous l'influence des sérums spécifiques, agglutination qui précède habituellement leur destruction, doit être rangée parmi les phénomènes de floculation des milieux troubles, chapitre voisin de celui des colloïdes.

Il faudrait que je vous cite ici l'étude approfondie qu'il fit des substances antagonistes ou auxiliaires de l'hémolyse et de l'agglutination et que je vous fasse entrer à sa suite dans le dédale des combinaisons entre alexines et antialexines, sensibilisatrices et antisensibilisatrices, agglutinines et congglutinines, etc. Mais j'ai peur d'être un guide moins sûr que lui et de me perdre avec vous dans le jeu de ces rapports complexes. Je me contenterai de dire que les faits nouveaux sont nombreux, très intéressants pour les spécialistes et que certains ont été appliqués avec succès à des recherches de bactériologie et de clinique.

Le temps me manque aussi malheureusement pour vous exposer le point de vue de notre savant collègue dans la question, devenue si importante, de l'anaphylaxie, à laquelle il apporta une contribution expérimentale très suggestive.

La première publication de Bordet sur l'immunité remonte à 1894; la dernière est un livre de sept cents pages, paru cette année même, monument imposant de science et d'érudition. A le lire, on voit nettement toute l'étendue du chemin parcouru depuis un quart de siècle et l'importance de la contribution per-

sonnelle du maître et de ses élèves. Lecture consolante pour le philanthrope, auquel elle montre les étapes de la progressive victoire de l'homme sur la maladie; lecture suggestive pour le médecin, qu'elle incite à de nouveaux efforts en lui indiquant les chemins du progrès; œuvre de maturité et de recueillement d'un esprit original et puissant, qui, ayant beaucoup médité, est arrivé à une conception personnelle de la plupart des questions et qui met généreusement au service de tous ce que vingt-cinq années de labeur ininterrompu lui ont appris.

Comme tous ceux qui ont approfondi l'étude du milieu humoral et plus particulièrement des colloïdes protéiques qui en sont l'élément essentiel, Bordet a été amené à considérer avec une attention spéciale un phénomène, banal en apparence, connu depuis toujours et qui attend encore son explication : la coagulation du sang. Par quel prodige ce liquide si fluide tant qu'il est dans les vaisseaux, animé d'une vitesse considérable de circulation, se transforme-t-il presque instantanément en un caillot compact, résistant, dès qu'il s'épanche à l'extérieur? Voilà cent ans que les physiologistes cherchent la réponse à cette question; aucune n'a encore rallié l'assentiment de tous.

Bordet a consacré à cet objet une attention particulièrement soutenue. Au dernier congrès de médecine de langue française, il exposa, au cours d'une conférence captivante, l'ensemble de ses patientes et fructueuses recherches, et il en fit une harmonieuse synthèse devant un public éclairé, qui ne lui ménagea pas les marques de son intérêt et de son admiration. Pour refaire devant vous cet exposé magistral, il me faudrait toute la durée de notre séance et le talent de mettre, en une langue claire et accessible à tous, les phénomènes très compliqués, très obscurs, qui appartiennent à une science encore en formation : la chimie des colloïdes.

Qu'il me suffise de dire que les découvertes de Bordet, dans ce chapitre particulièrement difficile de la physiologie, ont éveillé le plus vif intérêt parmi tous ceux qui se sont essayés,

comme lui, à y voir clair, et que la science lui doit plusieurs notions nouvelles de la plus haute importance, sans la connaissance desquelles il serait impossible d'arriver à la solution définitive du problème. Parmi les principales, je citerai son étude du plasma paraffiné, ses observations sur la genèse de la thrombine et sur l'influence des précipités inorganiques sur le plasmasanguin, sa conception du rôle des lipoides dans la coagulation, ses expériences sur l'intervention des éléments figurés du sang, notamment des plaquettes.

Nulle part, mieux que dans ces dernières recherches, Bordet n'a montré les qualités de penseur et de technicien qui le distinguent.

Je terminerai cette revue, beaucoup trop succincte, en rappelant que dans le domaine de la bactériologie pure, notre confrère a également cueilli de beaux lauriers.

En 1896, il signala une particularité morphologique intéressante des streptocoques, quand on les inocule dans la cavité péritonéale du cobaye. Un grand nombre de microbes sont avalés en quelques minutes par les phagocytes, mais quelques-uns d'entre eux restent libres dans la lymphe péritonéale, comme si les phagocytes se refusaient à les attaquer. Ces microbes, chose curieuse, se sont entourés d'une gaine que les matières colorantes rendent nettement visible, et qu'ils ne possédaient pas dans leur culture. Plus une race est virulente, plus nombreux sont les individus qui s'entourent d'une gaine et qui échappent aux attaques des leucocytes. Il semble donc bien que la gaine protège les microbes et que la plus ou moins grande aptitude à la produire mesure la virulence de la race microbienne. Ultérieurement, des faits concordants ont été signalés par différents auteurs pour d'autres espèces microbiennes. Dans l'ignorance où nous sommes souvent des qualités qui différencient une race microbienne virulente d'une race non virulente, ce caractère signalé par Bordet prend beaucoup d'intérêt.

En 1906, Bordet découvrit et cultiva avec Gengou le microbe de la coqueluche. Il en est résulté plus de précision dans notre connaissance de cette maladie et la démonstration rigoureuse d'une notion que plusieurs cliniciens avaient déjà pressentie, à savoir l'existence de nombreux cas de coqueluche sans quintes, notamment chez l'adulte. Cette notion est importante au point de vue de la prophylaxie de la maladie.

En 1910, Bordet décrit, en collaboration avec M. Fally, le microbe de la diphtérie aviaire, maladie très fréquente des poules.

Il décrit la même année le microbe de la péripneumonie des bovidés, que Nocard et Roux avaient isolé et cultivé, sans parvenir à en fixer les caractères morphologiques. C'est le premier des virus dits filtrants, à cause de leur propriété de traverser les bougies de porcelaine dégourdie, qui ait été observé au microscope.

S'il fallait, d'après ses œuvres, caractériser l'esprit de notre collègue, on serait tenté d'affirmer tout de suite que deux qualités principales y dominent : La première est le goût de la recherche pour elle-même. D'instinct, il choisit les problèmes les plus difficiles, les travaux les plus longs. Ce n'est pas par un effet du hasard qu'il consacra le meilleur de son effort à la solution des deux principaux problèmes de la chimie des humeurs : l'immunité contre les maladies infectieuses et la coagulation du sang. Quand il en commença l'étude, c'était parmi les plus compliqués, les plus obscurs, mais aussi parmi les plus essentiels. On peut affirmer que celui qui saurait tout de la chimie du sang connaîtrait du même coup la chimie de tous les organes. Car le sang est le réservoir où se déversent les produits de toutes les fonctions organiques, le film cinématographique sur lequel s'inscrivent, dans leurs détails les plus infimes, les moindres activités cellulaires. Et c'est peut-être le plus grand mérite des recherches sur l'hémolyse que d'avoir

fourni un moyen précis, élégant, de scruter une partie du grand mystère.

On sent, à la lecture des travaux de Bordet, que c'est un plaisir pour lui de déchiffrer patiemment le livre de la nature, d'analyser les éléments d'une fonction, d'un phénomène par le judicieux emploi de la méthode expérimentale.

Ses recherches sont faites avec le soin, décrites avec le souci de précision qu'y mettent ceux pour lequel le travail est un agrément; une expérience réussie lui donne, comme à l'artiste, la joyeuse émotion du Vrai dans le Beau. Des hommes de ce caractère sont faits pour vivre au laboratoire; ils ne sont vraiment heureux que là.

Mais si Bordet aime la difficulté du problème, il n'est pas moins passionné de clarté dans la solution. Il répond à une question, non par des discours, mais par une expérience, simple autant que possible, claire et dont le résultat ne prête pas à équivoque. Ses déductions ne dépassent pas la donnée objective; il se défie de l'hypothèse, de l'anticipation. Et c'est naturel chez un esprit qui est supérieurement doué pour découvrir le fait nouveau et, au besoin, pour le susciter. On est peu enclin à rêver devant une abondante moisson.

Grâce à ces qualités, que doublent une inlassable activité et une technique ingénieuse et sûre, il a établi de façon définitive un grand nombre de faits nouveaux, qui ont été, pour lui et pour de nombreux chercheurs, un point de départ assuré pour d'autres travaux. Tout ce qu'il a affirmé s'est trouvé être exactement vrai. Ce criticisme expérimental l'a servi non seulement dans son travail personnel, mais aussi dans les discussions qu'il eut différentes fois à soutenir contre d'éminents savants de l'étranger. C'est alors que se manifeste chez lui le plus nettement cette tendance, qui est l'esprit même de la méthode scientifique, à ne rien demander à une expérience que ce qu'elle contient, à laisser toujours parler les faits eux-mêmes, sans les

solliciter. Leur langage n'est-il pas singulièrement éloquent pour qui sait le comprendre? En cela, il s'est montré un des plus fidèles disciples de Pasteur.

C'est à ce souci d'exactitude, de vérité, qu'il faut attribuer, pour une part, l'extraordinaire crédit dont ses travaux et ses opinions jouissent à l'étranger, et cette autorité toujours grandissante qui lui a permis d'exercer une profonde influence sur le courant des idées dans la science qu'il cultive.

MON CHER CONFRÈRE,

Permettez-moi de terminer ce résumé bien imparfait de vos publications les plus importantes, en vous disant combien tous ici nous avons été heureux d'apprendre qu'un prix Nobel de médecine vous avait été accordé. Nous n'avions pas attendu l'événement pour apprécier vos travaux à leur juste valeur. Depuis longtemps nous espérions qu'un jour vous recevriez cette juste récompense de votre travail désintéressé.

Vous êtes le premier savant belge proclamé vainqueur dans cette pacifique compétition entre les plus dignes et les plus grands. L'éclat de votre succès rejaillira sur la science belge et sur toute la Nation. Grâce à vous, nous aurons un peu plus l'estime de l'humanité; c'est dans les tournois de l'esprit que les petits peuples doivent briller.

En Belgique même, vous avez beaucoup fait pour la Science. Votre vie de travail et d'étude servira d'exemple aux jeunes et fera comprendre aux meilleurs d'entre eux que les plus belles carrières ne sont pas nécessairement les plus rémunérées. Grâce à vous, on comprendra mieux aussi en ce pays qu'il vaut parfois mieux pour le bonheur de tous qu'un médecin s'abstienne de soigner des malades et réserve tout son temps à ses études. Une découverte importante permet de sauver plus de vies humaines que cent praticiens éminents dans toute leur carrière. Beaucoup

ignorent encore que tous les progrès de la médecine sortent du laboratoire et de la méthode expérimentale. Enfin, il convient, pour finir, de proclamer à votre honneur que si vous avez décidé de travailler et de professer à Bruxelles, ce n'est pas faute d'offres brillantes de l'étranger. Mais vous avez cru, comme Pasteur, qu'un savant, si grand qu'il soit, a une patrie et qu'on ne sert nulle part mieux l'Humanité que dans son pays et par son pays. (*Applaudissements.*)

Réponse de M. Bordet.

Je ne puis vous dire toute la gratitude que j'éprouve. Les marques d'estime et de sympathie que vous m'avez prodiguées m'émeuvent profondément. Je dois une reconnaissance particulière à mon éminent Collègue M. Nolf, qui a bien voulu retracer, avec une bienveillance excessive, ma carrière scientifique. Nul n'était mieux désigné que lui pour cette tâche, puisqu'il s'est illustré lui-même dans l'étude de questions voisines de celles qui ont sollicité mon attention.

Les félicitations que vous venez d'adresser à l'un des vôtres, la satisfaction que vous inspire la distinction dont il a été l'objet, sont l'expression de ces sentiments de solidarité et d'affection mutuelle qui unissent tous ceux qui se sont consacrés à la science. Vous avez voulu d'autre part honorer le travail scientifique, en affirmant ainsi votre conviction profonde du rôle prédominant qu'il joue dans le développement de la civilisation, tant au point de vue moral que pour ce qui concerne l'amélioration des conditions de vie.

Parmi les devoirs qui incombent aux Académies, l'un des plus impérieux, certes, est de mettre leur influence et leur prestige au service de la science, en s'efforçant d'obtenir pour elle la

faveur et le respect du public, la protection des autorités et leurs encouragements. C'est une mission à laquelle vous n'avez pas failli. Notamment vous avez récemment consacré votre attention à cette question si essentielle, celle du mode de nomination du personnel des établissements scientifiques. Vous avez insisté sur cette notion d'ailleurs indiscutable que les pouvoirs administratifs, n'ayant pas qualité pour juger des mérites des savants, ne peuvent assumer la responsabilité d'une désignation qu'à la condition de s'être inspirés d'avis autorisés. Et c'est pourquoi vous émettiez le vœu que l'Académie fût consultée. Rien n'est plus nécessaire. Le choix des personnes sur qui doit reposer désormais la réputation d'un établissement scientifique ne saurait être entouré de trop de circonspection. Seuls, les corps savants sont à même d'apprécier quels sont, parmi les candidats, ceux dont le passé fournit les plus belles promesses d'avenir. Puisqu'un membre du Gouvernement nous fait l'honneur d'assister à la séance d'aujourd'hui, qu'il me permette de lui signaler combien il est désirable que la question soulevée par l'Académie soit promptement examinée et résolue dans le sens indiqué.

Travailler ensemble au progrès de la science dans notre pays, c'est bien notre pensée commune. Et je suis heureux de ce que la circonstance présente me fournisse l'occasion de vous dire, en vous exprimant ma profonde reconnaissance, combien je me sens attaché à notre institution, où je compte non seulement tant de collègues éminents, mais aussi tant d'amis.

La Morphologie végétale.

Discours par A. GRAVIS, directeur de la Classe des sciences.

Pour étudier les plantes, il est nécessaire de se placer successivement à deux points de vue : On peut porter d'abord son attention sur la forme extérieure et sur la structure intérieure des organes, s'occuper ainsi de *Morphologie*. Il faut considérer ensuite les phénomènes vitaux, ce qu'on désigne, d'autre part, sous le nom de *Physiologie*.

Nous nous bornerons, aujourd'hui, à envisager la morphologie végétale, à rechercher ses débuts, à rappeler son développement, à deviner si possible son extension future.

Pour les besoins de cette étude, il nous suffit de remonter à **Linné**, afin d'exposer quel était l'état de la botanique au temps de ce grand réformateur de l'histoire naturelle. La chose nous sera aisée, grâce à la précision avec laquelle Linné lui-même a défini ce qui devait constituer la connaissance du règne végétal. Cette connaissance consiste, selon lui, dans la description des espèces, leur dénomination et leur classification. « Celui qui s'occupe de cela est botaniste, tout autre, non », dit-il, dans sa *Philosophie botanique* ⁽¹⁾ (1751). Les anatomistes qui étudient la structure intérieure sont rangés par Linné dans la catégorie des « botanophiles », avec les médecins qui recherchent les vertus des plantes, et les jardiniers qui écrivent sur la culture des végétaux ⁽²⁾. Quant aux physiologistes, il ne pouvait en être question à une époque où la chimie n'existait pas encore !

⁽¹⁾ *Philosophia botanica*, art. 151.

⁽²⁾ *Ibidem*, art. 43 à 46.

Pour décrire les plantes, il fallait noter les diverses particularités que présentent, dans leur conformation extérieure, les organes de végétation et de reproduction. La nomenclature de ces particularités, de ce que nous nommons l'organographie, était surabondante du temps de Linné, parce qu'on se croyait obligé de désigner par un terme spécial toutes les formes, toutes les dispositions, toutes les manières d'être qui peuvent se rencontrer. Cette terminologie fut établie sans idée directrice. Une incroyable confusion régnait dans les notions de tige et de racine. Nous lisons dans la *Philosophie botanique* que « tous les arbres et les arbustes sont des racines au-dessus du sol ⁽¹⁾ », parce que leur tronc et leurs branches donnent naissance, chaque année, à des pousses feuillées. Or, « produire l'herbe » était autrefois considéré comme le propre de la racine ⁽²⁾. L'existence des tiges souterraines était d'ailleurs complètement méconnue. Pour les feuilles et les pièces florales, il y avait une telle profusion de qualificatifs que les botanistes descripteurs eux-mêmes ont, aujourd'hui, renoncé à l'usage de beaucoup d'entre eux.

Linné, comme tous les naturalistes de son époque, admettait implicitement une égale complication dans l'organisation de toutes les plantes. Il ne soupçonnait aucun rapport entre les formes organiques des diverses espèces, celles-ci étant considérées comme complètement indépendantes les unes des autres. La constance des caractères distinctifs des espèces ne faisait aucun doute. « Nous comptons, déclarait Linné, autant d'espèces qu'il y a eu, au commencement, de formes diverses créées ⁽³⁾. »

On peut dire qu'au milieu du XVIII^e siècle, tous les efforts tendaient à la détermination des espèces : la morphologie n'existait pas, pas plus que la biologie, d'ailleurs. Si Linné s'est

⁽¹⁾ *Philosophia botanica*, art. 80.

⁽²⁾ *Ibidem*, art. 80 et 81.

⁽³⁾ *Ibidem*, art. 157.

intéressé à la question de savoir si les plantes étaient douées de sexualité (problème qui était encore soumis à controverse en ce temps-là), c'est qu'il voulait justifier l'importance qu'il accordait aux étamines dans sa classification (1735). Celle-ci comprenait vingt-quatre classes basées sur l'existence, le nombre, la situation, la grandeur, etc... des étamines. Cette classification est complètement artificielle, parce qu'elle ne tient compte que d'un seul organe. Linné le savait et rassemblait, avec soin, ce qu'il nommait « les fragments » d'une classification naturelle, qu'il appelait de tous ses vœux ⁽¹⁾.

A Bernard et à Antoine-Laurent de Jussieu revient l'honneur d'avoir établi une classification, non sur une base choisie arbitrairement, comme l'avait fait Linné et ses prédécesseurs, mais sur tout un ensemble de caractères subordonnés d'après des principes reconnus par l'expérience. La classification naturelle de 1773 comprend quinze classes subdivisées en familles. Des caractères fournis par l'embryon, la corolle, les étamines, l'ovaire, le fruit, etc... sont utilisés tour à tour. Cette classification a reçu des perfectionnements successifs résultant des progrès mêmes de la morphologie.

Quant à la connaissance des espèces, elle a donné lieu à d'innombrables travaux qui ont eu pour conséquence un accroissement considérable de leur nombre et une difficulté croissante d'utiliser les diagnoses. Aujourd'hui, la détermination des espèces ne peut être réalisée, avec quelque rigueur, que par des botanistes qui se sont spécialisés dans des groupes assez restreints.

D'autre part, la fixité absolue des caractères spécifiques a été mise en doute, puis niée complètement. Actuellement, on cherche encore la définition de la notion même de l'espèce; on se demande quelles sont les lois de la variation et de l'hérédité.

(1) *Philosophia botanica*, art. 77.

Telle fut, dans ses grandes lignes, la marche de la botanique systématique. Nous avons à indiquer, maintenant, celle des autres parties de la botanique. Pour cela, il nous faut reprendre notre point de départ. Le dernier chapitre de la *Philosophie botanique* contient des aphorismes dont quelques-uns nous intéressent particulièrement. Linné y affirme que le principe des fleurs et des feuilles est le même; que le bourgeon est composé de rudiments de feuilles; qu'une végétation trop abondante place encore des feuilles où l'on cherche des fleurs; qu'une végétation pauvre produit des fleurs où devraient se trouver des feuilles. Quelques auteurs ont voulu voir, dans ces vagues énoncés, le germe d'idées qui ont pris plus tard un grand développement, comme nous aurons à le montrer bientôt. En réalité, Linné ne paraît pas avoir attaché d'importance à ces aphorismes. Tels qu'ils étaient formulés, ils ne pouvaient avoir aucune influence sur la marche de la science.

Dans les *Amœnitates Academicæ*, une dissertation rédigée par N.-E. Dahlberg en 1755, sous la direction de Linné, porte le titre de *Metamorphosis Plantarum*. On y découvre la bizarre conception que voici : la fleur n'est que l'expansion du tronc dans l'ordre suivant : l'écorce extérieure produit le calice, l'écorce intérieure ou liber devient la corolle, le bois forme les étamines, la moelle devient le pistil. Tout ce qui trouble l'organisation de ces parties fait éprouver de grands changements à la plante entière. Il en résulte, soit de simples variétés, soit des monstruosité.

Une autre conception de Linné, non moins erronée, est celle de l'anticipation (prolepsis). La fleur résulterait de parties destinées primitivement à se développer pendant plusieurs années consécutives : les bractées correspondraient à la deuxième année, le calice à la troisième, la corolle à la quatrième, les étamines à la cinquième, et le pistil à la sixième.

Gaspard Wolf, dans sa *Theoria generationis* de 1759, a émis des vues plus claires : « Les pièces du calice et de la corolle,

dit-il, diffèrent peu des feuilles; dans les fleurs qui possèdent de nombreuses étamines, on voit parfois celles-ci se changer en pétales et donner naissance à des fleurs doubles. Les valves d'un fruit qui s'ouvre, à la maturité, représentent les feuilles dont ce fruit se compose. » L'auteur affirme même que les différentes parties d'une plante, qui semblent au premier coup d'œil si étrangères les unes aux autres, se réduisent en dernière analyse aux feuilles et à la tige. Il cherche, ensuite, la cause de ces transformations des organes de la plante et croit la trouver dans le décroissement de la force végétative.

C'était à **Goethe** qu'il était réservé de mettre en pleine lumière un sujet à peine entrevu avant lui. Le plus célèbre des poètes allemands était un observateur perspicace et un naturaliste passionné. En zoologie, il avait découvert l'os intermaxillaire chez l'homme. L'existence de cet os, qui avait fait l'objet de longues controverses, lui permit de défendre l'idée de la continuité du type ostéologique à travers une longue série d'animaux. Il soutint aussi que les Vertébrés, comme les Articulés, sont constitués par une succession d'articles plus ou moins modifiés, le crâne humain lui-même étant formé d'un certain nombre de vertèbres transformées et soudées. Cette dernière conception n'a pas été pleinement confirmée par l'embryologie, mais elle fut féconde par son originalité et son caractère en quelque sorte schématique.

Dans un voyage qu'il fit en Suisse, en Italie et en Sicile, Goethe fut frappé de la nouveauté des formes végétales qui s'offraient à ses regards. Son admiration le rendit attentif à certains phénomènes qui se manifestent en tous pays, mais qui restent habituellement cachés à cause de la manière superficielle dont nous concevons les choses que nous voyons tous les jours. Il remarqua, notamment, à Padoue un jeune palmier qui portait, en même temps que ses premières feuilles, entières et lancéolées, d'autres de plus en plus divisées en éventail. Il se mit à

recueillir des graines qu'il sema et dont il suivit soigneusement la germination. Il étudia curieusement une foule de faits si simples que tout le monde, semble-t-il, aurait pu les constater. Des idées nouvelles se précisèrent peu à peu dans son esprit et remplirent ses longues méditations.

Arrivé au terme de son voyage, Goethe était convaincu de « l'identité originelle de toutes les parties de la plante ». Dès lors, il chercha toutes les preuves capables d'établir sa thèse et fixa principalement son attention sur les formes que présentent les plantules. Il fut tout heureux de voir des Cactées dépourvues de feuilles germer avec deux cotylédons, c'est-à-dire posséder manifestement, au début de leur existence, deux feuilles à peine modifiées. Il observa aussi, avec soin, diverses monstruosités accidentelles, notamment une rose prolifère, dont l'axe se prolongeant au delà de la fleur se continuait en une branche garnie d'épines, de feuilles et de boutons.

En 1792, il fit un premier exposé de ses idées. Il compléta son travail et le fit réimprimer, en 1831, sous le titre : « Essai sur la métamorphose des plantes », avec une traduction française par F. Soret. On a donné, dit Goethe, le nom de métamorphoses des plantes aux transformations par lesquelles une partie du végétal se produit au moyen d'une autre, et offre les formes les plus variées par des modifications d'un seul organe. Ces métamorphoses se manifestent de trois manières : régulièrement, irrégulièrement et accidentellement.

Les métamorphoses de la première catégorie se montrent d'une façon évidente lorsqu'on considère les appendices étagés le long d'une même tige, depuis les cotylédons jusque dans la fleur : on voit ces appendices se diversifier, se compliquer, puis se simplifier. Les cotylédons sont véritablement des feuilles, parce que, dans un grand nombre de plantes, ils ressemblent complètement à des feuilles; parce que les appendices qui les suivent se rapprochent de plus en plus de la forme des feuilles de l'état adulte; parce qu'il y a un bourgeon dans

l'aisselle des cotylédons, comme il s'en trouve dans l'aisselle des feuilles normales. La diversité de celles-ci, chez les plantes terrestres et les plantes aquatiques, la complication de leurs parties, la variabilité de leurs formes, exercèrent longtemps la sagacité de l'auteur. Le passage à l'état de fleur se fait tantôt brusquement, tantôt avec plus de lenteur. Dans ce dernier cas, les feuilles se rétrécissent, perdent leurs découpures, s'insèrent par une base plus large (bractées). Le calice est formé de plusieurs feuilles rapprochées, indépendantes ou soudées entre elles. Il en est de même de la corolle malgré ses vives couleurs. Les étamines et le pistil sont plus profondément métamorphosés : ils reviennent, cependant, parfois à l'état de petites feuilles vertes. Les bourgeons se composent d'un certain nombre de nœuds et de feuilles, de sorte que les tiges latérales qui en naissent peuvent être considérées comme étant de petites plantes fixées sur la tige mère.

Après avoir constaté ces faits et les avoir énoncés d'une façon précise, l'auteur a cherché à les expliquer en faisant appel à des notions vagues sur les variations de la vigueur des organes, et à une succession d'expansions et de concentrations alternatives : l'extension produirait le limbe foliaire, les pétales et le fruit ; la concentration provoquerait la formation du calice et des étamines. Cette tentative d'explication mécanique de la transformation des organes est évidemment sans valeur.

Dès 1820, Goethe avait nettement défini ce qu'il faut entendre par morphologie : c'est la science de la forme, de la formation et des transformations des corps organisés ; car la forme est quelque chose de mobile, qui devient et qui passe. La science des formes est donc la science des transformations. Celles-ci sont à rechercher partout avec le plus grand soin, parce que le principe de continuité domine toute l'Histoire naturelle.

A.-P. de Candolle, sans avoir eu connaissance des ouvrages de Goethe, exposa, en 1813, dans sa *Théorie élémentaire de*

la Botanique, des vues sur la disposition des organes végétaux et les dégénérescences qu'ils peuvent subir. Ses vues se rapprochent beaucoup de celles de Goethe et marquent un progrès dans la voie ouverte par l'auteur de la théorie des métamorphoses.

« Dans l'économie générale de la nature, dit de Candolle, il arrive souvent que telle fonction ne pouvant, par suite d'un système donné de structure, être remplie suffisamment par l'organe qui lui est ordinairement destiné, est exercée en tout ou en partie par un autre... Ainsi, quoiqu'il soit vrai de dire que l'usage des organes est d'ordinaire ce qu'il y a de plus important à connaître, cet usage, dans beaucoup de cas, est modifié, suppléé ou interverti par suite du système général de l'organisation ⁽¹⁾. »

L'auteur admet quatre catégories de modifications : les avortements, les multiplications, les dégénérescences et les adhérences. L'organe avorté, qui n'est plus apte à remplir sa fonction primitive, devient parfois, par le fait même, apte à remplir une autre fonction. D'autres fois, il reste sans fonction aucune. Des exemples de multiplication sont fournis accidentellement par certaines fleurs doubles, comme celles de l'œillet, ou d'une façon constante par d'autres, comme les fleurs des Cactées. Par dégénérescences, il faut entendre les modifications qui donnent à certains organes une apparence très différente de celle qui leur est habituelle, en les transformant en épines, en vrilles, en membranes, en écailles sèches, ou en parties juteuses. Des adhérences se produisent accidentellement par le rapprochement de deux troncs, de deux fleurs ou de deux fruits. D'autres existent dans un grand nombre d'espèces chez lesquelles les pétales, les étamines, etc., sont normalement soudés.

« L'usage des organes est une conséquence de leur structure et n'en est nullement la cause, comme certains écrivains irré-

(1) A.-P. DE CANDOLLE, *Théorie élémentaire de la Botanique*, 3^e édit., p. 73.

fléchis semblent l'indiquer. L'usage, quelle que soit son importance dans l'étude physiologique des êtres, n'a donc en lui-même qu'une médiocre importance dans l'anatomie et ne peut en avoir aucune dans la taxonomie. » (Classification) ⁽¹⁾.

En affirmant que la fonction dépend de la structure, de Candolle n'envisage que l'état présent des choses. Nous verrons bientôt qu'en s'efforçant de remonter à l'origine, Lamarck a pu établir que la fonction a contribué à donner à un membre la structure qu'il possède actuellement. Quant à l'affirmation que la classification repose sur la morphologie et nullement sur les fonctions, ce principe est vrai et son importance est capitale.

de Candolle eut à réfuter des objections qui lui furent faites notamment par les physiologistes de son temps. Il leur fit remarquer que « ceux qui ont exclusivement étudié la physiologie des êtres organisés sont en général peu exercés à l'étude des ressemblances ; ils n'examinent et ne doivent examiner que l'action ou l'usage des organes, car c'est là ce qui est essentiel dans un être considéré comme être vivant... Mais, s'agit-il de comparer entre eux des êtres plus ou moins analogues, il faut remarquer que l'usage de chaque organe se modifie selon les circonstances, tellement qu'on est souvent obligé de comparer, sous le rapport de la symétrie générale de l'organisation, des parties très disparates quant à leur emploi » ⁽²⁾.

L'auteur complète sa théorie par des considérations philosophiques de la plus haute portée. « Chaque groupe (d'êtres organisés), dit-il, est soumis à deux classes de lois générales : 1° la symétrie, ou l'ordre régulier d'après lequel ses organes sont disposés ; 2° l'action de la vie, d'où résultent souvent des dérangements à la loi de la symétrie, qui font que cette symétrie, ou régularité organique, est souvent intervertie ou masquée à nos yeux par des circonstances tantôt accidentelles, tantôt plus

⁽¹⁾ A.-P. DE CANDOLLE, *Théorie élémentaire de la Botanique*, 3^e édit., p. 143.

⁽²⁾ IDEM, *Ibidem*, p. 150.

ou moins constantes, selon qu'elles sont des conséquences plus ou moins directes de l'ensemble de l'organisation » ⁽¹⁾. Il était impossible d'énoncer plus clairement, sans le secours de la théorie de l'évolution, les faits essentiels de la morphologie végétale : « la symétrie », dont parle de Candolle ; c'est ce qui constitue pour nous le type fondamental transmis par hérédité ; « l'action de la vie », c'est ce que nous nommons aujourd'hui l'adaptation aux conditions particulières du milieu.

Enfin, comme s'il croyait nécessaire de justifier les réflexions qu'il vient de faire, l'illustre naturaliste ajoute : « Vouloir rejeter de la botanique tout ce qui ne tombe pas sous les sens, ce serait lui refuser un rang parmi les sciences physiques, car une collection de faits isolés et sans liaison ne forme point une science. Il faut que les faits soient réunis par des liens qui ne sont visibles qu'aux yeux de l'intelligence. Souvent même on rectifie, par un ensemble de raisonnements exacts, ce que les sens présentent d'inexact et d'incomplet ⁽²⁾. »

A.-P. de Candolle fut le premier botaniste qui reconnut la singulière discordance qui existe entre les caractères morphologiques des organes et les fonctions qu'ils remplissent. Il posa comme un axiome que la nature morphologique des organes et leur emploi en systématique sont absolument indépendants de leur valeur physiologique. Il en conclut que la classification naturelle doit être basée sur la morphologie. S'il ne réussit pas à réaliser une classification entièrement conforme à ce principe, c'est que l'organisation de tous les végétaux n'était pas suffisamment connue de son temps.

La théorie de Goethe ne fut point goûtée d'abord : elle avait paru trop tôt. Le livre de de Candolle exerça sur la science botanique une influence plus rapide. Appliquant les idées nouvelles, **Robert Brown** (1826) put débrouiller l'organisation flo-

(1) A.-P. DE CANDOLLE, *Théorie élémentaire de la Botanique*, 3^e édit., p. 157.

(2) IDEM, *Ibidem*, p. 158.

rale compliquée de certaines familles telles que les Orchidées, les Graminées, les Asclépiadées, etc... Il reconnut que dans les Conifères et les Cycadées, les ovules ne sont pas enfermés dans un ovaire : ces végétaux méritent le nom de Gymnospermes et doivent être séparés des plantes dont les graines sont contenues dans un fruit et que nous désignons maintenant sous le nom d'Angiospermes. La gymnospermie est un fait capital qui avait échappé jusque-là à l'attention des botanistes.

En 1830, **Ch.-F. Schimper** exposa une théorie relative à la disposition des feuilles le long de la tige, théorie qui a été nommée *Phyllotaxie*. Il mit en lumière les règles géométriques qui président à l'arrangement des organes appendiculaires et qui forment un ensemble rigoureusement coordonné. Chaque feuille est séparée de la précédente par un angle dièdre dont la valeur, mesurée en fraction de circonférence, correspond généralement à l'une des fractions de la série $1/2$, $1/3$, $2/5$, $3/8$, $5/13$, $8/21$, etc... La disposition des pièces florales est soumise à la même loi, mais il arrive souvent que la spire est découpée en cycles séparés que l'on désigne habituellement par le terme verticilles. Ceux-ci alternent entre eux par suite d'une prosen-thèse. Cette théorie fut bien accueillie et devint le point de départ de nombreux travaux dans lesquels des considérations mathématiques de plus en plus abstraites se firent jour. Peu après, les frères **Bravais** (1837) étudièrent le même sujet, sans connaître les publications allemandes : leurs résultats confirmèrent presque entièrement ceux de Schimper. Quelques restrictions, cependant, ont été apportées par **Hofmeister**, qui, dans sa *Morphologie générale* de 1868, fit valoir des arguments d'ordre génétique et mécanique en vue d'expliquer la phyllotaxie.

A. Braun est l'auteur d'une théorie dite du « rajeunissement » qui envisage les métamorphoses au point de vue téléologique. Cette œuvre appartient à l'école des théories philosophiques désignée sous le nom de « Philosophie de la Nature ». C'est

une suite de considérations abstraites et peu compréhensibles, ne reposant sur aucun fait constaté. On peut en dire autant d'une interminable dissertation sur l'individu végétal.

De nombreux ouvrages se sont succédé manifestant la même tendance chez les botanistes de cette époque. La science des plantes menaçait de se perdre dans une vaine phraséologie prétendument philosophique. Heureusement, une vie nouvelle se manifesta vers 1840, grâce aux progrès réalisés en microscopie. Dès cette époque aussi, l'investigation morphologique se sépara de plus en plus de la botanique systématique, pour constituer une science autonome, distincte de celle qui, continuant l'œuvre de Linné, ne s'occupe que de la description des espèces et de leur classement dans les herbiers. Cette rénovation se manifesta dans les divers domaines de la botanique, notamment dans ceux de l'anatomie, de l'embryologie, de l'organogénie, de la cryptogamie, de la paléontologie et de l'éthologie.

*
* *

L'anatomie végétale comprend deux divisions principales : la cytologie et l'histologie. Elle traite de sujets divers dont l'examen a été poursuivi par un si grand nombre de savants qu'il ne nous sera pas possible de suivre ici un ordre rigoureusement chronologique.

La **Cytologie**, ou étude des cellules, débute avec **Robert Hooke**, qui, en 1667, vit dans une mince lame de liège, une multitude de petites chambres vides, auxquelles il donna le nom de cellules. **N. Grew** (1671) et **M. Malpighi** (1671) se livrèrent à des recherches suivies qui leur permirent de constater les cellules du parenchyme foliaire, les fibres et les vaisseaux du bois. Puis, durant plus d'un siècle, la connaissance de la structure des plantes ne fit aucun progrès.

Au début du XIX^e siècle, les travaux de **Brisseau de Mirbel**, **Sprengel**, **Bernhardi**, **Treviranus**, **Link**, **Rudolphi**, **Moldenhawer** se succédèrent rapidement. On s'occupa tout d'abord de la

membrane cellulaire, de sa forme, de son épaisseur, des détails de sa surface, de ses propriétés physiques, etc... C'est en 1828 que **Meyen** attira l'attention sur le contenu de certaines cellules : grains de chlorophylle, grains d'amidon, cristaux, etc... **Robert Brown** (1830), le premier, aperçut le noyau ; **Hugo Mohl** (1846) découvrit le protoplasme et le suc cellulaire.

L'origine des cellules donna lieu, d'abord, à des erreurs fort grossières de la part de **Wolff** (1759) et de **Schleiden** (1838). **B.-C. Dumortier**, en 1832, avait entrevu la division cellulaire qui, bientôt après, fut étudiée avec soin par **Unger** (1841), puis par **Naegeli** (1846).

En 1875, **Ed. Strasburger** entreprit de magistrales recherches sur la caryocinèse et sur les phénomènes intimes de la fécondation. En 1905, il établit l'importante distinction des cinèses typiques et des cinèses allotypiques. Ces trois questions ont suscité l'activité d'un grand nombre de cytologistes et sont encore à l'ordre du jour ⁽¹⁾.

Sous le terme **Histologie**, nous réunirons ce qui concerne les tissus considérés isolément, ainsi que leur groupement dans les organes végétatifs et floraux.

Les tissus ont été observés d'abord dans leur état adulte. En 1675, **Malpighi** reconnut le liège, l'écorce, le bois, la moelle dans la tige d'un certain nombre de plantes. A la même époque, **Grew** employa, pour la première fois, le mot « tissu » pour désigner l'entrecroisement des couches ligneuses et des rayons médullaires dans les arbres. Le terme tissu a reçu dans la suite une acception beaucoup plus large.

Des progrès notables ne purent être réalisés que par des études d'histogenèse, c'est-à-dire par la recherche du mode de

(1) Il n'est pas possible de mentionner ici tous les travaux importants relatifs aux sujets qui nous occupent. Les œuvres des auteurs contemporains n'appartiennent pas encore à l'Histoire ; elles ne seront pas indiquées dans cette rapide revue.

développement des tissus. **Grew** avait distingué le cambium, qu'il considérait comme un liquide mucilagineux capable de provoquer l'épaississement de la tige. Ce fut en 1806 seulement que **Mirbel** devina le double fonctionnement du cambium, produisant du bois en dedans et du liber en dehors. Toutefois, la constitution cellulaire du cambium ne fut reconnue que plus tard.

Naegeli (1857) et **Sanio** (1863) recherchèrent l'origine de l'anneau libéro-ligneux qui, dans les arbres, précède l'apparition du cambium. **Millardet** (1865) élucida complètement l'origine et le mode de fonctionnement de la zone génératrice des monocotylées arborescentes (périméristème des *Yucca* et *Draecœna*).

L'attention s'étant portée sur le sommet végétatif des tiges et des racines, où se produit l'accroissement longitudinal, on fit la découverte d'une cellule apicale chez les Ptéridophytes, et d'un tissu générateur (méristème) chez les Spermaphytes. **Naegeli** (1844) et **Hofmeister** (1850) se distinguèrent dans ces recherches. **Hanstein** (1869) crut pouvoir subdiviser le méristème en trois régions qu'il nomma dermatogène, périblème et plérôme. D'autres anatomistes, encore, s'efforcèrent de distinguer des histogènes et des cellules initiales au centre de ceux-ci.

Bien avant d'arriver à ces résultats, divers auteurs s'étaient trop hâtés de se lancer dans l'Anatomie comparée. A la fin du XVIII^e siècle, **Daubenton** opposa la structure de la tige des Monocotylées à celle des Dicotylées. **Desfontaines** (1797) crut que, dans la première, le développement des tissus se faisait du dehors en dedans, tandis que, dans la seconde, il s'opérait de l'intérieur vers l'extérieur. De là résulterait que la tige des Dicotylées est susceptible de prendre, notamment chez les arbres, un accroissement en épaisseur considérable. L'erreur commise par **Desfontaines** provient d'une étude histologique trop sommaire et surtout d'une ignorance complète de l'histo-

genèse. Cette erreur, malheureusement, fut sanctionnée par **A.-P. de Candolle**, qui créa les termes « endogènes » et « exogènes » pour désigner respectivement les Monocotylées et les Dicotylées.

Par ses *Recherches sur l'accroissement des Végétaux* (1821), **Dutrochet** contribua à établir l'ordre réel d'apparition des faisceaux : il montra qu'en opposant l'une à l'autre les deux classes de plantes, sous le rapport de la génération interne ou de la génération externe de leurs parties nouvelles, on ne s'était pas aperçu que l'on mettait en parallèle deux phénomènes tout à fait dissemblables, savoir : l'accroissement du bourgeon des Monocotylédons et l'accroissement en diamètre du système central des Dicotylédons. On comparait la structure primaire des premières à la structure secondaire des secondes !

Par ses observations sur la structure du maïs, **Moldenhawer** (1812) éleva au rang d'unités anatomiques de premier ordre les faisceaux libéro-ligneux bien distincts chez les Monocotylées, moins reconnaissables souvent chez les Dicotylées. Il reconnut que le bois se différencie en direction centrifuge, et le liber en direction centripète.

Dans sa belle monographie des Palmiers, **Mohl** (1830) mit en pleine lumière la structure des faisceaux et leur parcours, chez les Monocotylées et un certain nombre de Dicotylées prises comme termes de comparaison. Il réfuta la théorie de l'endogénie en montrant que chez les Monocotylées les faisceaux se forment du centre vers la périphérie. Il fit voir les ressemblances que présentent, dans leur jeunesse, les faisceaux de toutes les plantes angiospermes. Les recherches complémentaires de **Meneghini**, de **Lestiboudois** et de **Naegeli** eurent pour résultat de corriger ce que présentait de trop schématique le parcours des faisceaux représenté par **Mohl** dans les Palmiers.

Schleiden (1845) distingua les « faisceaux fermés » et les « faisceaux ouverts ». **Falkenberg** (1875 et 1876) et **Guillaud** (1878) s'adonnèrent spécialement à l'anatomie des Monocotylées ; **Lestiboudois** (1848), **Naegeli** (1858), **Hanstein** (1859)

s'occupèrent du parcours des faisceaux chez les Dicotylées. En 1877, **A. de Bary**, dans son *Vergleichende Anatomie der Pflanzen*, coordonna tous les résultats acquis en y ajoutant ceux de ses études personnelles.

L'anatomie des feuilles a fait plus particulièrement l'objet des recherches de **Brongniart** (1830), d'**Areschong** (1878), d'**Haberland** (1881) et de **Briosi** (1882).

Celle des racines a d'abord donné lieu à une grave erreur. En comparant des racines monocotylées avec des racines dicotylées, on vit des différences telles que ces organes semblaient appartenir à des types complètement étrangers l'un à l'autre : c'est qu'on mettait encore en parallèle la structure primaire des unes et la structure secondaire des autres. **Naegeli**, en 1858, découvrit la structure primaire des racines chez les Dicotylées et établit qu'elle est identique à celle des racines chez les Monocotylées. **Van Tieghem** a complété cette importante notion dans son travail sur la racine en 1870. L'origine des radicelles, entrevue par **Naegeli**, a été également précisée par **Van Tieghem** et **Douliot** en 1889. **Schacht** s'est occupé de la coiffe dès 1853, et **Gasparrini** des poils absorbants en 1856. **Th. Irmisch** (1850) a reconnu que certains tubercules sont constitués par des tiges et d'autres par des racines.

Lorsque l'étude analytique fut suffisamment avancée, on put songer à grouper les tissus en se basant sur leur genèse, ce qui est le point de vue morphologique par excellence. Après un premier essai dû à **Mohl**, **Naegeli** (1858) proposa une nomenclature histologique assez compliquée, dans laquelle il distinguait, notamment, des faisceaux communs, des faisceaux propres à la tige et des faisceaux propres aux feuilles. **J. Sachs** ramena tous les tissus à trois systèmes : faisceaux, tissu fondamental, épiderme. **Haberland**, au contraire, délaissant le point de vue morphologique, établit une classification histologique basée sur des considérations physiologiques. **Russow** (1872) schématisa la structure des faisceaux chez toutes les plantes qui en possèdent.

C.-Eg. Bertrand (1880) est l'auteur d'une théorie du faisceau remarquable par sa précision autant que par sa grande portée.

Arrivée à ce point de son développement, l'Anatomie végétale a vu s'ouvrir devant elle un vaste champ d'exploration. L'activité des chercheurs put s'orienter dans diverses directions. Les uns s'efforcèrent de préciser la définition des membres. Des considérations basées sur la constitution des faisceaux et la symétrie de leur disposition permirent à **Van Tieghem** et à **Bertrand** de ramener toutes les parties d'une plante à trois membres : la tige, la feuille et la racine. La définition des membres est essentiellement morphologique et d'une grande netteté. Elle contraste avec celle des organes, qui doivent être envisagés comme résultant d'adaptations, extrêmement nombreuses et diversifiées, des membres primitifs. Malgré les modifications structurales qui résultent du changement de fonction, chaque organe conserve quelques-uns des caractères anatomiques du membre dont il provient : c'est ce qui permet de reconnaître sa valeur morphologique. Un membre est donc « une partie du végétal définie par sa forme et sa structure quelle que soit sa fonction ». Un organe est « une partie du végétal remplissant une fonction déterminée, quelle que soit sa forme » ⁽¹⁾.

D'autres anatomistes s'attachèrent à reconnaître les grands traits de l'architecture végétale. La théorie du phyton de **Gaudichaud** (1833 à 1843), remaniée à diverses reprises, devint la théorie du mériphyte d'**O. Lignier** (1888). Le principe mécanique fut introduit dans l'anatomie végétale par **Schwendener** (1874) ; la polystélie par **Van Tieghem** et **Douliot** (1886), etc.

Un grand nombre d'autres auteurs encore publièrent des monographies anatomiques ayant pour objet, soit une famille, soit un genre. On fut ainsi amené à rechercher si l'anatomie végétale ne pouvait pas, comme l'anatomie animale, fournir d'utiles caractères à la classification. On se heurta immédiate-

(1) BONNIER et LECLERC DU SABLON, *Cours de Botanique*. Paris, 1901, p. 43.

ment à une grave difficulté : les caractères histologiques les plus nombreux et les plus saillants sont en relation avec les conditions de vie assignées à chaque espèce. Au point de vue systématique, il faut les délaissier pour trouver des caractères indépendants du genre de vie. **Naegeli**, en 1858 déjà, avait reconnu l'existence de nombreuses particularités résultant de l'adaptation et un petit nombre d'autres qui ne semblent être liées à aucune condition de milieu. Parmi les nombreux travaux d'anatomie appliquée à la classification, nous n'en pouvons citer que quelques-uns parmi les plus originaux : ceux de **Mirbel** (1810) sur les Labiées, d'**A. Chatin** (1840-1870) sur diverses familles, de **Regnault** (1860) sur les Cyclospermées, de **Van Tieghem** (1866) sur les Aroïdées, de **Duval-Jouve** (1871-1874) sur l'histotaxie des feuilles de Graminées, de **Bertrand** (1874) sur les Gnétacées et les Conifères, de **C. de Candolle** (1879) sur les feuilles de quelques familles Dicotylédones, de **J. Vesque** (1881-1889) sur les Renonculacées, les Capparidées, et sur l'Épharmonisme. Les résultats obtenus jusqu'ici ne sont pas décisifs. Il y a lieu de poursuivre des recherches en vue de la détermination des espèces et de la diagnose des genres et des familles.

Pour mieux reconnaître et apprécier les caractères adaptationnels, il est avantageux de les accentuer ou de les atténuer en modifiant le milieu ambiant. Ainsi est née l'Anatomie expérimentale. Des plantes terrestres ont été cultivées dans l'eau; des plantes de climat humide ont été élevées dans l'air sec, etc. Par ce moyen on a pu constater d'importantes modifications dans les tissus. L'organisme végétal, bien plus plastique que l'organisme animal, est donc susceptible de transformations profondes qui rendent précaire l'existence de caractères anatomiques génériques ou familiaux.

L'anatomie des organes de la reproduction présentant plus de difficultés que celle des organes végétatifs, on comprend qu'elle soit restée en retard. L'existence même

d'organes sexuels chez les plantes était encore contestée du temps de Linné. La nature morphologique des enveloppes florales et des étamines fut relativement assez facile à établir; celle des carpelles, des placentas et des ovules donna lieu à de longues controverses. Ce fut **A.-P. de Candolle** qui, en 1813, démontra que les ovaires pluriloculaires doivent être considérés comme formés par plusieurs feuilles carpellaires repliées sur elles-mêmes et soudées entre elles. Les observations anatomiques sur le pistil par **Van Tieghem** (1867-1872) sont à signaler tout spécialement.

La genèse, la constitution et le développement ultérieur des grains de pollen furent établis par les travaux de toute une série de patients observateurs : **Amici** (1822), **Brongniart**, **Purkinje**, **Mirbel**, **Fritzche**, **Meyen**, **Naegeli**, **Chatin** (1870). Des recherches parallèles furent effectuées sur l'ovule par **R. Brown** (1830), **Mirbel**, **Meyen**, **Cramer**, **Le Monnier** et **Warming** (1878).

Les phénomènes intimes de la fécondation sont du domaine de la cytologie. **Schleiden** en 1837, et **Schacht** en 1850, croyaient que l'extrémité du tube pollinique, qui a pénétré dans l'ovule, devenait elle-même l'embryon. La fusion du noyau mâle avec le noyau femelle a été constatée par **Ed. Strasburger** dans le *Monotropa*. La réduction chromatique qui marque le passage du sporophore au gamétophore a été découverte par le même botaniste (1888 et 1893). Des anthérozoïdes ciliés ont été observés chez certaines Gymnospermes par **Hirase** et **Ikeno** en 1896 et 1898, puis par **Miyake** en 1899. L'existence d'anthérozoïdes immobiles et d'une double fécondation chez les Angiospermes nous a été révélée par **Nawaschine** (1898) et **Guignard** (1899). Enfin, la formation d'embryons adventifs, la parthénogenèse et l'apogamie sont des découvertes récentes.

Comme application à la classification des données anatomiques fournies par les organes reproducteurs, il faut mentionner le mémoire de **Van Tieghem** sur *L'OEuf des plantes*

considéré comme base de leur classification (1901). L'avenir dira ce que l'on peut obtenir dans cette voie.

La connaissance exacte des fruits et des graines a été aussi l'objet de nombreux efforts. **Bernard de Jussieu** (1759) a caractérisé deux grandes classes du règne végétal par le nombre des cotylédons : les Monocotylédones et les Dicotylédones. **J. Gaertner** (1788), **R. Brown** (1825-1840) et bien d'autres ont concouru à l'établissement d'une nomenclature des fruits et des graines.

Le développement histologique de la plantule en germination n'a pas été négligé. Étudiant le passage de la racine à la tige, **Van Tieghem** a ouvert, en 1869, le champ à d'intéressantes recherches qui se poursuivent encore actuellement.

L'étude du développement de l'individu à partir de l'œuf (**Embryogénie**) et celle du développement des organes que la plante continue à former lorsqu'elle est déjà adulte (**Organogénie**) fournissent des données morphologiques de haute importance. **Schleiden**, l'un des premiers, entreprit des recherches sur le développement de l'ovule (1842). **Naegeli** et **Hofmeister** se livrèrent à des investigations embryologiques qui jetèrent un jour nouveau sur les rapports de divers groupes du règne végétal (1844 à 1852).

L'organogénie a été abordée par **Schleiden**, **Duchartre**, **Wigand** et bien d'autres. Il convient de citer tout spécialement **Payer**, qui par ses patientes observations, ses préparations délicates et ses magnifiques dessins, réussit à démontrer qu'au moment de leur apparition, les sépales, les pétales, les étamines et les carpelles se comportent comme les feuilles naissantes (1857). La genèse des organes floraux lui a révélé aussi d'intéressantes particularités dans certaines familles.

Sous l'influence des organogénistes, la théorie des métamorphoses prit un sens plus précis que **J. Sachs**, dans son *Traité*

de *Botanique* de 1868, a défini d'une façon remarquable : « La métamorphose, dit-il, est le développement différent des membres de même nom morphologique, en vue de leur adaptation à des fonctions déterminées. » Métamorphose, adaptation et utilité, ajoute-t-il, désignent un seul et même fait; ce sont des expressions synonymes. Le même membre peut s'adapter aux fonctions les plus diverses et la même fonction peut être remplie par les membres les plus différents. Les dispositions organiques utiles à la plante sont réalisées par les adaptations les plus variées. Il en donne de nombreux exemples et explique pourquoi il y a des organes sans fonction ⁽¹⁾.

Avant 1840, les **Cryptogames** n'avaient guère été considérées qu'au point de vue de leur dénomination spécifique; leur organisation était restée fort obscure. Les *Ptéridophytes* (Cryptogames vasculaires) furent abordées au point de vue morphologique par **Schleiden**, qui, en les comparant aux Phanérogames, voulut les distinguer autrement que par des caractères négatifs, comme on l'avait fait jusque-là.

Bischoff, **Unger**, **Naegeli** apportèrent leur contribution, mais ce fut **Hofmeister** qui réalisa les plus grands progrès dans cette direction (1849 à 1851). Il découvrit ce qu'on a, jusque dans ces dernières années, nommé improprement « l'alternance des générations ». Chez les Fougères, on remarque aisément deux états qui se succèdent régulièrement : dans le premier, il y a formation d'organes sexuels; dans le second, il y a production de spores sans fécondation ⁽²⁾. Dans son état sexué, la plante possède une organisation très simple et une durée de vie très

(1) J. SACHS, *Traité de Botanique*. Traduction française, 1874, p. 176 et pp. 1095 à 1104.

(2) On a reconnu, dans ces dernières années, que chez tous les végétaux (exception faite de quelques types dégradés), le cycle complet de la vie comprend deux phases distinctes: l'une qui commence à la germination de la spore et se termine par la production de gamètes (= cellules sexuelles); l'autre qui va de l'œuf fécondé

courte, tandis que dans son état sporifère, son organisation est beaucoup plus compliquée et sa vie illimitée. Or, chez les Mousses, c'est précisément l'inverse.

Un autre fait de la plus grande importance, qui a été découvert par Hofmeister encore, c'est l'existence de deux sortes de spores chez la Selaginelle et les Rhizocarpées. La microspore produit les anthérozoïdes; la macrospore se développe, après fécondation, de telle manière qu'elle constitue vraiment l'ébauche d'une graine. Ainsi se trouvent reliées, par des types de transition, les plantes ne produisant pas de graines (Cryptogames) et celles qui en produisent (Phanérogames ou Spermaphytes). Dès lors, on put comprendre la véritable valeur morphologique du pollen et de l'ovule. Chaque grain de pollen est une microspore; le sac embryonnaire de chaque ovule est une macrospore; la graine est le début du sporophore qui, chez les plantes supérieures, prend un grand développement, tandis que le gamétophore, chez ces plantes, reste tout à fait rudimentaire. Cette brillante découverte suffirait pour illustrer le nom de Hofmeister. Elle est due à la mise en pratique de la méthode phylogénique, dont on fait généralement honneur à Haeckel à une date ultérieure. On remarquera que cette méthode féconde, qui semble dériver directement de la doctrine darwinienne, a été utilisée par un observateur sagace, plus de vingt ans avant l'apparition de cette doctrine.

Depuis longtemps déjà, les botanistes systématisistes avaient collectionné de nombreuses espèces de *Mousses* et d'*Hépatiques* qu'ils avaient décrites et classées. Leur étude au point de vue

à la formation des spores. La première phase se nomme *gamétophore*, la seconde *sporophore*. On dit aussi gamétophyte et sporophyte, mais il convient de faire remarquer que la terminaison « phyte » serait avantageusement réservée pour les noms tels que Bryophytes (*plantes* qui ressemblent aux Mousses), xérophytes (*plantes* des endroits secs), etc... La terminaison « phore » indique mieux qu'il s'agit de deux portions d'un même cycle, l'une *portant* les gamètes, l'autre *portant* les spores. Il n'y a réellement qu'une seule génération.

purement morphologique, longtemps retardée, fut faite principalement par **Hedwig**, **Mirbel**, **Schimper**, etc...

L'observation des *Algues* fut abordée assez tard. On ne possédait que des connaissances fort vagues sur leur structure et leur reproduction; on admettait même la génération spontanée des espèces microscopiques. Celles qui sont douées de mouvement, comme les Diatomées et les Volvocinées, étaient rangées dans le règne animal. **Agardh**, **Harvey**, **Kützing**, **Vaucher** furent les premiers Algologues vers 1850. **Naegeli** reconnut la sexualité des Floridées et nia celle des autres Algues. **Braun** fit la monographie du genre *Chara*, si remarquable par la complication de ses organes végétatifs et reproducteurs. **Thuret** s'occupa de la fécondation des Fucacées. **Thuret** et **Bornet** reprirent l'étude des Floridées. **Pringsheim** découvrit la reproduction du *Vaucheria*, de l'*OEdogonium* et d'autres Algues d'eau douce.

Avant 1850, on ignorait tout de l'organisation des *Champignons*. Les anciens les croyaient engendrés en terre par la pourriture, ou bien à l'intérieur des arbres et d'autres plantes par l'effet d'une maladie. **Nees**, **von Esenbeck**, **Fries**, **Leveillé**, **Corda**, **Berkeley**, etc... firent connaître un grand nombre d'espèces dont la diagnose reposait sur les caractères extérieurs: leur classification était purement empirique. **Datrouchet** reconnut le mycélium comme appareil végétatif et le distingua de l'appareil sporifère, qui seul avait attiré l'attention. **Ehrenberg** fit des expériences sur la germination des spores et découvrit la sexualité de certaines moisissures. Les frères **Tulasne** s'attachèrent plus spécialement à observer les champignons parasites: la rouille des céréales, l'Ergot du seigle, l'*Ustilago*, le *Péronospora*, etc... **Cohn** étudia le curieux *Pilobolus*. **A. de Bary**, pendant plus de 20 ans, à force de soins et de persévérance, parvint à suivre dans ses cultures le développement d'un grand nombre d'espèces et à débrouiller les faits déroutants, connus sous le nom de polymorphisme des Champignons. Il eut comme continuateur **O. Brefeld**.

L'étude des Algues et des Champignons a amené un résultat bien inattendu : celui d'établir entre l'organisation de ces êtres des ressemblances telles que les Champignons doivent être considérés comme des Algues privées de chlorophylle, profondément dégradées dans toute leur organisation, devenues très souvent apogames, mais pourvues de moyens efficaces de multiplication par conidies et par spores.

Les *Lichens* constituaient autrefois une classe indépendante qu'on plaçait volontiers entre les Algues et les Champignons. **Schwendener** (1867) est parvenu à démontrer qu'un Lichen n'est pas un être unique, mais qu'il résulte de l'association de deux organismes très différents qui vivent en harmonie. Depuis cette étonnante découverte, d'autres exemples de symbiose ont été constatés, dans le règne végétal et dans le règne animal.

Quant aux *Bactéries*, ce sont des organismes tellement simples, au point de vue morphologique, que leurs espèces ne peuvent guère se distinguer que par les caractères chimiques de sécrétions.

Il y a trois quarts de siècle à peine que les botanistes ont commencé, au moyen du microscope, l'examen des végétaux inférieurs. Ils ont découvert un monde nouveau, d'une diversité inouïe, réalisant des séries parallèles ou divergentes suivant lesquelles l'organisation se complique graduellement, et parfois aussi se simplifie par dégradation. Un champ immense est ouvert aux morphologistes, qui auront à préciser encore les rapports qui unissent tous ces êtres entre eux et les rattachent aux végétaux supérieurs, Phanérogames ou Spermaphytes. Cette liaison s'est opérée principalement par des types qui ont disparu et dont il nous faut dire quelques mots.

La **Paléontologie** applique l'observation morphologique aux végétaux qui ont peuplé la terre durant les âges géologiques et qui n'existent plus de nos jours. Leurs empreintes et, mieux encore, leur structure conservée dans la pierre per-

mettent de reconstituer certains types primitifs qui viennent heureusement compléter les séries actuelles et les relier. Tels sont les Sigillaires, les Lépidodendrons, les Calamites, les Sphenophyllum, les Cordaïtes, les Cycado-filicinées, les Bennet-tistes, etc. La voie fut ouverte en 1820 par **Sternberg**, bientôt suivi par **Brongniart**, **Goeppert**, **Corda**, **Unger**, **Grand'Eury**, **Saporta**, et plus récemment par **Renault**, **Zeiler**, **Bertrand** et **Lignier**. Leurs travaux ont établi la succession des différentes flores qui se sont développées aux diverses époques de l'histoire de la Terre.

Alliant la morphologie à la physiologie, l'**Éthologie** constitue une branche d'origine relativement récente. Elle cherche à expliquer l'organographie et l'anatomie par le fonctionnement. C'est l'étude des adaptations ou, si l'on veut, de la manière de vivre, des mœurs de chaque espèce.

Dès 1793, **Conrad Sprengel** reconnut que les fleurs hermaphrodites ne sont généralement pas fécondées par leur propre pollen. Il découvrit le rôle des insectes dans la pollinisation et fit connaître certaines particularités florales qui assurent le croisement entre plantes de la même espèce. Complètement méconnues durant soixante ans, ces observations furent confirmées par **Darwin** (1862), qui les mit en pleine lumière. Dès lors, l'adaptation des fleurs aux insectes ou au vent, les divers procédés de dissémination des graines, les relations des flores avec le sol et le climat, le mode de vie des arbres, des lianes, des épiphytes, des plantes aquatiques, des plantes bulbeuses, etc. furent l'objet d'intéressantes recherches, et la biologie fut dotée d'un chapitre nouveau.

*
* * *

Après avoir rappelé comment la morphologie est née, comment elle s'est développée, nous pouvons nous demander en quoi elle consiste aujourd'hui, comment il faut la définir.

Lorsque la botanique sortit des limites étroites dans lesquelles elle était enfermée autrefois, on comprit que les plantes devaient être envisagées au point de vue de leur organisation (morphologie) et au point de vue de leurs fonctions vitales (physiologie). Une partie de l'organisation est visible extérieurement : c'est l'organographie ou morphologie externe. Une autre partie est cachée à l'intérieur : elle se nomme anatomie ou morphologie interne. L'organographie a été étudiée d'abord ; on y cherchait des caractères propres à la détermination des espèces et à leur classification. L'anatomie a été abordée ensuite : on lui demandait uniquement l'explication du fonctionnement des organes.

Au cours de ces études, tant de faits furent découverts, tant d'idées se firent jour, que les résultats dépassèrent le but que s'étaient proposé les chercheurs. Aujourd'hui, l'organographie n'est plus l'humble servante de la systématique, et l'anatomie n'est plus celle de la physiologie. Organographie et anatomie, intimement unies dans le concept morphologique, constituent une science qui peut être cultivée pour elle-même.

Par morphologie, certains auteurs veulent désigner seulement les caractères extérieurs des organes végétaux ; ils opposent ce terme au terme anatomie. D'autres savants entendent par morphologie, l'organisation des êtres vivants uniquement dans ses rapports avec la théorie du transformisme. Ces deux acceptions particulières du mot morphologie sont trop étroites et me semblent devoir être abandonnées.

On se rend généralement assez bien compte de ce qu'est la physiologie, mais on conçoit mal la morphologie. On est toujours tenté de définir par la fonction : la racine est, dit-on souvent, l'organe de l'absorption, la feuille celui de l'élaboration, le stomate celui de la respiration, etc. Or, la morphologie nous enseigne que d'une espèce à une autre, le siège des fonctions est très variable. L'élaboration peut être réalisée dans le limbe foliaire, dans le pétiole, dans les stipules, dans la gaine,

dans les bractées, le calice, l'ovaire, ou encore dans la tige et les rameaux, parfois même dans les racines aériennes. Le dépôt des réserves alimentaires peut se faire dans des racines tubérisées, dans des tiges aériennes ou souterraines telles que rhizomes et tubercules, dans certaines feuilles constituant un bulbe, dans l'endosperme, l'albumen ou le péricarpe des graines, etc. La fixation à un support s'effectue par des vrilles qui représentent des portions de tiges, de feuilles ou de racines adventives.

Inversement, un même membre peut recevoir les destinations les plus diverses. La tige modifiée dans sa forme extérieure et dans sa structure anatomique devient tour à tour un support, un organe de fixation, d'élaboration, de dépôt, de défense, de propagation, etc. Les stomates servent à la transpiration et à la respiration; quelques-uns d'entre eux permettent l'émission de gouttes d'eau, ou bien, au contraire, l'absorption des produits de la digestion de l'albumen. Dans le règne végétal, les transformations sont particulièrement nombreuses, parce que, liée au sol, la plante doit s'adapter aux conditions du milieu ambiant ou disparaître.

Les adaptations s'accompagnent souvent de modifications si profondes que l'aspect extérieur des organes est complètement transformé. Il suffira d'indiquer ici les rameaux qui simulent des feuilles (cladodes), les calices qui ont la consistance délicate et le brillant coloris des corolles, les racines de certains Palmiers qui sont devenues des épines acérées garnissant la surface de la tige au-dessus du sol, etc.

Sous ces apparences trompeuses, le morphologiste reconnaît les caractères primitifs du membre transformé. D'autres fois, comparant des espèces qui semblent totalement différentes les unes des autres, il découvre des caractères communs qui échappent aux profanes. D'une façon générale, on peut dire que chez les plantes, les différences sautent aux yeux, tandis que les ressemblances sont cachées.

Aug. de Saint-Hilaire a publié, en 1840, des leçons de botanique sous le titre de *Morphologie végétale*. « C'est, dit-il, l'organographie expliquée par les transformations auxquelles sont soumises les parties des végétaux. » Cette définition indique bien comment s'est constituée la science dont nous nous occupons : elle est née de l'observation des caractères extérieurs sous l'influence de l'idée de Goethe : métamorphoses que subissent les organes d'une même plante. De nos jours, cette conception est trop restreinte : l'anatomie et l'histoire du développement des organes font partie de la morphologie. Je ne puis mieux faire que de rappeler les paroles prononcées ici même, en 1883, par notre illustre collègue, le professeur **Ed. Van Beneden** : « La morphologie a pour objet la connaissance de la forme, de la structure et du développement des organismes dans le sens le plus large de ces mots ; son but est d'arriver à l'explication des faits par la constatation des causes prochaines ou éloignées qui les déterminent ⁽¹⁾. »

La théorie de Goethe sur les métamorphoses et celle de de Candolle sur les dégénérescences sont au fond identiques. Elles admettent, l'une et l'autre, l'idée de la constance des espèces ; elles aboutissent au même résultat : la constatation de ressemblances morphologiques entre des parties qui diffèrent physiologiquement. Goethe et de Candolle ont découvert la transformation des organes ; Lamarck a conçu la transformation des espèces. C'est de celle-ci que nous avons maintenant à nous occuper.

Dans la *Flore française* qu'il publia en 1778, **Lamarck** fit pour la première fois l'application d'un procédé qu'il avait imaginé dans le but de faciliter aux commençants la détermina-

(1) **ED. VAN BENEDEN**, *La Biologie et l'Histoire naturelle*. (BULL. DE L'ACAD. ROY. DES SCIENCES, ETC. DE BELGIQUE, 3^e série, t. VI [1883], p. 900.)

tion des plantes. Ce procédé si pratique, et en même temps si parfait, est connu sous le nom de « méthode analytique ou méthode dichotomique ». Il a été utilisé, depuis, dans une foule de flores. Le discours qui sert d'introduction à la *Flore française* contient des considérations qui témoignent d'une critique sévère et judicieuse des idées qui régnaient en botanique à la fin du XVIII^e siècle. Mais c'est dans sa célèbre *Philosophie zoologique* (1809) que Lamarck exposa des conceptions de la plus haute portée. Frappé de l'harmonie qui, dans la nature, existe entre l'organisation de chaque espèce et les conditions de vie dans lesquelles ces espèces se perpétuent, Lamarck chercha à deviner la cause de cet accord. Pour les végétaux, il crut la trouver dans la plasticité de leur organisation, dans ce que nous nommons aujourd'hui leur faculté d'adaptation. Pour les animaux, il chercha à expliquer le développement ou l'atrophie de leurs organes par l'usage ou le défaut d'usage. D'où l'aphorisme : « la fonction fait l'organe ». Dès lors, on pouvait douter de la fixité des espèces et admettre qu'elles dérivent les unes des autres par des modifications de leur organisation. En comparant les êtres vivants entre eux, on constate des « rapports », des traits communs. Pour Lamarck, ces ressemblances indiquent une parenté : elles constituent la base de la classification. Celle-ci résume l'histoire des transformations successives, en un mot l'évolution, comme nous disons aujourd'hui.

Dans le chapitre consacré à l'espèce, l'auteur rappelle les très grandes difficultés que l'on rencontre dans le travail de la détermination. Cela provient du nombre considérable d'espèces qui résultent de l'infinie diversité des conditions de vie. « Quantité de faits, dit-il, nous apprennent qu'à mesure que les individus d'une de nos espèces changent de situation, de climat, de manière d'être ou d'habitude, ils en reçoivent des influences qui changent peu à peu la consistance et les proportions de leurs parties, leur forme, leurs facultés, leur organisation même ; en sorte que tout en eux participe, avec le temps, aux

mutations qu'ils ont éprouvées ⁽¹⁾. » Dans la nature, ces variations sont lentes, mais à l'état domestique et dans nos cultures, nous voyons de nombreuses variétés se produire sous nos yeux et prendre des caractères notablement différents de leurs parents.

Les idées de Lamarck furent si mal accueillies par ses contemporains qu'elles tombèrent dans l'oubli. Plusieurs naturalistes, cependant, furent amenés par leurs études morphologiques à douter de l'immutabilité des espèces et à admettre la notion d'une évolution organique. Les paléontologistes, notamment, en comparant les flores fossiles aux flores actuelles, reconnurent les rapports qui les unissent. Mais ce ne fut qu'un demi-siècle plus tard que Darwin et Wallace rappelèrent l'attention du monde savant sur la théorie du transformisme, en mettant en évidence l'existence d'un facteur méconnu jusque-là : la sélection naturelle résultat de la lutte pour l'existence. Les livres de **Darwin** sur *L'Origine des espèces* (1859) et sur la *Variation des Animaux et des Plantes* (1868) sont connus de tous ceux qui s'intéressent aux sciences biologiques. On sait aussi la puissance de la sélection artificielle et les résultats considérables qu'elle a donnés dans l'amélioration des races cultivées. Je rappellerai seulement qu'on a fait remarquer que s'occupant principalement des espèces domestiquées ou cultivées, l'illustre écrivain n'a pas suffisamment tenu compte de l'action directe du milieu, action qui se manifeste dans les espèces à l'état sauvage. Il le reconnut lui-même dans une lettre à Moritz Wagner ⁽²⁾. C'est donc avec raison que les naturalistes de notre époque ont repris l'étude des adaptations conformément à l'idée fondamentale de Lamarck.

Notre grand mathématicien **Quetelet** (1870) a porté son

⁽¹⁾ LAMARCK, *Philosophie zoologique*, vol. I, p. 62.

⁽²⁾ *Correspondances de Ch. Darwin*, vol. III, p. 459.

attention sur les variations de nombre, de taille, de forme, etc., que présentent les individus d'une même espèce, ou leurs organes considérés isolément. Ces variations, que l'on désigne plus particulièrement sous le nom de fluctuations, peuvent être représentées graphiquement par la « courbe de Galton ». Cette courbe suit les lois ordinaires du calcul des probabilités, conformément au binôme de Newton. L'étude des fluctuations a été poursuivie par divers auteurs, qui ont reconnu leur importance au point de vue de l'amélioration des races cultivées.

Selon la théorie darwinienne, l'évolution se ferait par transformations extrêmement lentes, s'accroissant au cours des générations successives en passant par un grand nombre d'états intermédiaires. Observant de nombreux semis d'*Oenothera Lamarckiana*, H. de Vries (1886) fut témoin de faits nouveaux : variations subites, se répétant à diverses reprises, à plusieurs années d'intervalle ; ils les a désignées sous le nom de « mutations ». Il constata que ces variations sont immédiatement héréditaires, à la condition d'opérer l'autofécondation, c'est-à-dire d'empêcher l'action du pollen des plantes qui ont conservé leurs caractères primitifs, ou qui possèdent d'autres caractères. L'idée de transformations brusques eut immédiatement beaucoup de vogue. Mais les progrès réalisés récemment dans l'étude des hybrides et de leur descendance a suggéré l'hypothèse de la nature hybride de l'*Oenothera Lamarckiana*, ce qui explique, d'une façon simple, les faits observés par de Vries sur les mutations de cette plante ⁽¹⁾.

D'autre part, dans certains cas, il semble que des mutations se manifestent réellement dans la descendance d'individus anormaux. L. Blaringhem a fait, à ce sujet, des expériences curieuses au moyen de graines récoltées sur des individus soumis préalablement à des mutilations. Un trouble provoqué dans la marche

(1) LECLERC DU SABLON, *De la nature hybride de l'Oenothera Lamarckiana*. (REVUE GÉNÉRALE DE BOTANIQUE, t. XXII [1910].)

régulière de la végétation produirait donc l'apparition de formes nouvelles. De ce fait il convient peut-être de rapprocher celui que les horticulteurs ont eu fréquemment l'occasion de constater : apparition de variétés nouvelles dans le semis de plantes exotiques, lorsque, soustraites aux conditions ordinaires de leur existence, elles sont introduites dans nos serres et soumises à des pratiques culturales qui apportent de grandes perturbations dans leur vie. D'autres variétés horticoles ont une origine bien plus mystérieuse : elles ont apparu par mutation de bourgeon. La forme nouvelle est localisée dans un rameau, le reste de la plante mère demeurant indemne.

Dans l'état actuel de la science, tous les naturalistes se sont ralliés à la doctrine du transformisme. Ils admettent l'évolution organique comme un fait, mais ils ne peuvent encore expliquer par quel mécanisme ce fait s'est accompli et continue à s'accomplir. Abandonnant l'idée de la fixité absolue des espèces, ils pensent que les transformations se produisent, soit lentement par variations minimales et continues, s'ajoutant les unes aux autres, soit brusquement par variations intermittentes, mais d'importance plus grande. Ils voient dans la sélection et dans l'hérédité des agents capables de perpétuer quelques-unes des formes nouvelles, à condition que celles-ci soient plus aptes que les anciennes à surmonter les difficultés de l'existence. Mais ce que tout le monde ignore encore, c'est la cause première de la variation, son point de départ, les lois de sa progression.

On peut faire appel à une propriété que posséderaient tous les organismes de réagir lorsqu'ils sont influencés par des actions venant de l'extérieur. Outre ces actions qui s'exercent sur l'individu tout entier durant tout le cours de sa vie, il faut considérer aussi l'acte de la fécondation, dans lequel interviennent deux individus plus ou moins dissemblables. Les conditions dans lesquelles se forme l'embryon sont une cause de variabilité.

L'action perturbatrice du milieu n'est probablement pas seule

en jeu. Dans l'organisme lui-même peut exister une tendance propre à varier, comme si son équilibre morphologique était toujours dans un état d'instabilité. Comparables à un corps lancé dans l'espace et soumis à la loi d'inertie qui l'oblige à continuer son mouvement et à ne le modifier que sous l'influence de causes perturbatrices extérieures, les êtres vivants semblent posséder une activité qui s'exerce à travers les générations successives. On peut leur supposer une évolution propre qui n'est pas causée, mais seulement modifiée, par des agents extérieurs.

Pour trouver la solution de ces problèmes, la science ne connaît qu'une méthode : l'observation et l'expérience. Les chercheurs se sont mis à l'œuvre : ils s'efforcent de saisir le moment de l'apparition de la variation et de la suivre dans la descendance de l'individu qui a varié. De là est née une branche nouvelle : la **Génétique**. On comprendra qu'il est difficile de résumer des travaux à peine ébauchés : les tâtonnements de recherches en cours d'exécution nous obligent à beaucoup de circonspection. Je me bornerai donc à quelques mots concernant les expériences si intéressantes qui ont été tentées durant ces dernières années.

La Génétique date de la fin du XIX^e siècle. Elle a pour but d'établir les lois de la genèse organique. Son étude nécessite des cultures pures, des énumérations et des mensurations exactes, parfois des croisements artificiels en vue de provoquer des modifications de la forme primitive. Par ses recherches sur l'hybridité chez les végétaux (1854-1863), **Naudin** a constaté une série de phénomènes qu'on désigne aujourd'hui sous le nom « d'hérédité en mosaïque ». Il est arrivé à la théorie de la ségrégation des caractères dans les cellules sexuelles des hybrides, théorie qui explique la disjonction que l'on constate souvent dans la descendance d'un hybride.

Le moine autrichien **G. Mendel**, contemporain de **Naudin**, sans rien connaître des recherches du botaniste français, a découvert des lois précises qui président à la transmission

héréditaire. Publiées en 1866, ces lois ont passé inaperçues jusqu'en 1900, époque à laquelle elles ont été redécouvertes simultanément par plusieurs botanistes. Depuis lors, elles ont suscité un ensemble considérable d'expériences, qui ont fait l'objet de discussions fécondes. L'existence de « caractères dominants et de caractères récessifs » était de nature à masquer le fait fondamental de la disjonction des caractères parentaux dans la descendance de l'hybride. Correns (1902) a trouvé dans le *Mirabilis Jalapa* un exemple particulièrement démonstratif de la « loi de dissociation », qui est le fondement de la théorie mendélienne.

Les cas plus compliqués de polyhybrides ont ouvert le champ à des controverses. Les cytologistes ont apporté leur contingent d'observations en fixant leur attention sur le nombre des chromosomes dans le noyau des gamètes (réduction caryogamique). On a cru aussi pouvoir faire appel à l'intervention de la transmission inégale des diastases léguées par les parents.

Un fait qui nous concerne plus particulièrement, au point de vue morphologique, c'est l'apparition, parmi les descendants d'un hybride, d'individus présentant des caractères tout nouveaux, ce que Blaringhem a nommé « hybridmutation ». Parfois, de nombreuses nouveautés, dites « types subordonnés », se manifestent dans la deuxième génération. Dans l'*Alchemilla* et d'autres plantes, l'hybridation déterminerait l'apogamie.

Les travaux des mendélistes, tels que Bateson, Johanssen, Nilsson-Ehle, Baur, Morgan et bien d'autres, promettent d'importantes découvertes dans un avenir assez prochain.

Les résultats des études génétiques sont déjà entrés dans le domaine des applications à l'Horticulture et à l'Agriculture. Louis de Vilmorin a posé le principe de « l'isolement ». Pour obtenir une amélioration rapide, il est nécessaire d'apprécier la valeur de chaque individu séparément et de suivre ses descendants en culture pure, au lieu d'opérer sur un ensemble d'individus forcément hétérogène. Au laboratoire de Svalöf, en

Suède, on est arrivé par cette méthode, dite *pédigrée*, à constituer des « *sortes* » si parfaitement héréditaires, qu'elles ne sont pas susceptibles d'amélioration ni de dégénérescence. C'est dans la descendance de plantes plus ou moins anormales que des individus nouveaux prennent naissance brusquement par mutation : on se trouve ainsi ramené à l'application de certains faits découverts par **H. de Vries** et **Blaringhem**.

En nous indiquant les conditions de l'apparition de certaines formes nouvelles et les lois de leur hérédité, la **Génétique** nous ramène tout naturellement à la notion de l'**espèce**. Cette notion tient une large place dans les préoccupations de ceux qui scrutent le problème de l'évolution, et aussi de tous les naturalistes qui se contentent de déterminer les plantes et les animaux pour en connaître les noms. On sait combien cette détermination est souvent entourée de difficultés. Celles-ci proviennent, généralement, de ce que les individus réunis sous un même nom spécifique ne sont pas entièrement semblables, de sorte que les caractères indiqués par les auteurs ne sont pas toujours réalisés dans les spécimens qu'on étudie.

Il conviendrait, tout d'abord, de donner au terme *espèce* un sens précis. On admet généralement, avec **A.-L. de Jussieu**, que l'espèce est l'ensemble des individus qui se ressemblent plus entre eux qu'à tout autre, et peuvent donner naissance, par génération, à des individus semblables à eux. Cette définition contient deux éléments : un élément morphologique, la ressemblance, et un élément physiologique, la descendance ⁽¹⁾. Quand il s'agit d'individus récoltés à l'état de nature, et c'est généralement le cas, nous ne connaissons ni leurs ascendants, ni

(1) On peut négliger une définition purement physiologique qui a parfois été énoncée en ces termes : « L'espèce est l'assemblage des individus qui peuvent donner entre eux des descendants féconds. » L'expérience a démontré que certains hybrides résultant du croisement de deux espèces admises par tout le monde sont réellement fertiles.

leurs descendants ; nous sommes donc réduits au point de vue morphologique.

La ressemblance n'étant jamais complète, quelle somme de caractères communs faut-il exiger des individus réunis en une même espèce ? Ici se manifestent des divergences de vue considérables. Linné, le premier, sut constituer à l'intérieur des genres établis par Tournefort, des groupes habilement et clairement définis qui sont les espèces que nous qualifions d'espèces linnéennes. Les continuateurs de Linné ont reconnu que ces espèces ne sont pas les termes ultimes de la classification : elles sont susceptibles de subdivisions en groupes naturels plus petits qu'on a voulu désigner sous le nom d'espèces élémentaires. Jordan a poussé si loin le démembrement des espèces linnéennes que dans le seul *Draba verna* L., il prétendit reconnaître plus de 200 espèces élémentaires. Jordan eut de nombreux imitateurs, si bien qu'aujourd'hui les genres qui ont fait l'objet de grandes monographies sont tellement embrouillés que les déterminations ne peuvent être faites que par des spécialistes !

Pour remédier à cet état de choses, on a pensé recourir à l'expérience. Jordan lui-même avait cultivé les espèces qu'il décrivait et avait reconnu qu'elles se perpétuaient par graines ⁽¹⁾. D'autre part, les recherches entreprises au point de vue génétique ont déjà fourni des résultats importants. En suivant des cultures faites suivant la méthode pédigrée, on a constaté que les espèces dites élémentaires sont, elles-mêmes, constituées de

(1) Il est à remarquer que le *Draba verna* L. est autogame. Par ce fait, les moindres caractères sont transmis par graines, à peu près comme ils le seraient par boutures. Il en est de même chez le *Capsella Bursa-pastoris* L., le froment, le pois, le haricot, beaucoup de *Hieracium*, etc... On cite toujours le *Draba verna* L. comme preuve de la fixité des caractères dans les espèces dites élémentaires. Cette fixité se conçoit facilement comme une conséquence de l'autogamie ! Ce qu'il faudrait connaître, c'est l'origine de ces dites espèces. Jordan croyait à leur existence à l'état de nature depuis l'origine des choses ; les auteurs modernes, au contraire, sont portés à admettre leur apparition au milieu des cultures exécutées par Jordan de 1844 à 1874. Cette question appelle de nouvelles recherches.

« lignées » possédant des caractères constants. (Ces lignées correspondent aux « sortes » obtenues au laboratoire de Svalöf.) Dès lors, le terme ultime de la classification serait reporté aux lignées. Mais on peut se demander s'il faut s'y arrêter, ou s'il ne faut pas aller plus loin encore, et admettre comme terme ultime l'individu. L'espèce ne serait pas le plus petit groupe d'organismes doués de caractères héréditaires. Le terme espèce s'appliquerait à trois degrés : espèce linnéenne, espèces jordanienne et lignée. Ces trois degrés, comme les classes, les familles, et les genres, constitueraient simplement des échelons de la classification. Tous ces échelons possèdent des caractères distinctifs de plus en plus ténus, habituellement constants. Ces caractères sont tous, cependant, susceptibles de varier, soit par transformation lente, conformément aux théories de Lamarck et de Darwin, soit par mutation brusque, d'après de Vries.

De ce qui précède, on peut tirer les conclusions suivantes :

1. — Il faut bannir de la notion de l'espèce toute idée de constance absolue.

2. — L'espèce n'est pas le terme ultime de la classification.

3. — Dans la pratique, on désignera par espèces les groupes linnéens et ceux de valeur égale constitués plus récemment ; on leur conservera la nomenclature binominale de Linné.

4. — Quand on voudra préciser davantage, on envisagera les espèces jordanienues qu'on dénommera en ajoutant un troisième nom aux deux précédents.

5. — Si, exceptionnellement, une plus grande précision encore est nécessaire, on fera usage d'un quatrième terme pour désigner les lignées.

6. — Quant aux individus d'élite qu'on propage par bouture ou greffe, on peut continuer à les désigner comme on le fait aujourd'hui en Horticulture.

7. — Les espèces de Linné et celles qui leur sont équivalentes ne pourraient être abandonnées sans compromettre tout

l'édifice de la Phytographie : elles doivent être maintenues, mais peuvent être subdivisées en groupes d'ordre inférieur, dits des espèces jordaniennes et lignées. Il ne peut donc pas être question de substituer les espèces dites élémentaires aux espèces linnéennes, comme on le fait dans certains ouvrages.

8. — Pour chaque espèce, Linné donnait, en peu de mots, ce qu'il nommait « les différences », c'est-à-dire les caractères qui permettent de reconnaître l'espèce, en la distinguant des espèces voisines. Les modernes ont remplacé ces courtes diagnoses par de longues descriptions qui n'indiquent nullement les caractéristiques. Il y a lieu d'en revenir à la méthode du grand phytographe. « Les descriptions isolées et surtout non comparatives, devraient être absolument proscrites ; l'heure est venue de coordonner ⁽¹⁾. »

9. — Tout ce qui précède s'applique, *mutatis mutandis*, aux genres établis par Tournefort et aux genres de même valeur créés ultérieurement, en évitant leur démembrement.

10. — La classification naturelle, avec son ensemble de divisions et de subdivisions, se prête avantageusement à une désignation de plus en plus précise d'un organisme quelconque : en présence d'une plante nouvelle pour lui, un débutant dira : c'est une *Crucifère* ; un floriste ajoutera : c'est un *Draba*, c'est le *Draba verna* L. ; un spécialiste consulté pourra affirmer que c'est le *Draba verna* L. *elongata* Jord.

L'adoption de ces règles est de nature à conserver l'observation morphologique comme base de la classification, tout en donnant à l'expérimentation le rôle qui lui revient.

Dans cet aperçu sommaire, je ne puis, cependant, me dispenser de mentionner la nécessité qu'il y a de tenir compte de l'existence de races, de variétés individuelles, d'hybrides et de

(¹) A. LAMEERE, *Discours d'ouverture du premier Congrès international d'Entomologie*.

métis qui se rencontrent, même à l'état de nature. Il y a aussi de simples « accommodats », dans le sens que M. J. Massart donne à ce terme pour désigner, très heureusement, l'adaptation passagère des individus, en opposition avec l'adaptation permanente de l'espèce elle-même.

Quant à l'origine des espèces, il faudra faire la part de ce qui revient aux transformations, lentes ou brusques, sous l'influence du milieu, du croisement, ou d'une tendance intérieure à une évolution dans des directions déterminées.

Le problème des espèces est donc encore fort complexe. Pour l'aborder dans de bonnes conditions, il faut évidemment des descriptions bien comprises, une nomenclature précise et stable. Il faut surtout ne pas rendre inutilisables les travaux réalisés par nos grands auteurs classiques, en bouleversant leur œuvre, en créant une synonymie qui amène la confusion.

*
* * *

Dans les pages qui précèdent, nous avons cherché à retracer l'histoire de la morphologie végétale en indiquant comment cette science s'est détachée des autres parties de la botanique; comment l'idée première s'est développée; quels furent les progrès réalisés en moins d'un siècle et demi; quelle est l'importance des problèmes qui se posent aujourd'hui, et quels sont les efforts à faire pour les résoudre.

Observée d'abord pour permettre la détermination des espèces et leur classification, l'organisation des plantes fut ensuite étudiée en vue d'y trouver l'explication des phénomènes vitaux. De nos jours, la morphologie est une science indépendante de la systématique et de la physiologie : son domaine ne cesse de s'agrandir; des horizons nouveaux se découvrent. Il nous a paru utile de « faire le point », comme le navigateur qui veut se rendre compte du trajet parcouru et de la direction à imprimer à son vaisseau. Partant de l'époque de Linné, nous avons vu Goethe, A.-P. de Candolle et Schimper établir les

fondements de la morphologie végétale. Ses progrès, dès 1840, se manifestent dans l'Organographie, la Cryptogamie, l'Anatomie, la Paléontologie, la Classification. Dans tous ces domaines les faits nouveaux contredisent les idées anciennes touchant l'uniformité de l'organisation des plantes, l'autonomie des espèces et la constance de leurs caractères. Des rapports de continuité et de dépendance s'imposent là où l'on ne voyait jadis que discontinuité et indépendance. Dès lors, les théories transformistes retiennent l'attention : l'adaptation de Lamarck, la sélection naturelle de Darwin, la mutation de de Vries. La morphologie végétale a donné un sérieux appui à ces théories. Elle en a reçu en retour une lumière qui fit voir les enchaînements et fournit l'explication des faits antérieurement constatés par une patiente analyse.

Aujourd'hui l'évolution est admise comme un fait par tous les naturalistes, mais les facteurs qui ont déterminé ce fait, le mécanisme même de la transformation organique, sont à découvrir. Pour y parvenir, la morphologie met en œuvre diverses méthodes et applique certaines idées directrices.

Rappelons-les brièvement :

L'anatomie comparée précise l'organisation des grands types réalisés dans la série végétale, depuis les êtres unicellulaires peu différenciés jusqu'à ceux qui présentent le maximum de complication. Elle cherche les modifications que chacun de ces types peut présenter dans les diverses espèces d'un même genre ou d'une même famille.

L'observation des stades du développement de l'embryon et des organes de la plante adulte constitue un mode d'investigation extrêmement précieux : « Voir venir les choses est le meilleur moyen de les expliquer », affirme Turpin. « L'ontogénie répète la phylogénie », ajoute de Serres.

La comparaison des organismes actuels avec ceux des âges géologiques fait voir la grandeur des transformations opérées dans le temps. Elle fait connaître l'existence de types de transition qui n'existent plus dans la Nature actuelle.

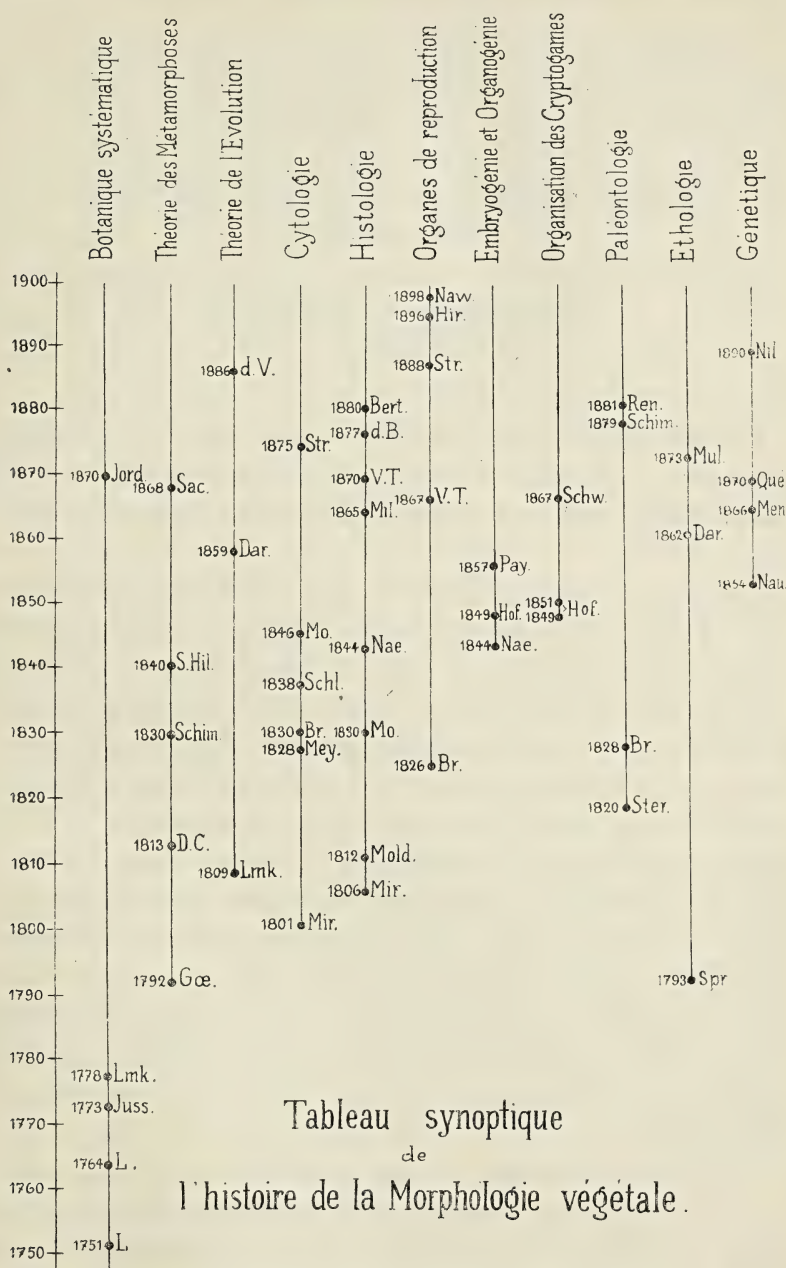
Toute organisation est le résultat de l'action combinée de divers facteurs : les uns conservent et déterminent des ressemblances héréditaires ; les autres modifient et donnent naissance à des différences.

Les ressemblances trahissent la parenté. Il y a lieu, cependant, de faire une restriction dans les cas de convergence. Certains organismes, en effet, présentent des caractères communs résultant d'une adaptation à un même milieu. C'est ainsi que les plantes aquatiques possèdent toutes certaines particularités de structure qui dépendent de leur genre de vie. D'ordinaire, les différences sautent aux yeux, tandis que les ressemblances sont cachées. C'est au morphologiste qu'il appartient de découvrir les ressemblances et de préciser leur signification.

Les différences peuvent provenir de deux sources : de l'influence modificatrice des agents extérieurs qui déterminent l'adaptation, et de la tendance propre de l'organisme à évoluer dans le temps. Les progrès de la morphologie détermineront ce qui revient à l'une et à l'autre de ces deux causes.

La Génétique nous fait assister à l'apparition même des variations. Des expériences bien conduites nous apprendront les conditions de leur hérédité.

La stricte application de ces méthodes et de ces idées a déjà fait découvrir certains faits précis et en a donné l'explication. Lorsque les lois de la nature sont suffisamment connues, l'homme peut diriger leur action et obtenir des résultats conformes à ses vues. En ce qui concerne la Botanique, l'amélioration des plantes cultivées nous en fournit de nombreux exemples. Inséparable de l'idée de changements, la notion du temps est également inséparable de l'idée d'évolution. Celle-ci régit donc toutes choses : les choses humaines, comme les choses de la nature. Dès lors, on peut se demander si une humanité plus instruite des lois de l'évolution ne pourrait pas se guider elle-même dans les voies de la Raison, de la Justice et du Progrès.



PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — Quelques réflexions
sur la matière.

Lecture faite par M. TH. DE DONDER,
correspondant de la Classe.

L'étude de la matière, de ses mouvements, de ses aspects successifs, de ses rapports avec le milieu environnant, comprend divers stades; nous nous proposons de les passer rapidement en revue.

Considérons un corps; par exemple : un bloc de glace, un verre d'eau ou un litre de vapeur. Ce qui nous frappe tout d'abord, c'est l'état de ce corps : solide, liquide ou gazeux. Mais il s'agit là d'une qualité qu'il est impossible d'exprimer, à tout instant, au moyen d'un nombre. Pour caractériser un corps, pour pouvoir le suivre à travers les divers épisodes de son existence, nous le munissons d'un signalement : *sa masse*. Divisons ce corps en portions aussi petites que l'on voudra, au moyen de surfaces arbitraires, purement géométriques. La masse de chacune de ces particules servira encore de signalement; l'invariance de la masse d'une portion quelconque d'un corps, pendant son mouvement et ses transformations, s'appelle *la continuité du mouvement de la matière*. Ce mode de continuité, pendant les transformations de la matière, caractérise *la mécanique*.

Ainsi, la mécanique, ou la dynamique des corps solides, étudiera les mouvements des corps matériels qui laissent, en outre, invariantes les distances de deux quelconques des points pris à l'intérieur de chacun de ces corps. Les corps solides de la dynamique jouent un rôle fondamental en mécanique céleste.

L'hydrodynamique s'occupera d'abord du mouvement des liquides, c'est-à-dire des corps matériels à volumes invariants; puis elle étudiera les mouvements des fluides en général. Deux cas particuliers importants sont à signaler : les fluides de la capillarité et les fluides infiniment peu déformables de l'élasticité.

En dynamique, on tient compte de l'influence du milieu dans lequel le corps se meut, en le baignant dans un champ de forces. Celui-ci rétablit l'unité dans l'ensemble des phénomènes. Grâce aux équations canoniques de Hamilton, matière et champ de forces sont fusionnés en un champ énergétique défini par la fonction de Hamilton.

Dans de nombreux problèmes que pose la matière, la méthode mécanique que nous venons d'exposer apparaît comme insuffisante. Ainsi, quand deux gaz différents se propagent l'un dans l'autre par diffusion, il sera extrêmement difficile de suivre, dans son mouvement, une portion aussi petite que l'on voudra d'un de ces gaz, à moins d'admettre (et l'impénétrabilité de la matière nous le défend) que deux masses différentes puissent se trouver, au même instant, dans un même volume.

Il sera plus commode de supposer que la matière est formée de parties discrètes appelées *molécules*. Le signalement de la molécule sera : *sa masse*. Un fait nouveau se présente ici : dans la matière continue de la mécanique, les portions de masse, prises dans le corps, étaient arbitrairement petites; cette fois, la masse de la molécule est un invariant imposé pour la nature du corps considéré. Chacune de ces molécules sera un corps matériel, à mouvements continus, et son étude particulière relèvera aussi de la mécanique; elle sera faite par le *spectateur moléculaire* : c'est un des spectateurs subtils de Poincaré ou l'un des démons de Maxwell.

Le signalement de la molécule, se réduisant à sa masse, sera-t-il suffisant? La réponse dépend essentiellement de l'expérience. Si deux molécules, ayant même masse, peuvent se rem-

placer l'une l'autre dans les phénomènes où elles manifestent leur existence, la réponse sera affirmative ; au contraire, si leurs rôles ne sont pas permutables, il faudra compléter la carte d'identité de ces deux individus : sinon, on s'exposerait à de graves méprises.

L'étude des cristaux, des solutions, des réactions physico-chimiques a montré qu'il sera nécessaire de fournir des renseignements complémentaires concernant la molécule : outre sa masse, on donnera parfois sa forme extérieure. Mais c'est là une qualité complexe, difficilement accessible, souvent variable, et insuffisante en général.

Abandonnons la molécule continue et construisons-la au moyen de matériaux plus petits : *des atomes* ; à chacun de ces atomes, attachons un invariant : *sa masse*.

Tout de suite, la même question vient à l'esprit : cette masse atomique sera-t-elle suffisante pour éviter de nouvelles confusions regrettables ? D'autre part, le nombre des individus atomiques différents ne sera-t-il pas trop grand pour qu'on puisse les suivre avec succès au cours de leurs pérégrinations ? La fécondité étonnante de la conception atomique dans l'étude des phénomènes physico-chimiques fournit la réponse à ces questions. Rappelons que le nombre des individus atomiques différents à faire intervenir dans les innombrables réactions n'atteint même pas la centaine. Dans le drame chimique, tout acteur atomique pourra être remplacé par un autre, pourvu qu'ils aient même masse.

Dans les *transformations physiques*, la molécule conserve sa personnalité ; le spectateur moléculaire la voit comme un corps matériel, en mouvement continu. Par contre, au cours des *transformations chimiques*, la molécule perd ce caractère d'unité et de continuité. *Le spectateur atomique* voit le mouvement continu des atomes ; des molécules disparaissent, d'autres se forment. En calculant des moyennes relatives aux quantités de mouvement, aux énergies cinétiques, etc., des molécules et des

atomes, on trouve certaines relations vérifiables par l'expérience; cette statistique permet donc de passer, des spectateurs moléculaire et atomique, à l'observateur humain.

Les deux principes fondamentaux de la thermodynamique ont permis à Gibbs de construire une fonction (le potentiel thermodynamique) dont découlent toutes les lois de la physico-chimie. Il a fait pour le domaine moléculaire et atomique ce que Hamilton avait réalisé pour le domaine mécanique.

En résumé, les phénomènes mécaniques s'expliquent par les mouvements continus des corps matériels, les phénomènes physiques par les mouvements continus des molécules, les phénomènes chimiques par les mouvements continus de l'atome. L'identification des individus se fait toujours au moyen d'un invariant massique. Ce signalement sera complété en cristallographie par la forme invariante de la molécule et par la structure du corps : son réseau. En chimie, les états allotropiques, les isomères nécessiteront un renseignement complémentaire relatif à la structure de la molécule composée d'atomes. L'interprétation de divers phénomènes optiques, tel le pouvoir rotatoire de certaines solutions, exigera une nouvelle indication concernant la forme de l'atome lui-même.

La variété des corps matériels est infinie. Grâce à la notion de la molécule, ces corps apparaissent comme des agglomérats ou ensembles de molécules pures, bien définies; mais le nombre des espèces moléculaires connues est déjà extrêmement considérable, et, de jour en jour, la synthèse chimique en crée de nouvelles. Toutes ces espèces moléculaires se réduisent à des ensembles d'atomes; le nombre des espèces atomiques est encore très restreint, inférieur à cent. Mais que nous réserve l'avenir? Ce nombre des espèces atomiques ne va-t-il pas croître indéfiniment? Sera-t-il possible de créer de nouvelles espèces atomiques? Enfin, parmi les espèces atomiques réalisées dans la Nature, se trouvera-t-il des atomes de même masse atomique, se révélant à nous par des phénomènes pour lesquels leur rôle ne serait

pas équivalent? Serons-nous tout à coup obligés d'abandonner l'atome continu, pour le remplacer par un assemblage d'autres êtres continus? Et alors, quel sera le signalement de ce nouvel élément ultra-atomique? — L'étude attentive des solutions conductrices de l'électricité, de l'électrolyse et de la radioactivité a montré que deux atomes de même masse atomique ne peuvent pas toujours être considérés comme identiques.

Une molécule ou un atome sera dit *neutre* si sa charge électrique est *nulle*. Si un atome ou une molécule neutre se scinde en deux, les parties porteront des charges électriques égales et de signes contraires, en vertu de la conservation de l'électricité; nous obtenons ainsi un ion positif et un ion négatif.

L'électricité est formée d'électrons positifs et négatifs (*). L'électron positif au repos est caractérisé par sa masse m_0 et sa charge élémentaire $+e_0$; l'électron négatif au repos a une masse environ 1,830 fois plus petite et une charge électrique élémentaire égale à $-e_0$.

Il en résulte que la charge d'un ion positif est un multiple entier de $+e_0$ et que la charge d'un ion négatif est aussi un multiple entier de $-e_0$.

Quelle sera la composition des atomes en électrons positifs et négatifs? La formule électronique d'un atome déterminera-t-elle sans ambiguïté cet atome? La réponse est négative, car deux atomes ayant même formule électronique se manifestent souvent à nous de façons très différentes; dans l'analyse spectrale, par exemple. D'autre part, la masse *varie* pendant son mouvement, d'après les théories de la relativité, confirmées par les expériences sur les rayons cathodiques. Le signalement de l'atome devra donc être complété; il comportera la connaissance de la

(*) Les fluides électriques ont été étudiés, comme la matière, dans leurs mouvements *continus*, et ont fourni ainsi les lois régissant une foule de phénomènes, tels que l'équilibre électrostatique, la conductibilité, etc.

structure de l'espèce atomique considérée. Rutherford suppose que tout atome comprend un *noyau* et une *couronne*. Le noyau est formé d'électrons positifs et d'électrons négatifs, et sa charge totale est toujours positive ou nulle.

La couronne est composée d'électrons négatifs, décrivant des trajectoires plus ou moins simples (circulaires, elliptiques, etc.) autour du noyau. La couronne est donc toujours électrisée négativement; on peut cependant imaginer un atome-limite se réduisant à un noyau dépourvu de couronne.

La charge totale du noyau exprimée en charges électriques élémentaires e_0 est un nombre *entier* appelé le *nombre atomique*. Remarquons que le nombre atomique de l'atome-limite sera zéro; ceux de l'hydrogène, de l'hélium, du lithium seront respectivement 1, 2, 3, ... Le noyau de l'atome d'hydrogène ne comprenant qu'un électron positif, il sera naturel d'identifier cet électron positif avec l'ion positif d'hydrogène.

Les divers atomes ayant même nombre atomique sont dits *isotopes*; le nébulium serait un isotope de l'hélium.

Un atome neutre ayant, par définition, une charge totale nulle, il en résulte que la charge de son noyau est égale et de signe contraire à la charge de sa couronne, et que celle-ci comprend un nombre d'électrons négatifs égal au nombre atomique de cet atome. Ainsi, la couronne de l'atome neutre d'hydrogène est formée par un seul électron; celle de l'hélium en comprend deux.

En général, le noyau (positif) occupe une très petite place dans l'atome. On admet aussi que les dimensions de l'électron positif sont beaucoup plus petites que celles de l'électron négatif. La combinaison de deux électrons de polarités différentes, dans un même noyau, formera un *doublet*. Celui-ci sera encore de dimensions très petites comparativement à la couronne, et de charge nulle. Dans les limites actuelles de précision de nos expériences, ces doublets seront difficilement décelables.

Quels sont les phénomènes qui nous serviront de guides dans la structure de l'atome?

Ce sera tout d'abord la masse atomique. Le noyau comportera un nombre d'électrons positifs égal au nombre entier le plus proche de la masse atomique de l'atome, en prenant comme unité de masse celle de l'atome d'hydrogène.

Le nombre des électrons qui se meuvent dans les régions les plus extérieures de la couronne, c'est-à-dire les plus éloignées du noyau, sera égal à la *valence* de l'atome. Ce sont les électrons de valence. En considérant des couronnes de plus en plus complexes, mais renfermant le même nombre d'électrons de valence, on obtient une explication, admirablement simple, de la périodicité si importante de la série de Mendelejeff. Enfin, le spectre émis par le gaz de l'espèce atomique considérée fournira des renseignements plus détaillés concernant la structure de la couronne.

On admet, en général, que celle-ci est déterminée par le nombre atomique. Il en résulte que les isotopes auront des couronnes de même structure; ils auront donc même valence, et toutes les propriétés qui résultent de l'activité de cette couronne seront aussi les mêmes.

Rutherford, à qui est dû ce modèle atomique, suppose, en outre, que les attractions et les répulsions entre électrons obéissent à la loi de Coulomb ⁽¹⁾. De là ces systèmes dynamiques qui présentent tant d'analogie avec notre système solaire. Dans l'hydrogène, le rôle du soleil sera tenu par le noyau positif, et l'unique planète de ce système sera ici un électron négatif. La théorie mathématique de cette conception atomique a été faite, la première fois, par Bohr.

L'atome nous apparaît donc comme un mécanisme électromagnétique complexe, dans lequel règne la division du travail. Dans cet organisme, certains électrons serviront à accomplir des

(1) Cette loi cesserait d'être applicable pour des distances plus petites que 3.10^{-13} centimètre. (Voir Lecture de Sir E. Rutherford [Proc. R. Soc. MATH. AND PHYS. SC., 3 juin 1920].)

phénomènes physico-chimiques, d'autres à envoyer des radiations infra-rouges, lumineuses, ultra-violettes, röntgeniennes; d'autres, enfin, qui se trouvent dans le noyau, interviendront dans les phénomènes radioactifs, c'est-à-dire dans l'élaboration des rayons a , α , b , β , γ et, peut-être, bien d'autres encore inconnus.

Dans la conception atomique de Rutherford et de Bohr, les électrons qui constituent l'atome forment un système *fermé*, ne rayonnant pas d'énergie électromagnétique. Or, cette hypothèse est contraire aux lois de l'électrodynamique classique. D'autre part, l'atome expulse ou absorbe l'énergie par portions ou quanta bien déterminés, et cela, au moment où un des électrons de la couronne déraile brusquement, pour décrire une nouvelle trajectoire. C'est en vain qu'on a tâché de concilier les anciennes théories électromagnétiques avec ce mécanisme intra-atomique.

Pour rétablir l'harmonie, il sera peut-être indispensable de considérer les quanta d'énergie comme un aspect particulier d'un *sous-atome* ou *ultra-atome*. Ainsi, le vide du corps noir renfermerait un nombre considérable, mais fini, d'ultra-gaz parfaits formés de ces diverses espèces de sous-atomes. Les électrons positifs et négatifs ne seraient que des molécules très complexes de ces ultra-atomes, et l'état stationnaire du corps noir serait identique à l'équilibre ultra-chimique entre les électrons et les sous-atomes. L'ultra-vide ou l'éther, dans l'état actuel de la science, ne commencerait qu'au delà des ultra-atomes; c'est à cet ultra-vide que s'appliqueraient les équations électromagnétiques de Maxwell-Lorentz. La composition initiale du mélange des ultra-gaz parfaits et des électrons serait fournie par les méthodes statistiques de Maxwell, de Boltzmann et de Gibbs. La loi de Planck, fournissant la répartition des énergies dans le rayonnement du corps noir, serait une forme asymptotique de la loi de Guldberg et Waage.

De même, à l'intérieur d'un atome, les électrons et les ultra-atomes réagiront entre eux ; il en résulte que l'entrée ou la sortie d'un ultra-atome ou d'un électron modifiera plus ou moins profondément la composition de cet atome ; nous dirons, par définition, que les atomes qui ne diffèrent entre eux que par un ou plusieurs ultra-atomes sont des *isomères* d'un même atome, et que les atome qui proviennent d'un atome neutre, après expulsion d'un ou plusieurs électrons de la couronne, sont des *ions de cet atome*.

Chaque espèce sous-atomique peut être caractérisée, en première approximation, par son spectre réduit à une seule raie, celle de fréquence maximum ; cette fréquence sera désignée par ν . Le contenu énergétique ⁽¹⁾ de ce sous-atome sera, avec la même approximation, égal à $h\nu$, en représentant par h la constante universelle de Planck.

Un sous-atome peut se décomposer en sous-sous-atomes ; mais ceux-ci, à cause de la faiblesse de nos moyens d'investigation, sont compris dans ce que nous appellerons l'*ultra-vide* ou l'*éther*. Les sous-atomes manifestent leurs divers modes d'action par l'intermédiaire de cet éther, tout comme un obus qui explose se révèle à nous par les vibrations de l'air. Ce sont ces sous-sous-atomes qui sont triés, puis rassemblés, dans l'analyse spectrale, et qui sont soumis aux lois de l'électromagnétisme de l'ultra-vide. Bien entendu, ces lois doivent tenir compte de la déformation de l'espace-temps, d'après la relativité générale ⁽²⁾, et surtout du lien établi, par Poincaré et par Einstein, entre la matière et l'énergie. La masse en mouvement cesse d'être invariante ; tout se passe comme si les molécules et les atomes se combinaient avec les ultra-atomes. On sait qu'en tenant compte de la variation de la masse électronique, Sommer-

⁽¹⁾ Notre théorie se raccorde ici à celle de J. PERRIN. (*Atomes et Lumière*, article paru dans LA REVUE DU MOIS, 10 février 1920.)

⁽²⁾ On voit qu'il existe diverses espèces de la relativité, suivant le vide considéré.

feld a pu expliquer la structure *détaillée* de certains spectres. — Il en est de même des électrons ; ainsi, dans le rayonnement β , tantôt l'électron négatif se combine avec les ultra-atomes, tantôt il se dissocie en ultra-atomes. La dissociation complète d'un électron négatif, pris au repos, fournira une raie placée à l'extrême limite des rayons γ . Lorsqu'un atome se désagrège, certains électrons négatifs, qu'il expulse, se décomposeront et fourniront les rayons γ observés.

Les diverses espèces sous-atomiques pourront être considérées, en première approximation, comme étant des agglomérats d'éléments *identiques* ; l'action de chacun de ces éléments est mesurée par la constante universelle h de Planck. Cette action élémentaire est *invariante* dans le mouvement des sous-atomes ; elle est aussi *invariante* pour tous les spectateurs de la relativité générale, autrement dit, c'est un *absolu universel*.

Dans l'état actuel de la science, l'espace-temps et l'action élémentaire h sont donc les deux éléments ultimes et absolus du Monde. Celui-ci comprend deux parties : l'une continue et renfermant, par essence, tout ce qui est indiscernable par le *spectateur ultra-atomique*, l'autre discontinue et pouvant se construire au moyen de l'élément invariant de Planck.

Reportons nos pensées sur les phénomènes, encore si mystérieux, de la vie, et demandons-nous si le Monde construit par les physiciens est assez vaste et assez délicat pour nous faire comprendre toutes les manifestations de la matière organisée. Certaines fonctions des êtres vivants se classent d'elles-mêmes dans l'étude de la matière telle que nous venons de l'esquissér. Ainsi, dans la respiration, on observe successivement l'écoulement de l'air, le passage osmotique des molécules d'oxygène et la fixation de ses atomes, enfin, la libération des électrons et des sous-atomes dans le sang.

Trouvera-t-on une gradation analogue dans les phénomènes du système nerveux ? Le fonctionnement des organes des sens permet de supposer qu'il en est bien ainsi. L'activité psychique

se développerait suivant le même schéma que l'activité physique; elle pourrait aussi en être le prolongement sous une forme ultra-subtile et de plus en plus déliée.

Pareille synthèse se laisse à peine deviner dans les lointains horizons de la Science; sans doute, les combats à livrer seront nombreux et rudes. Mais les découvertes géniales des Lorentz, des Planck, des Einstein, qui nous ont révélé, en ces dernières années, les mondes des électrons, des quanta et de l'espace-temps, sont les magnifiques signes précurseurs d'une victoire finale.

Alors sera réalisé le « connais-toi toi-même » de Socrate; les hommes se respecteront, parce qu'ils auront compris la splendeur de la pensée. L'amour de la vérité les unira, les élèvera. La Nature entière leur parlera, et ils écouteront, dans l'extase, ses harmonies et ses lois éternelles devenues nombres.

PROCLAMATION.

PRIX CHARLES LEMAIRE.

Deuxième période (1913-1920).

Le prix de 1,400 francs est décerné à MM. A. WILLAME et H. CHENU, ingénieurs à Schaerbeek, pour leur *Étude sur les fondations par empâtements*.

PRIX ÉDOUARD MAILLY.

Sixième période (1912-1919).

Le prix de 1,000 francs est décerné à M. G. VAN BIESBROECK, astronome adjoint à l'Observatoire royal de Belgique, à Uccle (actuellement attaché à l'Observatoire Yerkes de l'Université de Chicago), pour l'ensemble de ses travaux.

PRIX LOUIS MELSENS.

Quatrième période (1912-1920).

Le prix de 1,500 francs est décerné à M. OCTAVE DONY-HÉNAULT, correspondant de l'Académie, pour ses ouvrages : *Principes et applications de l'électrochimie*, et *Contribution expérimentale à l'étude du chauffage électrique*.

PRIX LEO ERRERA.

Troisième période (1912-1914).

Le prix de 1,800 francs est décerné à feu M. MAURICE HERLANT, agrégé et assistant à l'Université libre de Bruxelles; une mention très honorable est accordée à M. KUFFERATH, directeur du Laboratoire communal de Bruxelles.

PRIX ÉMILE LAURENT.

Quatrième période (1911-1914).

Le prix de 900 francs est décerné à M. L. HAUMAN, professeur de botanique à la Faculté d'Agronomie de Buenos-Ayres.

PRIX JEAN-SERVAIS STAS.

Conformément à la proposition du Comité qui a publié les œuvres de J.-S. STAS, un exemplaire de celles-ci est offert à M. Ch.-J. GULISSEN, étudiant à l'Université de Liège, qui a obtenu le diplôme légal de docteur en sciences chimiques avec la plus grande distinction.

FONDATION AGATHON DE POTTER.

Les subventions suivantes ont été accordées :

500 francs à la *Société Zoologique de Bruxelles*, pour la publication des Tables de ses *Annales*, à l'occasion de son cinquantième anniversaire;

4,000 francs à M. le D^r POMA, pour lui permettre de participer à la mission officielle chargée d'aller étudier sur place les possibilités de création d'un laboratoire biologique au Congo et y récolter du matériel scientifique tant zoologique que botanique;

4,000 francs à M. J. DE SMEDT, docteur en sciences, à Louvain, pour l'acquisition des instruments nécessaires à l'étude des spectres de haute fréquence;

2,000 francs à M. VICTOR WILLEM, membre de l'Académie, pour continuer, à Wimereux, des recherches commencées, notamment sur les insectes marins et sur les tropismes;

2,500 francs à M. FRÉDÉRIC SWARTS, membre de l'Académie, pour l'acquisition de platine nécessaire à la poursuite d'études sur l'hydrogénation par catalyse;

2,000 francs à M. JEAN MASSART, membre de l'Académie, pour des recherches sur la variabilité et l'hérédité au laboratoire de Nieuport.

PRIX DU GOUVERNEMENT.

Prix décennal des sciences minéralogiques.

Troisième période (1907-1916).

Sur la proposition du jury, le Roi, par son arrêté du 2 décembre 1920, a décerné le prix à M. J. CORNET, membre de l'Académie, pour son travail intitulé : *Tectonique et morphologie du Katanga*.

Prix décennal des sciences botaniques.

Troisième période (1909-1918).

Sur la proposition du jury, le Roi, par son arrêté du 22 décembre 1920, a décerné le prix à MM. ÉLIE et ÉMILE MAR-
CHAL, pour leur travail sur *L'Aposporie et la Sexualité*.

NÉCROLOGE.

Depuis le 16 décembre 1919, la Classe a eu le regret de perdre :

Un membre titulaire : ARMAND JORISSEN.

Un correspondant : JULES BOULVIN.

Deux associés : A. GAUTIER et Y. DELAGE.

ÉLECTIONS.

Ont été élus :

Dans la Section des sciences mathématiques et physiques,
le 5 juin 1920 :

Correspondant : M. OCTAVE DONY-HÉNAULT.

Associé : SIR WILLIAM POPE (Cambridge).

Le 15 décembre :

Membres titulaires (sauf approbation royale) : MM. L. CRISMER
et ED. VAN AUBEL.

Associé : SIR FRANK WATSON DYSON (Greenwich).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Boulvin (J.). Cours de mécanique appliquée aux machines professé à l'école spéciale du génie civil de Gand. 6^e fascicule (2^e partie) (2^e édition). Machines et chaudières marines et leur appareils auxiliaires. Paris, 1920; in-8° (622 p., 505 figures).

— Calcul des organes des machines. Paris, 1921; in-8° (ix + 515 p., 346 figures).

Caulley (Maurice). Zoologie. Sur l'existence de la multiplication asexuée (scissiparité normale) chez certains Sabelliens (*Potamilla borelli* Malm. et *Myxicola dinardensis* St. Jos). Paris, 1920; extr. in-4° (pp. 683-686).

— « *Ancyroniscus bonnieri* » G. et M. Épicaride parasite d'un Sphéramide (*Dynamene bidentata* Mont.). Paris, 1920; extr. in-8° (pp. 1-36, 13 planches).

Cornet (Jules). Géologie. Tome III. Mons, 1921; in-8° (563 p.).

TABLE ANALYTIQUE

A. — COMPTES RENDUS DES SÉANCES

Association pour l'enseignement des sciences anthropologiques :

Annnonce une réunion préparatoire pour la fondation d'un Institut international d'anthropologie, 361.

Banquet du mois de mai, 79.

Bibliographie :

Bulletins des ouvrages présentés, 98, 291, 336, 439, 494, 565.

Liste des travaux publiés par l'Académie, 288.

Dons d'ouvrages, 6, 28, 78, 104, 190, 294, 338, 361, 497, 591.

Note sur des ouvrages présentés :

DELACRE (Maurice). La Dypnopinacone et le problème de l'individualité chimique, note par l'auteur, 8.

BOULVIN (Jules). Calcul des organes des machines. Cours de mécanique, note par A. Demoulin, 591.

Catalogue international de littérature scientifique, 362.

150^e anniversaire de l'Académie.

MM. Massart et Lecoinge désignés pour faire partie de la sous-commission de la publication spéciale, 29; désignation de collaborateurs éventuels, 104; rapport de M. De Vriendt, 275; M. Lecoinge demande à être remplacé comme délégué; M. Stroobant désigné pour le remplacer, 294

Bustes :

La Classe désigne les bustes à mettre aux plus belles places, 29.

Comité de lecture, 496.

Commission administrative :

M. Stroobant est désigné comme suppléant à M. le Directeur Gravis, 79; M. Rutot réélu délégué, 191.

Commission de la Bibliothèque Royale, 568.

Commission de la Biographie nationale :

Gilkinet, le Paige, Neuberg, Fredericq et Massart sont élus délégués, 5; rapport de M. Bergmans, 275, 279; M. Gilkinet décline les fonctions, 337; M. Julin élu délégué, 337.

Table analytique.

Commission des échanges internationaux, 567.

Commission spéciale des Finances : Élection, 576.

Concours annuels.

1915. Rapports (Mémoire en réponse à la 6^e question) (sciences naturelles), prorogée jusqu'en 1920; MM. Cesàro et Lohest, commissaires, 29.

Conférence de Londres pour le Catalogue international de littérature scientifique :

Pour la continuation de l'« International Catalogue of Scientific Littérature », 295, 442.

M. Fredericq délégué, 338, 568.

Congrès :

International des mathématiciens à Strasbourg, 103, 444, 496; de la Société belge d'otologie, de rhinologie et de laryngologie, 337.

Conseil national belge de recherches :

La rédaction du projet de loi relatif à ce Conseil et celle des statuts du même Conseil national sont adoptées par la Classe et seront transmises au Ministre des Sciences et des Arts, 79.

Conseils national et international de recherches :

La Classe émet un avis favorable au sujet des statuts projetés pour les Unions internationales de radiotélégraphie, de mathématique, de physique, de sciences biologiques, de géographie, de géologie et de bibliographie et documentation, 30; renvoie à l'examen de la Commission spéciale un contre-projet du Ministère des Affaires économiques, 30.

Conseil international de recherches :

La Fondation de l'*Union océanographique internationale* est en contradiction avec les décisions du Conseil, 6. Approbation des statuts par le Ministre des Sciences et des Arts, 28; il reconnaît l'Académie comme corps adhérent, 28.

Le Comité exécutif du Conseil international de recherches annonce que la Convention du C. I. R. est entrée en vigueur le 1^{er} janvier 1920 et que les Pays-Bas, l'Espagne, la Norvège et la principauté de Monaco ont adhéré au Conseil international, 78.

L'Académie de Belgrade propose d'admettre l'Académie yougo-slave d'Agram (Zagreb), 442.

Création d'une Académie de littérature française, 335.

Table analytique.

Distinctions honorifiques :

- Jules Bordet, élu membre de l'Académie royale de médecine, 77; autorisé à porter l'étoile d'argent de la Reconnaissance nationale sur sa décoration de l'Ordre de Léopold, 103; a reçu la médaille d'or de Pasteur, 441; lauréat du Prix Nobel, 495.
- A. Brachet, docteur *honoris causa* des Universités de Paris et de Strasbourg, 5; élu correspondant de l'Académie royale de Médecine, 77.
- Giuseppe Cesàro, nommé par S. M. le Roi professeur de mathématiques de S. A. R. Monseigneur le Duc de Brabant, 189.
- Jules Cornet, lauréat du prix décennal des sciences minéralogiques, 567; remercie, 592.
- Th. De Donder, dont les travaux viennent d'être cités avec éloges par Sir Joseph Larmor, dans le *Times* du 7 janvier, 27.
- Alfred Gilkinet a été l'objet d'une manifestation de sympathie organisée à l'occasion de son admission à l'éméritat, 5.
- Charles Julin, élu membre honoraire de la Société zoologique de France, 77.
- Émile Marchal, lauréat du prix décennal des sciences botaniques, 591.
- Aimé Rutot, élu membre honoraire de la « Society of Antiquaries of London », 337.
- O. Van der Stricht, nommé membre associé de la Société des Sciences médicales et naturelles, 27.
- Victor Willem, nommé membre associé de la Société des Sciences médicales et naturelles, 27.

ORDRE DE LÉOPOLD :

- Commandeur* : MM. Ch. Lagrange, 77; J. Bordet, 567.
- Officiers* : MM. Nolf, 27; Cornet, 77; Swarts (avec rayure d'or), 293.
- Chevalier* : Crismer, 77.

ORDRE DE LA COURONNE :

- Chevalier* : M. Willem, 5.

Échange de publications :

- Demande de la Commission géographique de Norvège, 103; de la Société hellénique d'Agriculture, 293; de l'Institut météorologique de la République tchéco-slovaque, à Prague, 591.

Élections et nominations :

1919. Remerciements des membres et correspondants nouvellement élus, 6; — Ampliation de l'arrêté royal approuvant l'élection de M. Servais, 28.
1920. Présentation de candidats, 104, 190, 443; — M. Octave Dony-Hénault, correspondant; — S.-W. Pope, associé, 295; — Remerciements, 337; MM. Léon Crismer, Éd. van Aubel, membres, et Sir Frank Watson Dyson, associé, 591, 592.

Table analytique.

DIRECTEUR :

1921. M. G. Cesàro, 5.

NOMINATION DU PRÉSIDENT DE L'ACADÉMIE :

1920. M. J. Brunfaut, 28.

1921. M. G. Cesàro, 567.

Hommage :

De M. Lecoq à M. De Donder au sujet d'une note de M. Henri Van der Linden, 30; à la mémoire de M. Paul Fredericq, 403.

Jubilés :

Université de Bologne annonce le 40^e anniversaire de l'entrée en fonctions d'Auguste Righi, 496; l'Académie de Médecine de Paris annonce son centenaire, 568, 591.

Laboratoire zoologique de Wimereux, 568.

Lectures :

VERSCHAFFELT : Communication verbale sur le tracé de la cycloïde, 82; sur les poids atomiques, 405.

Littérateurs à l'Académie, 274.

Manifestation : Jules Bordet, 568.

Médailles de concours :

Augmentation de leur valeur, 79.

Monument :

Inauguration du monument Éd. Van Beneden, 405, 490.

Motions :

De M. Lameere, 80, 405; de M. Julin, 80, 496, 498; de M. Massart, 406, 444.

Nécrologie :

Décès de : Arrilaga (P.), 403; Boulvin (Jules), 27; Campos Rodrigues (C.-A.), 28; Delage (Y.), 441; Fredericq (Paul), 403; Gautier (A.), 361, 441; Jorissen (A.), 441; Zeuthen (H.-G.), 77.

Notices pour l'Annuaire :

M. Gilkinet sera prié de rédiger la notice sur M. Jorissen, 576; décline l'honneur d'écrire la biographie d'A. Jorissen, 591.

Plis cachetés :

Dépôt par :

Robert Verstraeten, 6; Ledent, 78; De Donder, 78.

Prérogatives de l'Académie, 275, 335.

Table analytique.

Prix académiques.

PRIX ÉDOUARD MAILLY :

6^e période (1912-1915). Nomination du jury, 7; — Rapports, **1920**, 499; —
Prix décerné à M. Van Biesbroeck.

Erratum. — Ajouter page 502 : « M. Lecoïnte se rallie aux conclusions des
rapports des deux premiers commissaires. »

PRIX LÉO ERRERA :

5^e période (1912-1914). Nomination du jury, 7; — Rapports, **1920**, 404,
406; — Prix décerné à M. Maurice Herlant, 404;
— Mention très honorable à M. Kufferath, 404;
— Remercie, 293.

PRIX ÉMILE LAURENT :

4^e période (1911-1914). Nomination du jury, 7; — Rapports, **1920**, 295,
296; — Prix décerné à M. Hauman, 295.

PRIX LEMAIRE :

12^e période (1913-1915). Travaux soumis et nomination du jury, 338; —
Rapport, 593; — Prix décerné à MM. Willame et
Chenu, 592.

PRIX MELSENS :

4^e période (1912-1916). Travaux soumis et nomination du jury, 338; —
Rapports, 569; — Prix décerné à M. O. Dony-
Hénault, 569.

PRIX J.-S. STAS :

M. Ch.-J. Guilissen, lauréat.

FONDATION AGATHON DE POTTER :

M. Ledent demande une subvention, 28; — Subvention à M. Poma; à la
Société zoologique de Belgique (M. de Sélys, secrétaire-trésorier), 191;
— Remerciements de M. Poma, 293; — Subventions à accorder, 498.

Prix du Gouvernement.

Prix décennal des sciences, de chimie et physique. Formation d'une liste
double de noms, 7.

Prix décennal des sciences botaniques. Formation d'une liste double de
noms, 7.

Prix décennal des sciences minéralogiques. Formation d'une liste double de
noms, 7.

Prix décennal des sciences appliquées. Deuxième période (1903-1912); —
Remplacement de M. Stöber au sein du jury, 7, 79.

PRIX GUINARD :

10^e période (1912-1917). Liste de cinq noms pour la formation du jury, 29.

Table analytique.

Proposition :

De M. Massart relative à l'organisation des séances et au *Bulletin*, 80.

Rapports :

a) **Sur les travaux publiés dans le *Bulletin* :** Voir à la Table des communications à la suite des titres.

b) **Sur les travaux publiés dans la collection des *Mémoires*.**

DONY-HÉNAULT (Octave). Sur l'emploi des métaux granulaires pour le chauffage électrique; Rapport de M. Swarts (*Mémoires* in-8°), 296.

RUTOT (A.). Esquisse d'une monographie des couches quaternaires des carrières du Hainaut à Soignies (*Mémoires* in-8°), 365.

VERLAINE. Note sur la spermiogenèse et la double spermatogenèse des lépidoptères; rapport de MM. Brachet et Lameere (*Mémoires* in-8°), 104.

c) **Sur les travaux non publiés par l'Académie :**

BOENS (J.). Électricité atmosphérique et paratonnerres; dépôt aux archives sur avis de MM. Verschaffelt et de Hemptinne, 6.

GAROT. Mémoire relatif au mouvement perpétuel; dépôt aux archives sur avis de M. Ch.-J. de la Vallée Poussin, 29, 78.

LAROSE. Réalisation de l'idée pestalozzienne; dépôt aux archives sur avis de M. Stuyvaert, 104.

REMY (L.). La mensuration de la fatigue intellectuelle des écoliers au moyen d'un audiomètre permettant d'opérer simultanément sur tous les élèves d'une même classe, présentation, 30; dépôt aux archives sur avis de MM. Fredericq et Willems, 78.

SCHOEP (M.). Sur quelques cristaux de diopase du Katanga (retour à l'auteur avec les rapports de MM. Cesàro et Lohest), 443.

VAN BENEDEN (Éd.). Sur l'organisation des cérinthides (mémoire inédit signalé par M. Nolf), 105.

Représentation de la Belgique au Ramsay Memorial Fund, 295.

Séances, 5, 27, 77, 103, 189, 243, 274, 333 337, 361, 441, 495, 567, 590.

Proposition de M. Massart, 80.

Séance publique :

M. De Donder désigné pour faire la lecture, 295, 590.

Station zoologique de Naples :

Organisation nouvelle, 361.

Tables des constantes physiques :

Le Ministre des Sciences et des Arts annonce le prochain envoi d'une ordonnance, 442; — Remercie pour la subvention lui accordée, 496.

Table analytique.

Transformation de l'Université de Gand en université de langue flamande, 276.

Unions internationales astronomique, géodésique et géophysique et de chimie pure et appliquée :

Approbation des statuts par le Ministre des Sciences et des Arts, 28; il reconnaît l'Académie comme corps adhérent de ces Unions, 28; désignation des délégués, 105; liste des noms proposés pour la constitution des Comités nationaux, 442.

Union internationale de la chimie pure et appliquée :

Annonce que toutes les communications relatives à la prochaine session de cette Union seront désormais adressées directement à l'Académie, 190; Rapport de M. Swarts, 362; adresse dix exemplaires du compte rendu de la Conférence tenue à Rome, 442.

Union internationale des sciences biologiques (Section d'Océanographie) :

Fait connaître la constitution des bureaux, 338.

Union océanographique internationale :

Annonce sa constitution, 6.

Unions scientifiques internationales nouvellement constituées ou en voie de constitution :

Nomination des Comités nationaux, 497, 576.

Vœu :

Exprimé par la Classe à MM. les Ministres des Sciences et des Arts, des Affaires économiques et de l'Agriculture, à la demande de M. Massart, 189.

B. — COMMUNICATIONS ET LECTURES

Analyse mathématique et Géométrie infinitésimale :

DEMOULIN (A.). Sur les équations de Moutard à solutions quadratiques, 492. — Sur les équations de Moutard à solutions quadratiques (2^e. partie), 418 (3^e partie), 503.

Errata. — DEMOULIN (A.). *Sur les congruences qui appartiennent à un complexe linéaire et sur les surfaces Φ* (pp. 215-232) :

Page 217, ligne 4, en remontant, *au lieu de les, lire le.*

Page 222, ligne 4, en remontant, *au lieu de $x'_1, x'_2, \dots x'_6$, lire et $x'_1, x'_2, \dots x'_6$.*

Page 222, ligne 5, en remontant, *remplacer le point par une virgule.*

Table analytique.

Astronomie :

KRASSOWSKI (Jan). Sur la convergence du développement en série de la fonction perturbatrice par la méthode de M. Brendel, dans le cas de la planète (279) Thule, 586; présenté par M. Paul Stroobant avec rapport, 575.

STROOBANT (P.). Observations de « Nova Cygni » n° 3, 1920, 444.

— Sur la nature des étoiles temporaires, 448.

VANDERLINDEN (H.). La trajectoire d'un rayon lumineux dans le champ de gravitation d'Einstein-Schwarzschild, 90; présenté par M. Lecoq, 30.

Biologie :

CONRAD (W.). Sur un flagellé nouveau à trichocystes « *Reckertia sagittifera* » n. g., n. sp., 541.

MASSART (Jean). La notion de l'espèce en biologie (4 fig.), 366.

Botanique :

CONRAD (W.). Contributions à l'étude des Chrysomonadines (11 fig.), 167; présenté par M. Massart.

HANNEVART (Germaine). Sur la présence de thiosulfate de calcium dans « *Achromatium oxaliferum* », Schew, 600.

MASSART (Jean). L'action de la lumière continue sur la structure des feuilles, 37.

— Recherches sur les organismes inférieurs. — VII. Les réflexes chez les polyporées (10 fig.), 82.

— Recherches sur les organismes inférieurs. — VIII. Sur la motilité des Flagellates (32 fig.), 116.

SCHOUTEDEN-WÉRY (J.). Quelques expériences de régénération de bourgeons chez les racines de Chicorées (13 fig.), 152; présenté par M. Massart.

VANDERLINDEN (E.). Quelques résultats d'observations phénologiques sur des végétaux, 577.

Chimie :

BRUYLANTS (P.). Sur quelques propriétés physiques de l'hydrogène telluré, 472; rapports de MM. Swarts et de Hemptinne, 443.

— Note sur la constitution du cyanure d'allyle, 479; rapports de MM. Swarts et de Hemptinne, 443.

SWARTS (Fréd.). Contribution à l'étude du trifluortoluène (1 fig.), 389.

— Sur l'hydrogénation catalytique des dérivés organiques fluorés, 399.

Cristallographie :

CESÀRO (G.). Sur la forme de l'alvéole de l'abeille (2 fig.), 109.

Table analytique.

Embryologie :

LEPLAT (Georges). Note sur l'étude du développement du cristallin et des autres placodes chez des embryons monstrueux de « *Rana fusca* », 252.

Géodésie :

DEHALU (M.). Nouvelle mesure de la base géodésique de Lommel, 329.

Géologie :

FOURMARIER (Paul). L'âge relatif de quelques modifications des terrains paléozoïques de la Belgique, 142.

— A propos de l'origine de certaines failles des terrains primaires belges (1 fig.), 381.

— Quelques réflexions au sujet de la discordance entre le Gedinnien et le Siluro-Cambrien en Belgique, 246.

Géométrie :

GODEAUX (Lucien). Sur une surface du quatrième ordre à douze points doubles coniques, 554.

Géométrie infinitésimale :

DEMOULIN (A.). Sur les congruences qui appartiennent à un complexe linéaire et sur les surfaces, 215.

Physiologie :

DELAYA. Étude des voies centrifuges du réflexe oculo-cardiaque (4 fig.), 265; présenté par M. Léon Fredericq.

LEPLAT (Georges). Mensuration de la pression sanguine dans les artères de l'iris. Ses modifications sous l'influence de quelques substances toxiques, 561.

NOLF (P.). De la nature du complément hémolytique, 348.

REMY (L.). La mensuration de la fatigue intellectuelle des écoliers au moyen d'une échelle visuelle permettant d'opérer simultanément sur tous les élèves d'une classe, 52.

Physique :

ERRERA (A.). Note sur la résistance de l'air dans le cas des projectiles ogivaux, 15; présenté par M. P. Stroobant, 7.

HENRIOT (E.). Sur l'explication de quelques phénomènes optiques, 353; présenté par M. J.-E. Verschaffelt.

— Sur les biréfringences normales et accidentelles, 487; présenté par M. De Donder, 443.

Table analytique.

Physique expérimentale :

VERSCHAFFELT (J.-E.) et CROMBEZ (R.). Sur l'observation de la dispersion anormale par la méthode des prismes opposés, 31.

Physique et chimie mathématique :

DE DONDER (Th.). Transformations physiques et chimiques des systèmes de Gibbs, 315.

Physique mathématique :

DE DONDER (Th.) et VANDERLINDEN (H.). Théorie nouvelle de la Gravifique, 232.

VANDERLINDEN (H.). Les équations du champ de gravitation d'Einstein, 43; présenté par M. Lecoqte, 30.

Préhistoire :

RUTOT (A.). Sur la faune des mammières de l'époque de la pierre polie en Belgique, 456.

Zoologie :

FRAIPONT (Charles). Sur la structure intime de l'astragale chez les primates; présenté par M. Lohest, 261.

— Une mustellide quaternaire nouvelle pour la Belgique; présenté par M. Lohest, 263.

WILLEM (Victor). Observations sur la respiration des amphibiens (1^{re} note) (1 diagramme), 298.

WILLEM (Victor). Observations sur la respiration des Amphibiens (2^e note), 339.

— L'habitat et les allures du Collemboule marin Actaletes. 524.

TABLE ONOMASTIQUE

*Les noms des académiciens sont en petites capitales.
Les chiffres en caractères **gras** indiquent la page d'une communication.*

A

Académie de Belgrade, 442.
Académie de Médecine de Paris, 568, 591.
Académie des Sciences et Lettres du Danemark, 77.
Académie royale de Médecine, 77.
Académie yougo-slave d'Agram (Zagreb), 442.
Arrilaga (P.), 103.

B

Baire, 78.
Belgique, 142, 443.
BERGMANS (Paul), 275, 279.
Bersaques (Ch. de), 294.
Boëns (J.), 6.
Bologne (Université), 496.
Bonaparte (Prince Roland), 78.
BORDET (J.), 77, 103, 105, 441, 495, 567, 568.
BOULENGER (A.), 441.
BOULVIN (Jules), 27, 577, 591.
BRACHET (Albert), 5, 77, 82, 104, 105.
BRANLY (E.), 442.
BRASSEUR, 29.
Brendel, 575, 587.
BRUNFAUT (J.), 28.
Bruxelles (Université), 496, 568.
Bruylants (P.), 366, 443, 472, 479.

C

Campos Rodrigues (C.-A.), 28.
CARTON DE WIART (H.), 335.

CESÀRO (Giuseppe), 5, 29, 105, 109, 189, 366, 443, 567.
Chenu, 592.
Comité de lecture, 496.
Commont (V.), 294.
Conrad (W.), 167, 541.
Conseil international de recherches, 28, 78, 191.
Conseil national et international de recherches, 30.
CORNET (J.), 77, 567, 592.
CRISMER (L.), 338, 569, 579, 592.
Crombez (R.), 30, 31.
Cuvier, 497.

D

DE DONDER (Th.), 27, 28, 30, 78, 232, 295, 298, 315, 362, 443, 590.
DE DORLODOT (H.), 294.
Dehalu (M.), 329.
DE HEMPTINNE (A.), 6, 191, 338, 366, 443, 569, 575.
DELACRE (Maurice), 6, 8.
DELAGE (Y.), 441.
Delava (P.), 265.
DE LA VALLÉE POUSSIN (Ch.-J.), 29, 78, 103, 191.
DE LA VALLÉE POUSSIN (L.), 335.
DEMOULIN (A.), 103, 190, 192, 215, 418, 503, 576, 577.
De Potter (Fondation Agathon), 28, 191, 498, 592.
DERUYTS (Jacques), 103, 444, 496, 576.
de Selys, 191.
DE VRIENDT (J.), 275, 276, 277, 278.

Table onomastique.

DONY-HÉNAULT (Octave), 295, 296, 337, 569.

Dufourny, 338.

DUMONT (Albert), 278.

DUMONT, 29.

Dupont, 190.

Dyson (Sir Frank Watson), 593.

E

École d'anthropologie de Paris, 28.

Einstein, 28, 30, 90.

Errera (A.), 7, 15, 190.

ERRERA (Paul), 335.

Errera (Prix), 7, 104, 106.

F

FOURMARIER (Paul), 142, 190, 191, 246, 381.

Fraipont (Charles), 261, 263.

FREDERICQ (Léon), 5, 7, 31, 78, 79, 103, 104, 105, 277, 338, 362, 442, 576.

FREDERICQ (Paul), 103.

G

Gand (Université) 496.

Garot, 29, 78

GAUTIER (A.), 361, 441.

Geoffroy Saint-Hilaire, 497.

Gibbs, 315.

GILKINET (Alfred), 5, 105, 337, 576, 592.

GOBLET D'ALVIELLA (Comte), 335.

Godeaux (L.), 443, 497, 554.

GRAVIS (A.), 7, 79, 104, 295, 296.

Guilissen (Ch.-J.) 496.

Guinard (Prix), 29.

H

Hannevart (Germaine), 600.

Hauman, 295.

Haut Commissaire du Littoral, 190.

Henriot (E.), 353, 443 487.

Herlant (Maurice), 104.

HOUEAU, 29.

HULIN DE LOO (G.), 278, 335.

I

Institut international d'anthropologie, 28.

Institut électrotechnique Montefiore, 442.

J

Jardin botanique de l'État, 496.

JORISSEN (A.), 441, 442, 576, 591.

JULIN (Charles), 77, 80, 337, 496, 498.

K

Katanga, 366, 443.

Kelvin (Lord), 294.

Krassowski (Jan), 575, 586.

Kufferath (H.), 108, 293.

L

Lagasse de Loch, 338.

LAGRANGE (Charles), 77.

Lamarck, 497.

Lambin, 338.

LAMEERE (Auguste), 80, 81, 104, 105, 190, 191, 576.

Larmor (Sir Joseph), 27.

Larose, 78, 104.

Laurent (Prix), 7, 295.

Lebesgue, 78.

Lecat, 192.

LECLERCQ (Jules), 335.

LECOINTE (Georges), 7, 29, 79, 191, 294, 335, 362, 442, 497.

Ledent, 28, 78.

Lemaire (Prix), 338, 593.

LE PAIGE (C.), 5, 7, 497, 502, 576.

Leplat (Georges), 252, 561.

LIAGRE, 29.

Liège (Université), 496.

Lisbonne, 28.

LOCKYER (Sir Norman), 593.

LOHEST (Max), 29, 366, 443.

Lommel, 329.

LORENTZ, 28.

Louvain (Université), 496.

Table onomastique.

M

Mac Alister, 103.
 Madrid, 103.
 Mailly (Prix), 7, 497, 499.
 MARCHAL (Emile), 7, 104, 108, 295, 297, 591, 592.
 Masek (J.), 104.
 MASSART (Jean), 5, 7, 29, 30, 37, 80, 82, 104, 106, 108, 116, 189, 190, 191, 276, 295, 297, 366, 444, 497.
 Maxwell, 28.
 Melsens (Prix), 338, 569.
 Meurice (A.), 568.
 Ministère de l'Instruction publique (France), 28.
 Ministre de l'Industrie, 591.
 Ministère des Affaires économiques, 30.
 Ministre de l'Agriculture, 189, 495.
 Ministre des Affaires économiques, 189.
 Ministre des Sciences et des Arts, 7, 28, 30, 189, 274, 295, 442, 495, 496, 567, 568, 591, 592.
 Ministre des Affaires étrangères, 591.
 Ministre des Travaux publics, 591.
 Ministre de l'Agriculture, 591.
 Monticelli (S.), 31.
 Moutard, 192, 503.

N

Naples, 361.
 NEUBERG (J.), 5, 443, 497.
 New-York, 444.
 Nobel (Prix), 495.
 NOLF (P.), 27, 105, 190, 348.
 Northrop (John-I.), 294.
 Norwège, 103.

O

Observatoire astronomique de Lisbonne, 28.
 Observatoire royal d'Uccle, 495.
 OMALIUS (d'), 29.
 Osborn (H.-F.), 294.

P

Palais du Roi, 591.
 Pasteur, 78.
 PELSENEER (Paul), 191, 497.
 PICARD (E.), 294.
 PIRENNE (Henri), 335, 336.
 PLATEAU (J.), 29.
 Poina, 191, 293.
 POPE (Sir W.), 295, 337.

Q

QUETELET, 29.

R

Raspail (X.), 78.
 Remy (L.), 30, 52, 78.
 Renier, 294.
 Righi (Auguste), 496.
 ROLIN (A.), 335.
 RUTOT (Aimé), 191, 294, 337, 365, 443, 456.

S

Saturne, 361.
 SCHMERLING, 29.
 Schoep (E.), 366.
 Schouteden-Wéry (M^{me} J.), 152.
 SCHWANN, 29.
 Schwarzschild, 90.
 SERVAIS (Cl.), 28.
 Société chimique de Londres, 77.
 Société royale de Londres, 442, 568.
 Société royale zoologique et malacologique de Belgique, 592.
 Société zoologique de Belgique, 191.
 Société zoologique de France, 77.
 Spelkens, 294.
 SPRING, 29.
 Stas (Prix J.-S.), 496.
 Stöber, 7, 79.
 Strasbourg, 103, 444.
 STROOBANT (Paul), 7, 79, 191, 294, 361, 362, 443, 444, 448, 497, 499, 575.

Table onomastique.

STUYVAERT (Modeste), 78, 103, 104, 338, 443, 497.

SWARTS (Frédéric), 79, 105, 191, 276, 293, 295, 296, 335, 338, 362, 366, 389, 399, 443, 569.

T

Tables des Constantes physiques, 442, 496.

Thule, 575, 587.

Times (Le), 27.

U

Union astronomique, 191.

Union de la Chimie pure et appliquée, 191.

Union de physique, 191.

Union des mathématiciens, 191.

Union des sciences biologiques, 191.

Union géodésique, 191.

Union géographique, 191.

Union géologique, 191.

Unions internationales astronomique, géodésique et géophysique et de chimie pure et appliquée, 28.

Union internationale de chimie pure, 190, 442.

Union internationale des sciences biologiques (section océanographique, 6.

Union pour la bibliographie et la documentation, 191.

Unions scientifiques internationales nouvellement constituées ou en voie de constitution, 497.

URBAIN, 442.

V

VAN AUBEL (E.), 593.

VAN BENEDEN (Édouard), 105, 190.

Van Biesbroeck (G.), 497, 502.

Van Brabant, 338.

Van der Linden (H.), 30, 43, 90, 232, 577.

VAN DER STRICHT (O.), 27, 277.

VAUTHIER (Maurice), 335.

Verlaine (L.), 82, 104.

VERSCHAFFELT (J.), 6, 30, 31, 82, 105, 338, 442, 496, 593.

Verstraeten (Robert), 6.

W

WALTZING (J.-P.), 277.

Willame, 592.

WILLEM (Victor), 5, 7, 27, 31, 78, 104, 105, 106, 298, 339, 524.

WILMOTTE (Maurice), 276, 335.

Wimereux, 568.

Z

Zeuthen (H.-G.), 77.

TABLE DES MATIÈRES.

CLASSE DES SCIENCES. — Séance du samedi 4 décembre 1920.

M. le Directeur félicite MM. J. Bordet, promu Commandeur de l'Ordre de Léopold, et J. Cornet, à qui vient d'être attribué le Prix décennal des Sciences minéralogiques.	567
CORRESPONDANCE : M. le Ministre des Sciences et des Arts fait parvenir une ampliation de l'arrêté royal nommant M. G. Cesàro président de l'Académie. — Le même Ministre annonce qu'il sera tenu bonne note du désir de la Classe d'être représentée au sein de la Commission des Échanges internationaux. — Le même Ministre fait connaître que la nouvelle Commission de la Bibliothèque royale sera assistée de membres correspondants. — Le même Ministre demande à quelles conditions une table pourrait être louée au Laboratoire zoologique de Wimereux. — L'Académie de Médecine de Paris prie la Classe de se faire représenter à la célébration de son centenaire. — M. A. Meuris s'informe de l'accueil fait à ses dernières communications. — La Société royale de Londres fait parvenir le rapport de la Conférence au sujet du Catalogue international de la littérature scientifique. — L'Université de Bruxelles prie la Classe de se faire représenter à la manifestation organisée en l'honneur de M. J. Bordet	568
RAPPORTS : 1 ^o De MM. Swarts, Crismer et de Hemptinne sur le Prix Louis Melsens, 4 ^e période; lauréat M. O. Dony-Hénault.	569
2 ^o De M. Stroobant, <i>Sur la convergence du développement en série de la fonction perturbatrice par la méthode de M. Brendel dans le cas de la planète (279) Thule</i> , par Jan Krassowski	575
NOMINATION DE LA COMMISSION SPÉCIALE DES FINANCES	576
NOMINATION DES MEMÈRES DES COMITÉS NATIONAUX RATTACHÉS AUX UNIONS SCIENTIFIQUES INTERNATIONALES NOUVELLEMENT CONSTITUÉES OU EN VOIE DE FORMATION	576
BIOGRAPHIES D'ACADÉMICIENS DÉCÉDÉS	576

Communications.

BOTANIQUE. — <i>Quelques résultats d'observations phénologiques sur les végétaux</i> , par E. Vanderlinden	577
ASTRONOMIE. — <i>Sur la convergence du développement en série de la fonction perturbatrice par la méthode de M. Brendel dans le cas de la planète (279) Thule</i> , par Jean Krassowski.	586

Séance du mercredi 15 décembre 1920.

M. le Directeur félicite M. Émile Marchal, à qui vient d'être attribué le Prix décennal des Sciences botaniques	590
CORRESPONDANCE : S. M. le Roi fait exprimer ses regrets de ne pouvoir assister à la séance publique. — M. le Ministre de l'Industrie annonce qu'il assistera à la séance publique. — MM. les Ministres des Affaires Étrangères, des Travaux publics, de l'Agriculture, des Sciences et des Arts regrettent de ne pouvoir assister à la séance publique. — S. Exc. l'ambassadeur de France fait connaître à l'Académie que le centenaire de l'Académie de Médecine de Paris sera célébré du 20 au 23 décembre. — M. Gilkinet décline l'honneur d'écrire la biographie d'Armand Jorissen. — M. le Ministre des Sciences et des Arts annonce que les jurys des Prix décennaux pour les sciences minéralogiques et les sciences botaniques ont attribué ces prix à MM. J. Cornet, Élie et Émile Marchal. — L'Institut météorologique de la République tchéco-slovaque à Prague demande l'échange des publications. — M. J. Cornet remercie des félicitations que l'Académie lui a adressées. — Hommages d'ouvrages	
COMITÉ SECRET. ÉLECTIONS	592
PRIX CHARLES LEMAIRE. Rapport des commissaires; lauréats, MM. Willame et Chenu	593
CONCOURS DE 1922	599
COMITÉS NATIONAUX RATTACHÉS AUX UNIONS SCIENTIFIQUES INTERNATIONALES.	599
PRÉROGATIVES REVENDIQUÉES PAR L'ACADÉMIE.	599

Communication.

BOTANIQUE. — <i>Sur la présence de thiosulfate de calcium dans « Achromatium oxaliferum »</i> Schew, par Germaine Hannevart (1 fig.)	600
--	-----

Séance publique du jeudi 16 décembre 1920.

ALLOCUTION par M. Gravis, directeur de la Classe	607
DISCOURS par M. Nolf	608
RÉPONSE de M. Bordet	622
<i>La morphologie végétale</i> , par M. A. Gravis	624
<i>Quelques réflexions sur la matière</i> , par M. Th. De Donder.	666
PROCLAMATION	678
BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE	679
TABLES	681

Le fonds des publications académiques ayant été systématiquement pillé par les Allemands, il ne sera plus possible de donner suite aux demandes de combler les lacunes antérieures à 1919.



PUBLICATIONS ACADÉMIQUES DEPUIS LA RÉORGANISATION, EN 1816

- Mémoires**, t. I-LIV (1820-1904); in-4°.
- Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers**, t. I-LXII (1817-1904); in-4°.
- Mémoires couronnés**, t. I-LXVI (1840-1904); in-8°.
- Tables des Mémoires**, nouvelle édition, 1772-1897; in-8°. — **Supplément**, 1898-1914.
- Mémoires (n. sér.) in-4°** de la Classe des sciences, t. I à IV (5^e fasc.).
- Mémoires (n. sér.) in-8°** de la Classe des sciences, t. I à V.
- Mémoires (n. sér.) in-4°** de la Classe des lettres, t. I à VII (3^e fasc.).
- Mémoires (n. sér.) in-8°** de la Classe des lettres, t. I à XIII (2^e fasc.).
- Mémoires in-4°** de la Classe des beaux-arts, t. I (2^e fasc.).
- Mémoires in-8°** de la Classe des beaux-arts, t. I (2^e fasc.).
- Tables de Logarithmes**, par A. Namur et P. Mansion; in-8°.
- Annuaire**, 1^{re} à 86^{me} année, 1835-1920; in-18. — **Table des Notices**, 1919.
- Règlements et Documents** concernant les trois Classes (éditions de 1896 et de 1905); in-18.
- Fondations académiques**, 1914, gr. in-8°.
- Bulletins**, 1^{re} sér., t. I-XXIII, avec annexes; — 2^e sér., t. I-I; — 3^e sér., t. I-XXXVI; in-8°. — Classe des sciences, années 1899-1920; Classe des lettres et des sciences morales et politiques et des beaux-arts, années 1899-1914. — Classe des lettres et des sciences morales et politiques, 1919-1920. — Classe des beaux-arts, années 1919-1920. — **Tables générales**, 1832-1914, 9 vol. in-8°.
- Bibliographie académique**, 1^{re} édit. (1854); — 2^e édit. (1874); — 3^e édit. (1886); — 4^e édit. (1896); — 5^e édit. (1907-1909); in-18.
- Catalogue** de la Bibliothèque de l'Académie, 1^{re} partie : Sociétés savantes et Recueils périodiques — 2^e partie : sciences, lettres, arts (1881-1890); 4 vol. in-8°.
- Catalogues onomastiques** des accroissements, 1883-1914, 3 vol. gr. in-8°.
- Catalogue** de la bibliothèque du baron de Stassart (1863); in-8°.
- Centième anniversaire de fondation** (1772-1872), 1872; 2 vol. gr. in-8°.

Monuments de la littérature flamande.

Œuvres de Van Maerlant : DER NATUREN BLOEME, t. 1^{er}, publié par J. Bormans, 1857; 4 vol. in-8°. — RYMBYBEL, avec Glossaire, publié par J. David, 1858-1860; 3 vol. — ALEXANDERS GEESTEN, publié par Snellaert, 1860-1862; 2 vol. — *Nederlandsche gedichten*, etc., publiées par Snellaert, 1869; 1 vol. — **Parthonopeus van Bloys**, publié par J. Bormans, 1871; 1 vol. — **Speghel der Wysheit**, van Jan Praet, publié par J. Bormans 1872; 4 vol.

Œuvres des grands écrivains du pays.

Œuvres de Chastelain, publiées par le baron Kervyn de Lettenhove, 1863-1865, 8 vol. in-8°. — **Le premier livre des Chroniques de Froissart**, par le même, 1863, 2 vol. — **Chroniques de Jehan le Bel**, par L. Polain, 1863, 2 vol. — **Li Roumans de Gléomadés**, par André Van Hasselt, 1866, 2 vol. — **Dits et Contes de Jean et Baudouin de Condé**, par Auguste Scheler, 1866, 3 vol. — **Li ars d'amour**, etc., par J. Petit, 1866-1872, 2 vol. — **Œuvres de Froissart** : *Chroniques*, par le baron Kervyn de Lettenhove, 1867-1877, 26 vol. — *Poésies*, par Aug. Scheler, 1870-1872, 3 vol. — *Glossaire*, par le même, 1874, 1 vol. — **Lettres de Commynes**, par Kervyn de Lettenhove, 1867, 3 vol. — **Dits de Watrquet de Couvin**, par A. Scheler, 1868, 1 vol. — **Les Enfances Ogier**, par le même, 1874, 1 vol. — **Bueves de Commarchis**, par Adenès li Rois, par le même, 1874, 1 vol. — **Li Roumans de Bertès aux grans piés**, par le même, 1874, 1 vol. — **Trouvères belges du XII^e au XIV^e siècle**, par le même, 1876, 1 vol. — *Nouvelle série*, 1879, 1 vol. — **Li Bastars de Bullion**, par le même, 1877, 1 vol. — **Récits d'un Bourgeois de Valenciennes (XIV^e siècle)**, par le baron Kervyn de Lettenhove, 1877, 1 vol. — **Œuvres de Ghillebert de Lannoy**, par Ch. Potvin, 1878, 1 vol. — *Poésies de Gilles li Muisis*, par Kervyn de Lettenhove, 1882, 2 vol. — **Œuvres de Jean Lemaire de Belges**, par J. Stecher, 1882-1891, 4 vol. avec notice. — **Li Regret Guillaume**, par A. Scheler, 1882, 1 volume.

Biographie nationale.

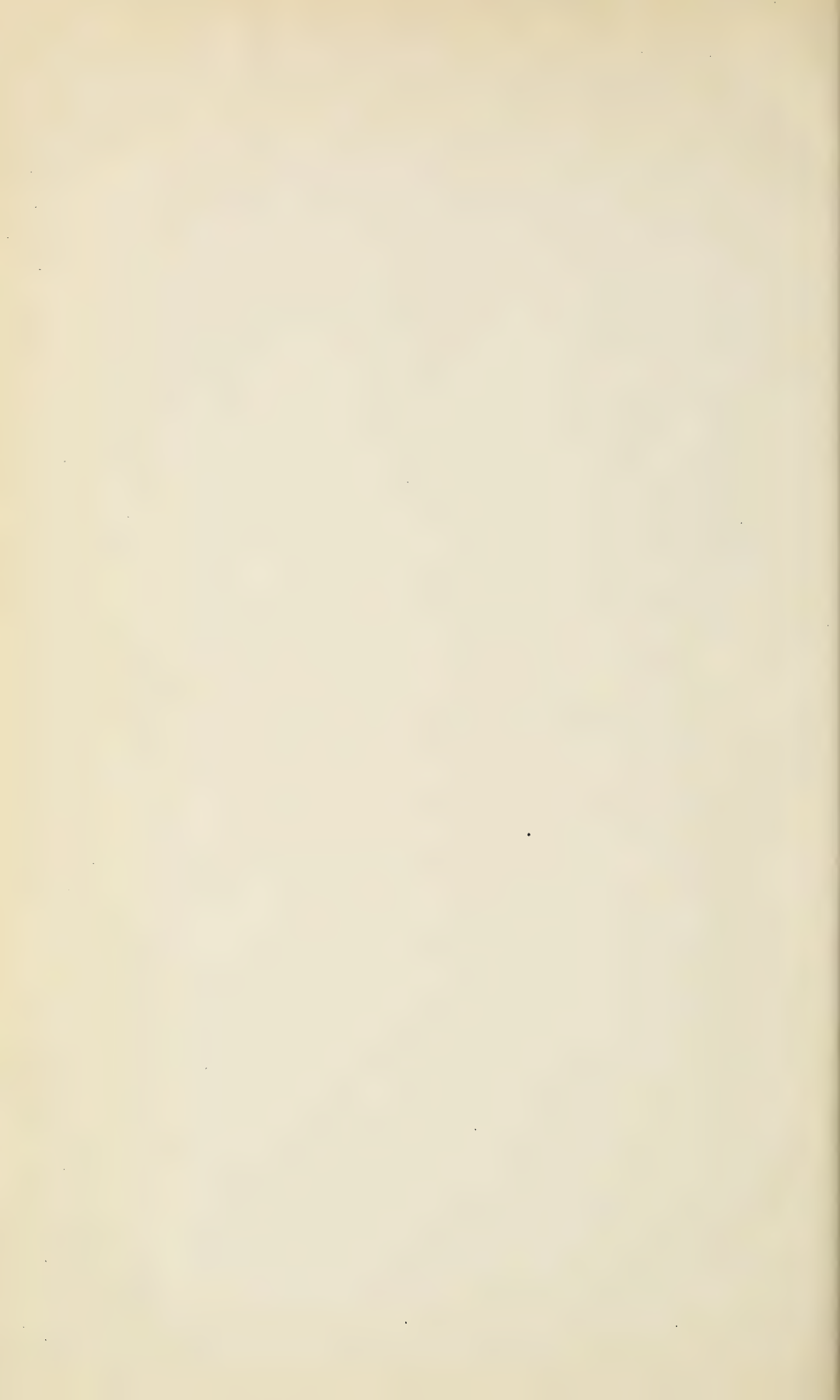
Biographie nationale, t. I à XXII. Bruxelles, 1866-1914.

Commission royale d'histoire.

Collection de Chroniques belges inédites, publiées par ordre du Gouvernement, 125 vol. in-4°. (Voir la liste sur la couverture des Chroniques.)

Comptes rendus des séances, 1^{re} sér., avec table (1837-1849), 17 vol. in-8°; — 2^{me} sér., avec table (1850-1859), 13 vol. in-8°; — 3^{me} sér., avec table (1860-1872), 15 vol. in-8°; — 4^{me} sér., avec table (1873-1891), 18 vol. in-8°; — 5^{me} sér., t. I-XI; à partir de 1902, t. 74-84.

Annexes aux Bulletins. Voir la liste sur la couverture des Chroniques et des Comptes rendus.







SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES



3 9088 01354 2824